





LA SCIENZA
DELLE GRANDEZZE

DIMOSTRATA

COLLE PRINCIPALI CALCOLAZIONI

NUMERICHE, ANALITICHE,

E GEOMETRICHE

DA

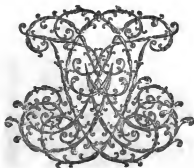
ALBERTO PAPPIANI

CHERICO REGOLARE DELLE SCUOLE PIE

PUBBLICO PROFESSORE

DI FILOSOFIA E MATEMATICA

NEL COLLEGIO FIORENTINO.





IN FIRENZE.)(MDCCXLVII.

NELLA STAMPERIA IMPERIALE

CON LICENZA DE' SUPERIORI.

A SUA ECCELLENZA IL SIGNOR CONTE

EMANUELLO DI RICHECOURT

CONSIGLIERE DI STATO ATTUALE
DELLE LL. MAESTA' IMPERIALI

DEL CONSIGLIO DI REGGENZA
E PRESIDENTE DELLE FINANZE

DEL GRANDUCATO DI TOSCANA &c.

ALBERTO PAPPIANI

CHERICO REG. DELLE SCUOLE PIE.



LA SCIENZA DELLE GRANDEZZE, che io ho l' onore di pubblicare sotto gli Auspicj dell' ECCELLENZA VOSTRA è indirizzata

ad istruire la Gioventù nelle parti della Matematica, che sono le più sublimi, e le più necessarie. Il metodo da me praticato potrà facilitarne lo studio, e la degnazione di V. Ecc. nel riguardarla come cosa a Lei dedicata, aggiugnerà alla medesima quell' ornamento, e splendore, che non potrebbe veramente sperare dal mio talento, e fatica. Ognuno ben sa quanto s' interessi l' Ecc. V. per far rifiorire le belle arti, e nobili scienze, e quanto frutto ne sia per ridondare ne i sudditi, e felicissimi Stati dell' Augustissimo Nostro Sovrano, scorgendosi ben chiaramente questo nobil genio, e premura dell' Ecc. V.; e nelle scuole, che per suo consiglio si

ſono aperte nelle noſtre Univerſità, e in quei Giovani, che dalla ſua liberalità aſſiſtiti, hanno ſenſibilmente profittato ne' loro ſtudj; e ne' Letterati da V. Ecc. promoſſi, e protetti, ed in me pure ſebbene il minore fra tutti, quale ſono coſtretto a rendere queſta giuſtiſſima lode alla bontà, e degnazione di V. Ecc. per eſſere ſtato a parte di molte grazie, le quali non mi potevano derivare da alcuno mio merito, ma bensì unicamente dalla ſua beneficenza, e propenſione agli amatori delle Lettere. Non ſenza ragione dunque conſacro a V. Ecc. queſta mia Opera, che l' è per ogni parte dovuta, ſperando che Ella ſia per accoglierla benigna-

mente, e riguardarla, ſiccome umilmente la ſupplico, come una piccola dimoſtrazione di quella venerazione, e ſincera riverenza, che io, e tutto l' Ordin mio le dee per tanti titoli profeſſare.

PRE-

PREFAZIONE.



Ono le facoltà Matematiche in tale ſtima, e pregio di queſto noſtro Secolo, e per le verità dimoſtrate, che in ſe contengono, e per il merito degli Autori, che le ſcoprirono, che a ragione vien giudicato da tutti lo ſtudio di queſte il più decoroſo, il più utile, e il più neceſſario di ogni altro. Quindi vediamo, che quaſi in tutte le Scuole generalmente s' inſegnano, e da ognuno ſi cerca apprenderle, non tolti anche quelli, che o per la ſcarſezza degli anni non ſono atti a capire le conneſſioni delle Propoſizioni, e l' illazione de' principj; o per la miſeria del proprio talento, non anche maturo, ed adattato a ſtudio ſi ſerio, nulla comprendono, anzi ſi confondono ſempre più, e ſenza riparo ſi perdono. Riguardo a queſto ſono ſtato ſempre di parere, che a tale ſtudio, che è certamente il più ſerioſo, più profondo, e ſingolare, ſi debbono applicare non tutti i giovani; ma quelli ſolo, che ſono dotati, e forniti d' ingegno generoſo, ed eccelſo, come è di ſentimento il celebratiſſimo Wolfio. L' eſperienza pur troppo dimoſtra, che non ogni terra è adattata a produrre, ed alimentare ogni pianta, e che talvolta non ſolo nega quel frutto, che ſi deſidera dall' Agricoltore, ma toglie la ſperanza del vantaggio, e rende inutile ogni induſtria, e fatica di chi la coltiva, e cuſtodiſce con inceſſanti ſudori. Non tutti egualmente poſſiamo tutto, nè ſono le forze di ognuno corriſpondenti a quelle degli altri, talchè poſſa chi vuole azzardarſi ad imprendere qualſiſia coſa, ſenza timore di ſmarrirſi, e di ſoccombere; dal che ne riſulta infinita lode al Sommo Univerſale Arteſice, che dalla varietà delle forze degli umani ingegnj ne produce nel Mondo quella bellezza, che lo rende sì vago, e plauſibile. Saggiamente dunque pensò il ſopraccitato ſapientiſſimo Uomo nell' avvertire per comune avvedutezza nel preludio dei ſuoi dottiſſimi Libri, che quantunque la Matematica ſia di grandiſſimo vantaggio, ed utile per la felicità dell' Uman Genere, talmente che meriti giuſtamente di eſſere da

ciaſ-

ciascuno appresa, non per questo addiviene, che si debba da tutti generalmente imparare; poichè se non si misuri l' età, e la forza dell' ingegno di chi presume apprenderla, si dee con ragione temere, che non produca in esso altro frutto, che la confusione, che generando in esso poi perplessità, l' obbliga ad ogni conto ad abbandonare questo utilissimo studio; laddove applicando ad altre Scienze, o Arti liberali, o meccaniche, potrebbe riuscire di gran decoro a se, di gran vantaggio alla Patria, e di gran sollievo alla Repubblica. Non ha per fine però questo mio sentimento il condannare quei Giovani, che assistiti da proporzionata cognizione, e lume, sono invaghiti di penetrare le più recondite, ed astruse verità della Matematica, anzi credo, che possa animargli piuttosto, additandogli i mezzi opportuni, e cercando con questo mio Libro facilitarne per essi il metodo, e nel tempo istesso commendarne l' applicazione. Farei torto al vero, se non confessassi ciò, che è sentimento di tutti i più rinomati Uomini, e ciò, che per mezzo loro ho ad evidenza conosciuto, e toccato con mano, che non vi ha facoltà più singolare, e più vantaggiosa di questa. Chi di noi non vede quanto pregevole sia in se stessa, e plausibile per ogni parte? Non pretendo misurare il di lei peso, e valore da quello, che per tanti secoli da tanti valenti Uomini, che sono maestri di quei, che sanno in tante gloriose Università ne fu scritto in commendazione di lei; nè dal sapersi, che non vi è angolo più recondito del Mondo, nè paese più barbaro, e sconosciuto, in cui questo lodevolissimo Studio non trionfi anche sopra la fierezza degli uomini meno umani, e civili, e molto meno dal sapersi, che da tanti illustri Eroi, e gloriosi Principi, che con incessanti trionfi avevano segnalato il loro nome presso l' età future, fu questa Scienza colla maggior gelosia custodita con ogni possibile diligenza, e fervore appresa, con instancabile premura professata, ed accresciuta, non sdegnando alle trionfali loro Corone aggiugnere, ed unire questo pregio maggiore. Sarebbe questa una lode, che porrebbe questa sublime facoltà al di sopra di tutte le altre, e potrebbe bastare per formarne quell' idea, che è degna di lei. Ma pur non è tutto quello, che ne dimostri ad evidenza la sua nobiltà. E' sì gloriosa l' origine, che per quanto anche ne' primi secoli si cercasse da i di lei nemici oscurarne l' onore; pure, siccome l' ombre danno maggior risalto, e vi-

vez-

vezza ad una bella immagine in tela espressa, così servirono le loro disapprovazioni a renderne più magnifica nel comune degli uomini l' idea. Restò delusa per tanto (se ciò, che si legge ha connessione col vero) restò delusa l' invidia di un Aristippo, che in essa non ravvisava dimostrazioni utili, e vantaggiose all' uman genere; di un Epicuro, che falsa, ed erronea in ogni parte la giudicava; e di un Dione Boristene, che la teneva per solo uno scherzo, ed un giuoco. Sapevano però, che non potevano sostenere senza discredito di loro medesimi proposizioni sì repugnanti alla ragione, e alle quali gli spingeva non la verità, ma o la troppo cieca adulazione per i nemici di quella, o la troppa parzialità per quelle Scienze, che professavano, o la troppa fiducia di se medesimi, che giudicavansi incapaci di errare in tutti i loro sentimenti. Imperocchè sapevano, che il sommo Facitore del tutto ne infuse ne i primi nostri Padri la cognizione, ed il possesso, perchè l' umano intelletto, che talvolta per forza della troppo viva fantasia apprende le cose diverse da quel che sono in se stesse, avesse il mezzo per discernerne la verità delle medesime; e così non restasse deluso, ed ingannato per sempre. Sapevano, che con questa ammirabile facoltà si vedono, come in terso specchio le immagini delle cose intelligibili, si rintracciano ad evidenza le orme sicure del vero. Con queste purgata la mente umana poco a poco si astrae da i sensi, da i quali bene spesso nell' intelletto si produce l' errore. Qualunque fosse il loro sentimento, non giunti sono, nè giugnerà qualunque de i loro seguaci a negare quel, che è giustamente innegabile, essere ella una perfettissima Scienza nella sua origine, se si rifletta l' ordine, la convenienza, e la determinazione per le stabili sempre, ed immobili ragioni, che l' accompagnano, e che ella ha connesse le conseguenze alle premesse, che servono di principj, i quali applicati vengono ad altre proposizioni, che fanno strada ad altri principj, e finalmente fissa in invariabili ragioni si determina non ad opinabili, e sensibili verità, ma a ferme, sicure, ed incontrastabili. Dal che ne nasce poi negl' intelletti umani, che la professano quella chiarezza, quel gaudio, e quella quiete, che lo rende beato in questa terra, vedendo, che giugne a trovare quel, che naturalmente desidera, ed a che è sempre inclinato, cioè la verità! Come ciò facilmente riesce a questa insigne sovrumana scienza! Imperocchè

chè ella non procede con quelle conclusioni, regole, e principj, con cui procedono le altre facoltà, che per lo più si fermano su probabili fondamenti, e bene spesso apparenti. Nulla cura ella, anzi da se rigetta tutto, che è fondato sulla probabilità, e solo sulle pure dimostrazioni si fonda, nè apprezza il giudizio del senso, che come regolato da materiali cose corporee, sovente s'inganna, e presta unicamente l'assenso all'evidenza delle cose astratte dalla materia, e dal sensibile, in tal maniera, che ritrova certa la verità, di cui và in traccia, escludendo tutto, che a questa si oppone, anzi erroneo, falso, ed impossibile giudica l'opposto, ed il contrario. Non può dunque negarsi, che a lei principalmente convenga il carattere, per cui gli amatori del vero sogliono attribuire alla medesima, come speciale suo diritto, e privilegio, essere ella la sola Scienza, che dà la forza di pensare senza errore, poichè perfeziona l'intelligenza, giugne alla contemplazione delle cose, e dimostra chiaramente la verità delle medesime, astraendole dalle cose sensibili, e sottoposte a mutazione.

Non sia per tanto meraviglia, che venga giudicata dalla maggior parte degli uomini sì utile, e vantaggiosa per la vita umana. Se la diversità delle azioni o perfette, o tra mille imperfezioni confuse, nasce dalla mente degli uomini, che più, o meno comprendono, quanto di lode, anche per questa parte si dovrà attribuire alla Matematica, che ci produce questo gran bene, superiore senza dubbio ad ogni altro bene, di risvegliare la mente, renderla penetrante, e perfezionarla. Dalle particolari cognizioni ci guida alle ultime felicemente, ed alla difficilissima scienza degli universali. Per questo, con tutta ragione viene ella chiamata da Socrate l'occhio dell'anima, che la risveglia ad un altissima contemplazione, e da simulacri la guida, a quel, che è vero, dal lume oscuro al lume chiaro dell'intendere, dal materiale alla incorporea indivisibile essenza. Quindi dedurre si puote per qual causa sia creduta onninamente necessaria da tutti per possedere con perfezione tutte le altre Scienze, ed Arti liberali. Per vero dire, che sostegno non ha da lei la Teologia? Mercè sua, quelle cose, che agl'imperfetti paiono difficili ad esaminarsi, e ardue per conoscere con sicurezza il Sommo Bene, il nostro Dio, tutte credibili, manifeste, e certe per forza d'immagini impresse divengono. Che ajuto non risente

te

te da lei valevolissimo la Scienza delle naturali verità? Oltre la strettissima congiunzione, che passa tra essa, e tutta la Filosofia, per lei sola si comprende l'ammirabile, e non abbastanza mai lodata struttura del corpo umano, chiamato giustamente un prodigio tra le opere signorili della divina Onnipotenza. Per lei la connessione, che passa tra parte, e parte, la proporzione, e corrispondenza de i membri tra loro, e dopo mille altre cose finalmente le prodigiose forze de i muscoli destinati a tanti varj, e costanti moti, che si fanno in ogni sua parte. Come senza lei potrebbe mai chicchessia intendere i fenomeni più ragguardevoli dell' orbità delle Comete, delle ineguali loro apparizioni, e della inegualità della loro luce, le forze della gravità, o gradi della rarefazione, e condensazione dell'aria, le apparenze de i colori nell' Iride, la formazione de' Parelj, il moto delle Stelle, la grandezza, la distanza, l' inegualità de i giorni colle notti, la diversità de i Climi, e di mille altre interessantissime opere della Divina liberalità, senza che gli siano somministrati i mezzi necessarj per ben comprendergli, che sono l' Astronomia, l' Areometria, l' Ottica, e la Catoptrica? Tutto ciò, e molto più intender si può da i termini, e figure, con cui Dio circoscrisse tutte le cose, giacchè tutto dispose in numero, in peso, in misura. Senza questa è sempre dubbiosa la Medicina, poichè non comprende con perfezione la natura de i corpi, e le intensioni delle malattie, nè le diminuzioni, i periodi, e le mutazioni, verità sì ben conosciuta dal grande Ipocrate, che ne comandò al figlio suo l' acquisto, non per decoro della studiosa sua vita, ma molto più per l' uso di quest' arte importantissima. Senza questa la Poesia non ha pregio, nè merito, ed è come il corpo umano senza spirito, poichè nascendo la particolare sua bellezza dall' armonia, questa non si può avere senza di essa; senza questa la Rettorica è misera, ed imperfetta; come imperfette, e misere sono la Pittura, la Scultura, l' Architettura, la Gnomonica, la Nautica, e tante altre nobilissime Scienze, che alla vita dell' uomo grande ornamento apportano, e sostegno. Ma perchè non creda veruno, che io pretenda esaltare più del dovere le Matematiche facoltà, e che a ciò dire mi stimoli piuttosto un genio, o inclinazione per le medesime, anzichè una verità, che oramai è nota, ed a chi ha pratica delle Scienze, è incontrastabile; si consideri con attenzione quanto

giovino alle umane cognizioni, quanto vantaggio portino al Mondo, e quanto amplo, ed ubertoſo ſia il frutto, che da eſſe ricaviſi, non ſolo per quello, che da loro ſteſſe, e per la loro nobiltà agli animi noſtri, e a tutte le altre Scienze di bene apportaſi, ma per quei vantaggi, che riguardano la vita noſtra. Non vi è certamente coſa più deſiderabile, e più vantaggioſa all' uomo, che poter con ſicurezza ſchivare la confuſione della mente, nata per lo più dal preſentarſi gli obietti confuſi alla fantaſia, e dall' imprimerſi nell' intelletto ſenza chiarezza, e buon ordine le loro imagini, che ſole ſono capaci a farci formare il retto giudizio delle coſe. Queſta confuſione sì ſvantaggioſa, e sì nociva alla umana ſocietà non può toglierſi, che colla diſtinzione delle coſe tra loro, o con ſeparare parte da parte, e la parte dal tutto, o ciò, che è eſſenziale, da ciò, che è acceſſorio ſolo, ed integrale, particolarmente, ſe ſi parli di coſe ſullunari, e che deſtinate ſiano alla ſervitù dell' uomo. Se è così, ditemi per voſtra ſede, chi mai poſe la diſtinzione tra le coſe, altri, che la Matematica? Queſta per mezzo de i punti, e delle linee ſepara le coſe, queſta le uniſce, queſta divide parte da parte, e parte dal ſuo tutto. Queſta il gran Mondo nelle ſue parti diviſe, queſta notò le diſtinzioni de' Mari, la diverſità de' Climi, la varietà de' coſtumi, dividendolo per mezzo di linee o curve, o rette, o infleſſe, o perpendicolari, &c. Ogni Paeſe, ogni Provincia, ogni Regno, ogni Città, ogni Borgo, ed anche i più piccioli luoghi, che appena ſi conoſcono col proprio nome ſeparò, e diſtinſe. Dalla quale diſtinzione, quanti vantaggi mai, e tutti ſingolari, ed importanti ne derivarono alla cognizione di noi? Come ſi ſarebbero potuti navigare i Fiumi, ed i Mari sì vaſti, e terribili per le continue inceſſanti pertinaciſſime tempeſte, che gli ſconvolgono; come ſcanſare tanti ſcogli, e ſirti, che appena con tutto lo avvedimento, e notizia de i più ſcaltri Nocchieri evitare ſi poſſono; come declinare tante ſecche arenoſe, che gli rendono impraticabili, ed inacceſſibili, ſe non ſi foſſe per mezzo delle Matematiche con linee, circoli, buſſole, ed altri opportuni iſtrumenti inſegnato a i miſeri viandanti la maniera di sfuggire ogni pericolo, ed ogni incontro funeſto? Chi ne' ſuoi letti riſtrinſe le acque, che ingombravano, ed aſſorbivano le più fertili, e feconde terre, che ora sì propizie corriſpondono alle ſperanze de' mortali, e pro-

dnco-

ducono per sostentamento dell' uman genere abbondantissimi frutti? Chi il corso interrotto delle acque istesse, il moto rese, e la naturale pendenza, che le trattenea violentemente dalla natìa sua inclinazione verso la loro origine restituì; chi per sicurezza de i passeggieri i ponti sopra di esse costrusse; e tutto ciò, che può liberargli da i continui, e non mai abbastanza previsti intoppi, se non quella ammirabile facoltà, che somministrò all' umano ingegno maniere facili, somministrò i mezzi opportuni per produrre al Mondo, e conservare una vera felicità? Queste facoltà insegnarono una maniera sicura di solcare le acque senza pericoli; questa la maniera di formare le Navi, i Battelli, e tutti gli altri Legni sì varj, sì diversi tra loro, che sparsi si vedono in ogni Mare, e in ogni Fiume, dandogli la forma più opportuna. Bisogna dunque confessare, che tanti siano i vantaggi, che da essa derivano, che possa assicurarsi, che non vi è Scienza al Mondo, che tanto proficua sia, ed utile al viver nostro. Lascio da parte l' ajuto presentissimo, che arreca alla conservazione della vita umana, regolando, e dando forma a quelle cose, che possono contribuire alla quiete della medesima. Lascio di parlare delle Fabbriche, che ebbero la forma dalle Matematiche; la direzione de i viaggi, anche ne i più reconditi, scabrosi, e sconosciuti paesi, nelle terre incognite, per cui tanto bene ne derivò, e giornalmente ne deriva all' universo. Lascio tante belle scoperte, che sono di tanto decoro alla nostra età, tante cognizioni de i più reconditi arcani della natura, tante diverse nozioni di paesi, di climi, di sfere, di stelle, che coll' ajuto di queste si sono avute. Coll' ajuto di queste si regolano le Battaglie, si dispongono gli Eserciti, si ordinano gli Squadroni, nè si può conservare qualunque valevole, e potentissimo Esercito, se non per mezzo di valenti Uomini bene sperimentati, e pratici delle Matematiche, che lo dirigano, fortifichino, e stabiliscano in quel luogo ovunque sia disposto, e trincerato. Che diremo poi, se riflettiamo, che con questa sola Scienza si difendono ugualmente, e si abbattono quelli alloggiamenti, e quei luoghi, che si pretendono o conservare, o distruggere? Che diremo, se consideriamo, che da questa sola hanno origine, e sono dirette tante belle opere dell' umano ingegno, se da lei i Bastioni, le Palizzate, le Torri, e tutte le Macchine per difender se stessi, e difendere i nemici derivano?

Da

Da quanto ho fin quì, come alla sfuggita, ed in confuso accennato, senza curarmi di riferire molti altri pregj, ed utili grandi, che valenti uomini ci assicurarono ne i secoli presenti, e passati, che si ricavano dalle matematiche facoltà, si deduce ad evidenza quanto vantaggio, e decoro abbiano apportato, e non cessino di apportare ovunque siano accolte, coltivate, ed esercitate. Questo è stato il mio ultimo fine, perchè destinato alla instruzione de i Giovani, e per conseguenza ad animargli, ed infiammargli sempre più ad uno studio sì nobile, glorioso, ed utile, di far sì anche prima di possederle, ne conoscessero almeno come in ombra la perfezione. Questo medesimo fine mi ha mosso a compilare colla maggior brevità, e chiarezza, che mi è stata possibile, tuttochè in gravissimi Autori, e benemeriti di queste Scienze fu scritto per comune ammaestramento; onde crederei, che con solo questo mio Libro si potesse dalla Gioventù con prestezza imparare tutto ciò, che è necessario per ben possedere, e per conseguenza esercitare questa facoltà. Così credo, che si potrà con facilità da me scansare quel rimprovero, che forse i meno discreti potrebbero formar di me, cioè, che avessi voluto senza bisogno multiplicare i Libri, quando per ogni dove, ed in ogni luogo se ne vedono in gran numero, e composti con tal perfezione, che nessuno possa giugnere ad uguagliargli, non che accrescerne il pregio, ed il decoro. Per tanto ho io unicamente preteso formare un corso di Matematiche per instruire i miei Scolari, non già o per acquistarmi gloria, o per servire di norma, e regola a i già provetti in questa Scienza, e meno di comparire nel numero di quelli, che di tanto decoro sono stati, e sono alla Repubblica Letteraria, conoscendo, che non mi posso per qualsisia ragione mettere a confronto di chicchessia.

In questo Libro io tratterò di tre importantissime parti di questa Scienza, con usare quel metodo, che mi pare più opportuno alla studiosa Gioventù. Sono queste l' Aritmetica, l' Algebra, e la Geometria, riservando ad altro tempo a compire tutto il corso Matematico, che ho già abbozzato, e che spero sarà compito tra non molto, se a Dio piacerà; e vedrò in qualche parte fruttuose queste qualunque siansi povere fatiche. Tutti conoscono quanto generoso, ed utile sia, e per ogni parte laudabile lo studio dell' Aritmetica. Nè occorre, che io pretenda porlo in maggior luce di quello, che è stato per tanti secoli, convenendo ad

esso

eſſo principalmente, ciò che delle Matematiche in confuſo ho ſin quì detto. Senza dubbio, che ella tiene il principal luogo tra tutte le altre Scienze, in maniera tale, che ſenza queſta può con ſicurezza dirſi, che tutte l'altre ſiano inutili, e da non curarſi, giacchè non poſſono eſſer tali ſenza i numeri. E che? non hanno tutte biſogno di proporzioni, di conti, di calcolazioni di numeri? Come poſſono conſervare, ed avere il loro ſplendore, e dignità tutte le altre Arti, e Scienze? Come durare, ed eſſer tali ſenza l'Aritmetica, che è la loro vita, ed il loro ſoſtegno? Tolta queſta, neſſuna rimane, e tutte ſpariſcono, onde la Geometria ſteſſa, la Muſica, l'Aſtronomia, ſe non è appoggiata a queſta, conviene ſenza dubbio, che totalmente rovini. Nè è d'uopo di andare in traccia della ragione, che ci perſuada di ciò. Sono piene le Iſtorie, ſono pieni i Libri, ſono oramai verità conoſciute, che i numeri ſono cauſa di tutti i beni, perchè ogni male, ed ogni moto privo di ragione è ſenza ritmo, e ſenza numero. Per queſto da i Fenicj, Ebrei, ed Egizj, che ſovra ogni altra Nazione ſi ſegnalarono nel poſſeſſo delle Scienze, prima di ogni altra coſa inſegnavano a i loro giovani l'Aritmetica, come principio, e ſuſſiſtenza di ogni altra Scienza, come mezzo opportuno per il decoroſo ſoſtentamento della vita, e come efficace cauſa di rendere i talenti deboli, e tardi più perſpicaci, e più pronti a qualunque grandioſa operazione.

Di eguale peſo, e non di minore importanza dee certamente riputarſi la Geometria da chi brama ſollevarſi dal comune del volgo, e renderſi benemerito non meno delle Lettere, che della vita umana. Potrei per dar tutto il riſalto alla mia aſſerzione deſcrivere, benchè di paſſaggio, ed in compendio i prodigioſi beni, che al Mondo per opera ſua ne derivarono. Potrei quì numerare i famoſi uomini, che in queſti ſecoli la profeſſarono; potrei avvertirne gli effetti più particolari. Ma come è impoſſibile il racchiudere in piccol vaſo la vaſta mole delle immenſe onde del Mare, così vano ſarebbe in breve carta accennarne anche la più miſera parte. Tutto dunque ſi taccia, poichè non ha biſogno di maggior commendazione, e di ſtima di quello ſia al preſente. E baſti ſolo dire, ſenza più, che ella è quella Scienza, la quale è conoſcitrice delle Grandezze, delle Figure, de i termini delle Ragioni, delle Paſsioni, delle varie poſizioni, e moti, che in eſse, e circa eſse ſi trovano, che ella dallo indiviſibi-

sibile, e impartibile segno discende fino a i solidi, e trova la differenza d' infinite sorti di essi, che ella si serve delle composizioni, e risoluzioni, cerca o la ragione, o la intelligenza, ed essenza de i Soggetti, esamina se possibile, o impossibile sia, ciò, che ella medita, anzi cerca la quantità, le cause, e tutto ciò, che può far rintracciare la verità, e rendere seconda, appagata, e quieta la mente umana.

Ma quanto più quieta, ed appagata sarà la mente nostra, se dopo avere appresa la Geometria, ed Aritmetica, ci appiglieremo allo studio dell' Algebra, che è certamente la più adattata a comprendere le verità, che o recondite sono, o non facili a ben conoscersi? Il solo nome di lei è bastante a farci comprendere le sue prerogative, e qualità, mentre non altro suonando, che quasi arte riducitrice, e comparatrice, comparando, e adeguando una quantità coll' altra, ci riduce alla verità ricercata, manifestando ciò, che oscuro era, e confuso. Per questo si merita ella il bello elogio di Arte Magna, quasi sia non meno la più sicura nel guidare le operazioni dell' intelletto, che la più plausibile tra tutte l' altre In fatti aggiugnendo ora numeri, ora dividendo, talvolta multiplicando, e servendosi di ogni sorte di numeri, della diversità delle Grandezze, scuopre i nascondigli de i numeri, penetra la grandezza di ogni mole, il metro de' suoni, i termini certi delle misure, per cui deriva, che l' intelletto con certezza deducendo le conseguenze dalle premesse, rintraccia senza errare la verità di quel, che pretende investigare con sicurezza. Insegnando le regole sicure per ben comprendere il più, ed il meno, le quantità sorde, le false posizioni, l' equazioni, sorpassa in pregio, ed è superiore molto all' Aritmetica, poichè l' Aritmetica non vi ha cosa, che non riconosca, come sua, e l' Aritmetica istessa dà a considerare, e conoscere all' Algebra quel, che è difficile; e non sà sciogliere, e spiegare da se medesima. Non si stupisca dunque veruno, che venga ella giudicata la prima Scienza tra le Matematiche, e che sia nelle private, o pubbliche, nelle antiche, o moderne Scuole, da colti, o barbari ingegni sì venerata, e seguita. Si merita ella il primate tra tutte le altre Scienze, non meno perchè ha sempre per scopo di esplorare la quantità certa, separata dalla cognizione de i sensi, tra i numeri trovare le qualità, e l' equazione per dimostrarne la quantità, che, perchè se suc-

succede, che in alcune questioni da spiegarsi colla sola Geometria, o altre Scienze, non possa giugnersi al fine bramato di veder tolta ogni difficoltà, solo può soccorrerci l' Algebra, che ben considera i numeri sordi, irrazionali, e rotti, che soli guidare ci possono a penetrarne con sicurezza le ricercate conclusioni. Non finirei mai, se volessi riferire le qualità, le virtù, e la forza dell' Algebra, che è sì felice, e potente nell' esser suo, che non può aver mai simile nella importanza, vantaggio, ed utilità, e forse attedierei chi con tanta bontà si degna onorare di leggere questi miei scritti. Lasciando per tanto riflettere a quel, che di più potea dirsi alla saviezza de' Lettori, che solo non delle parole, ma della ragione si persuadono, mi restringerò ad accennare il motivo, che mi ha spinto a intitolare questo mio Libro La Scienza delle Grandezze, *e scrivere in Italiano queste importanti materie.*

L' ho intitolata Scienza delle Grandezze, *perchè somministrando essa le dimostrazioni alle altre parti della Matematica, che le particolari specie delle Grandezze contemplano, non si potevano far conoscere le materie disposte ne' due Trattati, o con un nome, che a loro fosse più proprio, o con un pregio più bello, e più a proposito per giustificare quel merito, che esse già sopra le altre umane Scienze tutte si sono acquistato per la verità de i loro insegnamenti, e per la sicurezza, con cui guidano l' intendimento dell' uomo, perchè là giunga dove senza il loro soccorso non li sarebbe possibile mai di arrivare.*

Ho stimato poi opportuno scrivere in italiano idioma questo mio Libro, non per mio piacere, ma per vantaggio maggiore della Gioventù studiosa. Conoscevo molto bene, che con più di energia, e proprietà si sarebbero espresse molte cose, che in esso contengonsi, se seguivo l' altrui esempio con usare i termini Latini, e proprj di detta Scienza, come hanno fatto fin quì moltissimi benemeriti della medesima. Ma essendomi prefisso di darlo in luce per comodo de' miei Scolari, e di ogni altra persona, ho creduto più opportuno di esprimerlo in quella favella, che è la più naturale, e in cui siam nati, perchè s'intenda più facilmente la forza de' medesimi termini. Tanto più, che ho veduto, che tanti altri Autori, benchè di materie ardue difficili, e profonde trattassero, pure stimarono meglio nella nativa loro lingua esprimere le conclusioni più importanti, e più sublimi, e difficili. Con ciò ancora scanserò il

rimprovero di aver voluto aggiugnere a tanti Libri, che trattano di queste materie, anche il mio, mostrando, che non vanità mi spinse a scriverne per esser connumerato tra gli Scrittori, ma solo per ajutare quei Giovani, che bramano esercitarsi in quelle materie. Non stimo ora superfluo il por quì sotto la serie degli illustri Uomini, che di queste materie ne' secoli passati scrissero, e per dare ad essi quella lode, che meritano, e proporli ad imitarsi, e per dare una contezza di tutti loro per comune ammaestramento.

Degli Aritmetici, Algebristi, Musici, e Geometri, che sono fioriti in ogni età fino a' nostri tempi.

§. I.

De' Professori di Aritmetica.

LA *Scienza de' Numeri ha un origine anche più antica di quello, che vantano tutte le altre parti, nelle quali si divide la Matematica. Si trova questa coltivata ne i più vicini tempi alla Creazione del Mondo, e l' una, e l' altra Storia sì Sacra, che Profana, ce ne ha serbata la più fedele memoria, e nelle parti che la compongono, e ne i Soggetti, che principalmente la onorano. Da essa intendiamo, che gli Ebrei, e gli Egizj sono stati i primi inventori di questa Scienza; sebbene altri ciò sostengono a favore de' Fenici, e che li Greci, i quali la professarono, dalle dette Nazioni l' appresero, e a tutte le altre la tramandarono. Non è facile riportare con sicurezza i nomi di quegli Ebrei, Egizj, e Fenici, che fiorirono con riputazione in questa Scienza. La distanza di quei tempi da i nostri, la poca sincerità con cui è scritta dagli Autori Profani la loro Storia, ci pone in questa somma necessità di tacere i nomi loro, e ci da luogo ad intraprendere da i Greci la serie de' Professori, e Maestri nostri in questa Parte di Matematica, che poi la proseguiremo con fare onorata menzione di alcuni altri, che colle loro Opere hanno portato lustro, e splendore a diverse Nazioni, e sono rispettati da ognuno di noi, come eccellenti Aritmetici.*

Pittagora più verisimilmente di Samo, che di qualunque altro luogo, nacque nell' anno ultimo della O. LII. o il I. della O. LIII.

O. LIII. Dopo di essere stato da giovanetto discepolo di Talete, passò agli Egizj, quindi a i Caldei, finalmente a i Babilonesi; e da ognuna di queste Nazioni apprese la più scelta erudizione, di cui poi ne arricchì la sua Patria, la sua Nazione, e la nostra Italia, allorchè capitato in Crotona intorno al fine della O. LXVI. ivi aprì pubblicamente Scuola. Egli è il primo de' Greci, che noi sappiamo, che si applicò a discorrere diffusamente de i numeri, ammettendoli come principj di tutte le cose, dimostrandone la loro proprietà, gli accidenti delle varie combinazioni, la perfezione maggiore di alcuni di loro, e l' uso grande, che di essi si poteva fare, applicandogli ad esprimere tutte le cose: in somma la dottrina dei numeri la riguardò come uno de' capi principali, in cui instruiva quanti Uditori da ogni parte concorrevano per ascoltarlo, che non erano meno di 600. in ciascheduna giornata, al riferire di Jamblico. Visse questo Valentuomo fino all' anno IV. della O. LXX. come scrive Eusebio, e di sua età arrivò all' anno 72. Ebbe la di lui Scuola una lunghissima successione, ed è credibile, che ognuno di questi Filosofi coltivasse la dottrina de' numeri; sebbene non si sappia, che un qualcuno di loro ce ne abbia lasciato un trattato prima di Euclide il Geometra.

Euclide viveva a i tempi di Tolomeo Lago, che morì 277. anni avanti Gesù Cristo, dopo un Regno di 40. anni. Chi lo confonde col Megarense discepolo di Socrate, e Principe della Setta Megarica, non è informato del bel genio di lui dolcissimo verso tutti, e benigno, specialmente verso quelli, che si applicavano a gli studj Matematici, niente aspro nel suo trattare, niente arrogante, e non punto amante di contese, come era l' altro, che introdusse nella Filosofia un metodo di filosofare contenzioso, e pungente in guisa, che la sua Setta fu detta Eristica, ed i seguaci di essa si denominarono Eristici, Zetetici, ed Acatalettici, perchè si opponevano sempre al sentimento di tutti gli altri, anche con questo coraggio d' impugnare per fino la verità. Ci restano di questo famoso Uomo gli Elementi Matematici, per ragione de' quali, interrogato da Tolomeo se vi fosse altra strada per avanzarsi nello studio della Geometria, si sa che rispose, che non vi era strada più regia. In XIII. *Libri ristrinse il celebre Autore tutta la Serie delle sue dimostrazioni, e di questi il VII. l'VIII. ed il IX. comprende tutta la dottrina de' numeri. I libri XIV. XV. non sono suo lavoro, ma di Ipsico Alessandrino, e sotto il*

✠ † † 2 *nome*

nome di un tale Autore sono stati posti in luce colla versione latina, e con diversi Comentarj. Vi sono pure di un tale Autore altri XCV. Teoremi Geometrici, che egli intitolò ΔΕΔΟΜΕΝΑ, *e che pubblicò Conrado Dasipodio l' anno* 1571. *col testo greco, e la versione latina, dopo la versione, che ne aveva fatta Bartolommeo Zamberto Veneto nel* 1537. *Scrisse ancora l' Isagoge Armonica, che alcuni l' hanno creduta Opera di Cleonide, Elementi di Ottica, e di Catottrica, e molte altre Opere, delle quali non ci sono rimasti che i soli titoli presso Proclo, e Pappo Alessandrino.*

Nicomaco Geraseno Filosofo Pittagorico ci lasciò in due libri la sua Aritmetica, che Cristiano Wechel la pubblicò l' anno 1538. *e Asclepio Filosofo Tralliano discepolo di Ammonio la comentò. Altri Comenti vi aggiunse Jamblico, nuovi altri ne scrisse Proclo Licio, Gio: Filopono Grammatico Alessandrino, ed Esculapio Filosofo Tralliano.*

Teone di Smirne antichissimo Scrittore, come crede Ismaelle Bullialdo, e che sia quello stesso, che Plutarco lo introduce a disputare delle macchie Solari, e che Tolomeo, il quale fiorì poco dopo i tempi di Antonino Pio, chiamò Matematico, e che Proclo lo credette Filosofo Platonico, scrisse ancor egli un trattato di Aritmetica pubblicato poi dallo stesso Bullialdo. Fu grande il credito, che incontrò, sì per la maniera in cui espose in esso le materie, sì molto più per la scelta Erudizione, con cui lo nobilitò, avendo in esso riportate molte bellissime notizie prese da Filolao, Laso Ermionense, Ippaso Metapontino, Eudosso, Archita, Empedocle, Eratostene, Jerofilo, Timoteo, Evandro, Aristotele, Aristoxeno, Adrasto, Possidonio, e Trasilo, per cagione di cui ci sono esse rimaste, e che in altro modo con molte altre loro Opere si sarebbero perdute. Scrisse pure di questa materia Apollodoro, di cui parla Ateneo nel libro I. e Diogene Laerzio nella Vita di Pittagora, e di Talete: come Teofrasto ci trattò degli Aritmetici, e ci scrisse la Storia della Aritmetica, al riferire di Laerzio, nella di lui Vita. In altri tempi scrissero fra' Greci Anatolio Vescovo di Laodicea, Massimo Epirota, Ipazia figlia di Teone Alessandrino, che fece un Comento alla Aritmetica di Diofanto Proclo di Licia, Michele Psellio, Barlaam Monaco, Massimo Planude, Esculapio Filosofo Tralliano, e Giorgio Pochimeta.

M. Terenzio Varrone nato in Roma l' anno della sua Fondazione 638. *fiorì con riputazione del maggior Letterato de' tem-*

pi

pi suoi, perchè fu Uomo in ogni specie di Letteratura esercitatissimo. Ottenne diversi impieghi nella Repubblica, e nella famosa Guerra Pompejana, per qualche tempo si mantenne parziale a Pompeo, ma poi dedicatosi a Cesare, ebbe da questi l' incumbenza di mettere insieme una scelta Libreria, con far raccolta de' migliori fra i Greci, e Latini Scrittori, e questo impiego gli giovò assai per molte Opere, che in questo tempo compose. Era amicissimo a Cicerone, e tanto bastò, perchè M. Antonio senza riguardo alcuno alla dottrina di Lui, ed alla avanzata età sopra li 70. anni la esiliasse da Roma. Egli veramente non se ne andò, ma in questa occasione patì ben molto nel dissipamento, che vide farsi della sua Libreria, e di buona parte degli scritti suoi. Sopravvisse a queste disgrazie, che gli seguirono l' anno di Roma 710. quasi 20. anni, ed in tutto questo tempo non dimise il suo costume di comporre Opere, le quali crebbero in tanto numero, che nella sua età di 78. anni scrive, che aveva composte 70 settimane di Libri, cioè 490. Libri, e pure non si contentò, perchè già di 80. anni scrisse i tre famosi Libri di Agricoltura, e varie Opere, che poi diede al Pubblico Enrico Stefano, Ausonio Popma, ed altri in diversi tempi, colla aggiunta di preziosi Comenti. In una serie di tanti Libri, vi abbiamo un Trattato particolare sopra i numeri, ed è il primo, che in lingua Latina sia comparso, da che la nostra Scienza passò da i Greci alle altre Nazioni.

L. Appulejo di Madura Città della Affrica, da fanciullo studiò in Cartagine. Col crescere degli anni, riuscì eccellente Oratore, famoso Giureconsulto, e nobile Filosofo Accademico, a cui niente restò incognito in materia di Greca, e di Latina Erudizione. Hanno preteso alcuni, che egli fiorisse a i tempi di Trajano, hanno altri scritto, che viveva a i tempi di Teodosio, ma la verità è, che fioriva nel tempo de' due Fratelli M. Aurelio Antonino il Filosofo, e Vero, come lo manifesta l' Apologia, che egli scrisse in sua difesa, in cui afferma fra le altre cose: che egli perora, e dice sue difese alla presenza di Lolliano Avito, il quale, se si riscontrano i tempi era Prefetto della Bitinia sotto l' Impero de' detti Fratelli M. Aurelio, e Vero. Scrisse molte Opere questo bravo Uomo, che in altri tempi riportarono molto applauso appresso de' Letterati, che si impegnarono di darlè al Pubblico con aggiugnervi i loro Comenti. Vi erano fra queste,

ſte, quanto Egli ſcriſſe ſopra i numeri, ma non abbiamo potuto godere queſta ſua fatica, che le varie vicende de i tempi, e delle coſe ci hanno ſmarrita con molte altre, delle quali ce ne laſciò il Catalogo Dan. Guglielmo Mollero nel §. 28. *di una dotta Diſſertazione, che egli ſtampò nel* 1691. *ſopra Appulejo. Vi è chi penſa che ſi debba a queſto Letterato la precedenza fra i Latini Autori. che hanno ſcritto in Aritmetica.*

Marciano Minejo Felice Capella, ebbe la ſteſſa Patria con Appulejo, ſe crediamo a Caſſiodoro, benchè altri lo credano Cartagineſe, ma non fiorì negli ſteſſi tempi, perchè ſcriveva in Roma la ſua Satira a i tempi di Leone Trace. Divide tutta la ſua Satira in IX. Libri, di queſti gli ultimi VII. comprendono le lodi, ed i precetti di tutte le Arti Liberali, ed il penultimo è quello, in cui ſcriſſe la ſua Aritmetica.

Anicio Manlio Torquato Severino Boezio, fiorì in Roma a i tempi di Teodorico Rè de' Goti; godeva l'onor del Senato, ed era Conſole allorchè queſto Sovrano per mezzo de i ſuoi Miniſtri pretendeva di aſſoggettar Roma al ſuo Impero. Vi reſiſtè dunque coraggioſamente, ma non quanto baſtò, per lo che vedendo la ſua Città ſoffrire le Calamità, che vanno dietro a tali diſgrazie, vedendo che erano ſagrificati al furore de' Nemici i Cittadini migliori, ſi affaccendò per proccurarne da i Greci il rimedio; ma ſcopertoſi queſto ſuo diſegno, fu condannato all'eſilio. Se ne andò dunque in Terra di Lavoro, ed in queſto luogo imprigionato, dopo 6. *meſi per ordine del Re fu fatto morire. In mezzo a queſte ſue miſerie, e fra gli orrori della ſua Carcere, compoſe quel belliſſimo libro, che intitolò* de Conſolatione Philoſophiæ *ſtimato tanto da i Letterati, che molti ſi impegnarono a tradurlo in diverſe Lingue per farlo noto, ſe pur ſi poteva, a tutte le Genti. In lingua Angloſaſſona lo traduſſe con ſua Parafraſi il Rè Elfridio, che viveva prima del* 906. *di Criſto, che poi ſi vidde dato in luce nel* 1698. *da Criſtoforo Rawinſon. Una traduzione Greca ce la laſciò Planude. Un altra Ebraica la fece il R. Samuelle Ben Banichat. In lingua Italiana lo traduſſero Tommaſo Tamburini, e Benedetto Varchi. La traduzione Inghileſe la fece Michele Walpol, e molti altri lo traduſſero in lingua Tedeſca, Fiamminga, Franceſe, e Spagnuola, e tutte queſte Traduzioni comparvero in luce in varj tempi, e con i nomi de i Traduttori, e con diverſi Comenti. Oltre a queſte Opere*
ben

ben altre molte ne ha composte questo celebre Autore in tante altre materie, ed al nostro proposito ha composto due libri di Aritmetica, che gli indirizzò a Patrizio Nimonaco, e non si allontana in essi dagli insegnamenti di Nicomaco Geraseno. Il primo di questi libri in alcune edizioni numera 27. Capitoli, 32. si numerano in altre edizioni, siccome 41. e 54. sono i Capitoli, ne' quali alcune edizioni ci dividono il libro secondo. Adalgado, secondo che scrisse in una sua lettera Lupo di Ferrara, corresse in alcuni luoghi questi due libri, Girardo Ruso li Comentò, e Giacomo Fabbri li Compendiò. Ecco come del merito di questo Autore, parla Cassiodoro in una sua lettera, che scrive al medesimo, e che è registrata la 45. del libro I. della sua Raccolta. Translationibus tuis Pythagoras Musicus, Ptolemæus Astronomus leguntur Italis, Nicomacus Arithmeticus, Geometricus Euclides audiuntur Ausoniis, Plato Theologus, Aristoteles Logicus Quirinali voce disceptant, Mechanicum etiam Archimedem Latialem Siculis reddidisti, & quascumque disciplinas, vel artes fecunda Græcia per singulos viros edidit, te uno Auctore patrio sermone Roma suscepit.

Dopo Uomini tanto celebri nobilitarono la nostra Scienza molti altri, che in diversi tempi scrissero in Aritmetica. Non ci sovvengono tutti i nomi loro per riportarli in questo luogo, ma non per tanto, perchè gli passiamo sotto silenzio essi non si meritano una giusta lode. Questa è dovuta ad essi egualmente, che a quelli, a i quali ora noi la rendiamo, e glie l' hanno già acquistata maggiore di ogni altra le loro Opere, che si sono rese pubbliche per le stampe.

Paolo Giraldo Fiorentino nel 1327. *fioriva con riputazione di eccellente Aritmetico, e ci lasciò sopra questa Scienza un suo Libro; susseguentemente poi scrissero Niccolò Cusano, Giacomo Fabbri, Benedetto Fiorentino, Francesco Caligario o Pelacani, P. M. Bonini anche essi Fiorentini, e Fra Luca del Borgo S. Sepolcro dell' Ordine de' Minori, Oronzio Fineo, Cutberto Tonstallo, Michele Stifelio, Gemma Frisio, Girolamo Cardano, Gio: Bernardo Feliciano, Francesco Maurolico, G. Mersenno, Niccolò Tartaglia, Pietro Ramo, Cristoforo Clavio della Compagnia di Gesù, Simone Stevino, Lazzaro Sconero, Giuseppe Unicorno, Ridolfo a Colen, G. Nepero inventore de' Logaritmi, Pietro Cataldi, Beniamino Orsini, Carlo Malaparte, Gio: Keplero, che scrisse sopra i Logaritmi*

del

del Nepero, con aggiugnervi le dimostrazioni, Enrico Birgio, che la scoperta de Logaritmi perfezionò, e Adriano Wlacq, che ne compose le Tavole. Fiorirono tutti questi Scrittori dal 1327. *fino al* 1648.

Comparvero poi diversi altri Scrittori, che negli intieri loro Corsi di Matematica distintamente trattarono la stessa materia, ed il primo fra tutti si vide nel 1644. *il Corso Matematico di P. Erigonio nel* 1662. *quello di Gaspero Scotto, nel* 1681. *quello di Giona Moore, nel* 1646. *quello di Francesco Vieta, nel* 1665. *quello del Lansbergio, nel* 1674. *quello di F. Miliet Dechales, nel* 1690. *l'altro di Willelmo Leyborn, nel* 1697. *quello di Ozanan, nel* 1707. *quello di Giacomo Taylor, e nel* 1710. *quello di Cristiano Wolfio, oltre tanti altri, che in questi medesimi anni, e ne i seguenti hanno dato in luce Corsi nuovi di Matematica, ne i quali hanno scritto pure di questa nostra Scienza. Una dottissima, ed utilissima Aritmetica pubblicò ancora nel* 1714. *Alessandro della Purificazione, della Famiglia Fantuzzi Fiorentino Ch. Reg. delle Scuole Pie, due altri libri pubblicò nel* 1725. *Adriano Mezio, e nel* 1728. *diversi trattati di Aritmetica diede in luce Alessandro di S. Matteo della Famiglia Grandi Romano Ch. Reg. delle Scuole Pie, e nel* 1739. *comparve l' Aritmetica de Geometri dell' Abbate Didier, e finalmente nel* 1743. *Paolino di S. Giuseppe della Famiglia Cheluzzi di Lucca Ch. Reg. delle Scuole Pie a favore degli Studiosi Giovani di questa Scienza stampò esso ancora una nuova Aritmetica.*

Professori di Analitica, ed Algebra.

§. II.

GLi *Autori, che ora facciamo succedere hanno trattata con una maniera più singolare la Scienza de i Numeri, perchè sono arrivati coll' acutezza del loro ingegno a renderla più universale, e a somministrarci un metodo per giugnere a scoprire dalle cose, che ci son note, un buon numero di quelle molte, che ancora all' intendimento nostro non si appalesano. Il modo con cui essi si sono cimentati a questa impresa, le riflessioni, che opportunamente hanno fatte sopra questa materia, il sistema, l' ordine, i precetti, e tutta quella molta suppellettile, con cui hanno ar-*

ric-

ricchite le Opere loro a bastanza mette in vista, il sommo merito, che si son fatti, e la gloria che hanno acquistata, nella stima che fanno di essi tutti gli Uomini, qualora li riconoscono per una sorte di persone ingegnose assai più delle passate, e per Inventori di una Scienza, che è stata, e sarà sempre in considerazione di utilissima al genere umano. Algebra *è il nome con cui più frequentemente questa Scienza è chiamata. Vi è chi si pensa, che ella sia nata in Oriente, e gli Arabi hanno preteso di essere stati i primi, che l' hanno trattata; onde vantano per Autore di essa Mahomet figlio di Mose, come riferisce il Cardano. Anche gli antichi Persiani rammentano diverse Opere di questa materia, e fra le altre celebrano quelle del loro dotto Coja Nessin. Nientedimeno le relazioni più giuste, dalle quali noi non ci discostiamo, ci persuadono, che Diofanto veramente prima di ogni altro presso i Greci possa chiamarsi il primo Scrittore in questa Scienza, come lo è stato presso di noi Leonardo di Pisa, che fioriva nell' anno* 1400. *di Cristo, sebbene li primi trattati, che in una tale Scienza riportò il Pubblico, sieno stati di Luca Paccioli, o come comunemente si scrive di F. Luca del Borgo S. Sepolcro.*

Non poteva questa nuova, e tanto utile Scienza avere angusti confini, che però al pari delle altre essa ancora si dilatò, e in tempo non molto lungo si familiarizò a diverse Nazioni coll' ajuto delle varie lingue, con cui i di Lei Professori la pubblicarono Araba, Greca, Italiana, Tedesca, Francese, Inglese, Fiamminga, e qualunque altra, perchè fosse meglio accomodata all' altrui intendimento, e perchè riuscisse più aggradevole l' aspetto di Lei ridotto sì familiare.

Ebbe ancora in varj tempi diversi progressi, perchè ne i primi libri, che di essa scrissero il citato Pacioli, Simone Ferrero, Cristoforo Ridolfi, e Rafaelle Bombello, e che comparvero alla luce negli anni 1523. 1545. 1553. 1579. *non si davano superiori notizie, a quelle, che ci insegnavano a maneggiare l' Equazioni semplici, e quadratiche, a risolvere le Cubiche, e ridurre le Biquadratiche.*

In questi tempi, cioè nel 1575. *comparvero la prima volta tradotte in Latino dal Xilandro le Opere non intiere di Diofanto Alessandrino, perchè di XIII. Libri, che dovevano essere, VI. soli ci sono rimasti, e fra le molte altre cose, si riscontrò in essi l' arte di risolvere Problemi Aritmetici indeterminati, la quale*

di che pregio ella sia i dottissimi di lui Comentatori Claudio Gaspero Bachetto, e P. de Fermat lo fecero vedere ne i loro Comenti aggiunti a quest' Opera ristampata in Tolosa l'anno 1670. *come nel* 1671. *lo mostrò G. Kersey; e nel* 1694. *G. Prestet negli Elementi, che stamparono d' Algebra, e finalmente il Leibnitzio nella sua Analisi degli Infiniti.*

Avanzamenti maggiori fece la nostra Scienza negli anni appresso, allorchè presero ad illustrarla nell' Inghilterra Tommaso Ariotto, e nella Francia Renato Cartesio. Ne i libri, che scrissero questi due dottissimi Matematici, non solo lasciarono una Aritmetica literale più perfetta di quella, che già Francesco Vieta nel 1590. *aveva inventata, e di cui aveva fatta l' applicazione alla sua Algebra, che arricchì di un nuovo metodo per estrarre da tutte l' Equazioni le radici per approssimazione, ma in oltre ci scoprirono il modo da tenersi generalmente per risolverere le Equazioni Algebratiche, e di più Cartesio volendo mostrare quanto mai era capace l' intendimento umano ad avvantaggiarsi nelle più sublimi cognizioni coll' ajuto dell' Algebra, intraprese il primo fra tutti ad indagare la natura delle curvelinee, ed a spiegarla coll' ajuto delle Equazioni Algebratiche, ed insegnò come si potessero costruire l' Equazioni Cubiche, le Biquadratiche, e tutte le altre ancora, che fossero state di un ordine superiore.*

Seguirono la scorta de' Matematici quì nominati Guglielmo Oughfrido, Marino Chetaldi, Francesco Schooten, Florimondo de Beaun, Gio. Hudd, Erasmo Bartolini, Gio. de Witt; ed oltre a questi con maggiori acquisti per la nostra Scienza, Comentatori, e seguaci del metodo di Cartesio si manifestarono colle loro dottissime Opere Renato Slusio nel 1668. *Isacco Barrowio nel* 1674. *che maggiormente promosse la dottrina delle Curve linee, e P. de Fermat nel* 1679.

Molti altri Scrittori di Algebra fiorirono in questi tempi medesimi, che non fecero altro, se non che o applicare questa Scienza alla soluzione de' Problemi Geometrici, e alla spiegazione delle Sezioni Coniche, o a facilitare con nuovi metodi le Operazioni nelle scoperte già fatte. Gerardo Kin-Khuysen, che nel 1661. 1663. 1684. *pubblicò gli suoi Scritti Matematici in lingua Fiamminga, Filippo de la Hire, Abramo de Graafh, ed il Marchese dell' Hospitale hanno esattamente sodisfatto alla prima incumbenza, Isacco Neuton, Guglielmo Wiston, G. Gravesand, G. Raphson,*

ed

ed il Rolli si sono applicati all' altro impegno, e vi sono riusciti eccellentemente. Fecero pure altri Matematici servire questa starei per dire Divina Scienza alla soluzione di molti Problemi, che possono farsi in ordine a i giuochi di fortuna, ed i principali fra essi Cristiano Ugenio, Raimondo de Montmort l' uno, e l' altro Bernullio, Giovanni, e Giacomo, il quale altresì alli studj dello Schooten, del Leibnitzio, e del Wallisio aggiunse i suoi fatti sopra le diverse combinazioni, e permute delle cose, e su i fondamenti Analitici gli stabilì.

Avanzatasi dunque con questi progressi in diverse parti di Europa la nostra Scienza, ecco che arrivò all' anno 1684. *in cui acquistò un lustro anche maggiore per la nuova scoperta, che in questo stesso anno pubblicò a i Letterati G. G. Leibnitzio del Calcolo differenziale, ed integrale, che poi ha prodotti tanti vantaggi nella scoperta d' infinite cose state per sempre a i tempi addietro nascoste. Questa è quella scoperta, che ha guadagnato agli studj Matematici Uomini di gran talento, che ci s' interessarono subito per apprenderla, o per promoverla, e per farla servire alle somme di serie infinite, alle quadrature delle Curve, alle duplicazioni de' Solidi; Operazioni tutte, che prima s' intraprendevano con lunghi, e tediosi studj, e regole molto prolisse, quali le riscontriamo, e nel metodo del Cavalerio, e nella Aritmetica degli infiniti di G. Wallisio, e nell' altra di Ismaelle Bullialdo, che pubblicò l' anno* 1682. *Sopra questa scoperta molto si affaticò Isacco Neuton, e molto vi lavorarono i due Fratelli Bernullii, e di essi il minore sopra il Calcolo integrale compose diverse lezioni per profitto del M. dell' Hospitale, il quale poi diede alle stampe nel* 1696. *un dotto libro intitolato l' Analisi degli infinitamente piccoli, in cui egregiamente spiegò la natura del Calcolo differenziale, con tanta sottigliezza d' ingegno, che si meritò il Comento del Varignoni, pubblicato nel* 1715. *e quello del Crouzas, che si vide nel* 1721. *e l' altro dello Stone dato in luce nel* 1730. *coll' aggiunta del Calcolo integrale, del qual Calcolo aveva scritto anche assai bene Gabbriello Manfredi nella sua celebre Opera della Costruzione delle Equazioni differenziali del primo grado, che stampò in Bologna l' anno* 1707.

Nel predetto anno 1684. *in cui il Leibnitzio comunicava al Pubblico il suo ritrovato, David Gregorio, Nipote del famoso Iacopo, che ci scrisse sopra la vera quadratura del Circolo, e della*

Iperbola, fece vedere lo studio da lui fatto sopra lo dottrina delle Serie in una esercitazione Geometrica, che compose intorno alla misura delle Figure. Questo studio notabilmente poi lo promosse Isacco Neuton, quando lo applicò alla Estrazione delle Radici, alla quadratura, ed alla rettificazione delle Curve, Giacomo Bernullio nelle sue Dissertazioni delle Serie Infinite, e Gio: di lui Fratello, il Leibnitzio istesso, e Giorgio Cheine nel suo metodo inverso delle Flussioni. Questo metodo è lo stesso, che il Calcolo differenziale, ed integrale, di cui passò la prima notizia in Inghilterra, quando il Neuton stampò la sua Ottica nel 1704.

Pretese Bernardo Niewentizio nelle sue Considerazioni, che pubblicò l' anno 1694. *far vedere l' insussistenza del Calcolo differenziale del Leibnitzio, onde scrisse, che si sarebbe potuto sostituire ad esso un altro metodo, quale egli sostituì nella sua Analisi degl' infiniti l' anno* 1695. *e si mantenne dello stesso sentimento nelle seconde Considerazioni, che stampò nel* 1696. *Non ebbero molto credito tali Considerazioni, e sodisfecero ad esse sì le risposte, che il Leibnitzio, e Bernullio pubblicarono negl' Atti di Lipsia l' istesso anno* 1695. 1697. *sì le altre, che alle Considerazioni seconde fece Giacomo Ermanno, e che pubblicò in Basilea l' anno* 1700. *e molto ancora ci somministrò Bernardo Fontanelli negli Elementi, che stampò l' anno* 1727. *sopra la Geometria degli infiniti.*

Dopo questi tempi si viddero diversi altri scritti di varj Autori, che promossero viepiù le scoperte già fatte nella nostra Scienza, e le presentarono alla Gioventù studiosa, con metodi o più corti, o più chiari. Nel 1703. *uscirono alla luce gli Elementi d' Algebra di Ozanan. Nel* 1704. *Bernardo Lamy pubblicò i suoi. Nel* 1606. *Guglielmo Jones compendiò tutta la pura Matematica, assieme coll' Algebra, e Calcolo differenziale. Nel* 1708. *Carlo Reynav, secondo il sistema Leibnitziano, diede l' Analisi dimostrata. Nel* 1711. *Gullielmo Jones stampò l' Analisi del Neuton. Nel* 1717. *Jacopo Stirling illustrò il Trattato di Neuton, sopra le linee del terzo Ordine, e nel* 1730. *stampò il metodo Differenziale. Nel* 1718. *Giovanni Graige pubblicò due libri intitolati* de Calculo Fluentium. *Nel* 1726. *stampò la sua Algebra il Crouzas, e nel* 1730. *comparve il dottissimo Comento, che sopra Cartesio compose Claudio Rabuelli della Compagnia di Gesù, come nel* 1731. *Francesco Xaverio Brunetti stampò il suo Trattato della Aritmetica Comune, e Speciosa.*

Nel

Nel 1738. *Paolino Cheluzzi delle Scuole Pie, Professore di Eloquenza nell' Archiginnasio Romano, pubblicò le Instituzioni Analitiche a vantaggio della studiosa Gioventù, mostrò l' uso di esse nella Geometrìa, e vi aggiunse la costruzione de i Problemi de' Solidi. In XII. Capitoli distribuì la materia di tutta l' Opera, in cui la brevità non si vede disgiunta dalla chiarezza, e dal buon ordine, che però da quella, e da questo viene a riceverne il più bel pregio. Gli esempj, che sparsi sono in buon numero, contribuiscono assai bene al disegno dell' Autore, perchè facilitano l' intelligenza delle Dottrine, ed allettano colla loro vaghezza, e risvegliano la curiosità in chi li legge di riscontrare quel vero, che col loro mezzo si cerca, e se si sia approfittato delle regole stabilite per la pratica delle Operazioni.*

Nel 1739. *comparve il primo Tomo delle Opere dell' Abbate Didier, intitolato Aritmetica de' Geometri, diviso in V. Parti, tutte destinate a spiegare la Teoria, e la pratica degli Aritmetici: contiene una introduzione all' Algebra, ed all' Analisi, colla resoluzione dell' Equazioni del secondo, e del terzo grado, le Ragioni, Proporzioni, e Progressioni Aritmetiche, e Geometriche, le Combinazioni, l' Aritmetica degl' infiniti, gli Logaritmi, e le Frazioni Decimali, sicchè il solo titolo di tante materie, a bastanza fa conoscere il pregio dell' Opera, ed il sommo utile, che può riportare chi si sia, che si applichi a leggerla con attenzione. Negli altri Tomi fa vedere l' applicazione di questa Scienza alla Geometria; ed in un Tomo a parte propone ad esaminare acutamente la Scienza del Calcolo differenziale, ed integrale. In somma ha scritto il Didier in tali materie con tale aggiustatezza, chiarezza, e buon metodo, che può annoverarsi fra i più Celebri Scrittori di tali materie, da i quali la nostra Scienza ha ricevuto molto lustro, e splendore.*

Ancora nel 1744. *si vide alle stampe il dotto libro di Leonardo Eulero, in cui è promossa notabilmente la Scienza delle linee Curve, col nuovo metodo, che in esso s' introduce per ritrovare quelle, che godono delle proprietà de' massimi, e minimi, come finalmente nel* 1746. *M. de la Chapelle presentò al pubblico li suoi studj Analitici, nel libro che intitolò Instituzioni di Geometria.*

§. III.

§. III.

Degli Scrittori di Musica.

Come di una Scienza subordinata all' Aritmetica hanno parlato della Musica tutti i più eccellenti Scrittori, che di essa ci composero diversi trattati. Ella considera i numeri, e gli risguarda come canori, ed armonici, e di essi come tali se ne forma una soggetta materia. Il Canto si avanza secondo il numero, e le modulazioni della voce sono i numeri, in qanto che non solo in qualunque specie di Canto si notano diversi gradi di acutezza, e di gravità, e ad ognuno di questi varj tempi si danno, ma in oltre, perchè nel Canto, che si dice composto, e nella stessa Armonia si ha riguardo ad una particolare ragione, e proporzione, che si manifesta co' numeri, e tale proporzione produce la stessa Armonia, e Consonanza, e il difetto di lei è la dissonanza medesima. Di questa proporzione abbiamo discorso in un intero Capitolo, che è il VII. *del* II. *Trattato, onde non è fuor di proposito nel presente luogo fare onorata menzione di quei valenti Maestri, che ci hanno lasciati precetti in una Scienza sì ragguardevole.*

Il più antico Scrittore in questa Scienza è considerato da Suida Laso da Ermione città dell' Acaja, fiorì egli non nella O. VIII. ma nella LVIII. se è vera la testimonianza, che di se ci lascia, dove scrive, che viveva a i tempi di Dario Istaspe. Alcuni lo pongono fra' VII. Sapienti, e gli danno il luogo di Periandro.

Sul fine del Regno di questo Dario fioriva Pittagora il secondo, che insegnò precetti di Musica, vi è chi crede, che questo fosse il Zacinthio, ma con più verisimilitudine si crede l' institutore della Setta Italica.

Intorno alla O. LXXX. fioriva Damone, che fu Maestro di Musica a Socrate, lo confondono alcuni coll' Oratore, che a se fece venire Alessandro Magno, ma questi è il Discepolo di Agatocle, e Maestro pure di Pericle.

Fioriva ancora nella O. C. Democrito di Abdera, che siccome di molte Scienze lasciò dottissimi monumenti, così scrisse pure diversi Libri di Musica.

Fiorirono susseguentemente, o quasi negli stessi tempi, o poco pri-

prima Agenore di Mitilene, Eratocle, ed Epigono Ambraciota, e cominciò sotto tali Maestri a vedersi questa Scienza divisa per varie Sette, denominate da' loro Autori Agenoria, Eratoclea, Epigonia.

Fiorirono pure Lampridio di Eritra, Xenofilo Pittagorico, Simia Tebano, Diocle, Simone Ateniese. Fiorirono diversi altri, ma il vanto maggiore lo riportò Aristoxeno di Taranto, che fu creduto uno de' più famosi Scrittori in questa Scienza, perchè più di tutti gli altri sopra vi lavorò, e vi fissò un sistema. Egli la imparò prima da Spintaro suo Padre, poi da i nominati già Lampridio, e Xenofilo; fioriva intorno alla O. CX. A lui dobbiamo gli Elementi di questa Scienza in tre Libri, de' quali fanno onorata menzione Euclide, Ateneo, Aristide, e Tolomeo, il quale però nella sua Musica di tanto in tanto rigetta le di lui opinioni, ed è stato cagione, che Boezio abbia fatto lo stesso ne i suoi Libri, che ha comqosti di Musica. Antistene Principe della Setta Cinica, Dicearco Messenio, Didimo Pittagorico, Epicuro, Euclide, Nicomaco Geraseno, Claudio Tolomeo, Teofrasto, Trafillo, Eraclide Pontico, Adrasto Peripatetico, Archita di Taranto, Panuzio Juniore, Filolao Pittagorico, Fillide di Delo, Porfirio, Plutarco, Psello, tutti hanno composti Trattati su questa Scienza. Ha scritto pure in questa materia Dionisio d' Alicarnasso il giovane, Eratostene nominato da Teone, questo è quel Teone di Smirne, che viveva fra l' anno dell' Era Cristiana XX. e CXL. come scrive Bullialdo, e che disapprovò diversi sentimenti di Aristoxeno, e scoperse i di lui errori in ordine alla divisione del Tono.

Aristide Quintiliano, che secondo il Meibonio scriveva avanti Tolomeo, ci lasciò egli pure in tre Libri compilato tutto il più bello, che conteneva questa Scienza delle Opere de' più famosi Musici dell' età trapassate. Bacchio Aristoxeno trattò esso ancora l' argomento medesimo, e la di lui Opera la pubblicò tradotta in Latino colle altre di Emanuelle Briennio, di Aristide Quintiliano, e di Gaudenzio Francesco Gafurio, ed il Meibonio la diede al pubblico, come fu scritta dal suo Autore, solo gli aggiunse la sua versione colle note l' anno 1652.

Di Gaudenzio, e di Emanuelle Briennio, oltre la testimonianza del Gafurio abbiamo quella degli altri, e della Introduzione Armonica composta dal primo, parla con molta lode Cassio-

doro

doro Senatore Romano, ed unicamente non si fida di fermare il tempo, in cui esso fiorì. Dell' altro poi, che fioriva sotto il vecchio Paleologo, cioè l' anno di Cristo 1320. *ne parla il Meibonio, e G. Wallisio, che nel terzo Tomo delle sue Opere stampate l' anno* 1699. *trascrive anco quella, che fece un tale Autore, e aggiugne la versione Latina.*

Fra i Latini hanno trattato questo argomento Varrone, Albino Apulejo, Marciano Interpetre di Gaudenzio, Marciano Capella, Boezio Cassiodoro, &c. a' quali tutti si potranno aggiugnere R. Cartesio, Pietro Gassendo, G. Keplero, Francesco Salinati, Giuseppe Zarlini, e Vincenzio Galilei, che in cinque bellissimi Dialoghi Toscani ha trattato di tutta la Musica antica, e di quella de' tempi suoi con questo encomio, che ad esso fa Giuseppe Blancani, cioè, che egli ha composto un opera necessarissima, perchè si corregga la Musica, che a quei tempi fioriva, ed utilissima perchè si rimoderni l' antica. Marino Mersenno lo cita ne' suoi quattro Libri Armonici, che pubblicò in Parigi l'anno 1644. *meritevoli ancora essi di giusta lode, e di essere letti senza rincrescimento. Dopo questi hanno scritto sullo stesso soggetto Alberto Bannio, Erasmo Oricio, il Doni, il Bruncbero, il Wallisio, il Sig. de Cottignez, Atanasio Kirchero, Giacomo de Bylli, e molti altri.*

§. IV.

Degli Scrittori di Geometria.

Si maravigliano alcuni, che una Scienza vastissima, e nobilissima, quale è la Scienza delle Figure, abbia da denominarsi Geometria, *voce, che unicamente è adoprata per voler significare* Misura della Terra, *quando ora mai si sa, che col mezzo di questa Scienza si sottopongono alle misure quegli spazj tutti, fra' quali si trova rinchiuso il Mare, che sono riempiuti d' aria, e che il vasto Mondo contengono. Poco però ci ha da premere questa loro maraviglia, nè perchè essi chiamino ridicolo un nome tale come lo dice Platone, o senza Criterio applicato a questa Scienza, come scrisse Niccodemo Frisolino, non abbiamo da disprezzarlo noi, se già sappiamo, che i più savj di tutta l' antichità lo hanno sempre posto in frante alle loro Opere, che sopra una*

tale

tale Scienza ci scrissero. Molto meno dobbiamo noi voler pensare alla maniera d' alcuni, i quali insinuano, che lo studio di questa Scienza si faccia prima di applicarsi ad apprendere l' Aritmetica, e l' Algebra, ma questo giudichiamo a favore di chi ha in pensiero di diventare eccellente Geometra, che contribuirà molto al suo intento lo studio dell' Aritmetica, ed Algebra, preferito a quello della Geometria, se non per altro per questo motivo almeno, che considerando la Geometria qualunque sorte di quantità, questa considerazione in gran parte dipende da' numeri, e quanto in essa vi è di astruso, e difficile, che voglia in noi acutezza d' ingegno, e sottigliezza, tutto ciò è effetto di quel l' ordine, rispetto, ed abitudine, o ragione, che si riconosce ne i numeri. Ma non abbiamo quì noi questo impegno di far vedere una tal cosa, che copiosamente l' ha dimostrata Scaligero in una delle sue esercitazioni, che è la 321. unicamente dobbiamo riferire in succinto quali sono quegli Autori, leggendo i quali può molto approfittare chi desidera divenire bravo Geometra.

Che la Geometria sia derivata dagli Egiziani, non si pone in dubbio da' Savj. La necessità gli costrinse ad essere Geometri, perchè premeva ad ognuno di loro il riconoscere i termini delle proprie possessioni, che il Nilo traboccchevolmente cresciuto in qualunque anno li confondeva sotto uno universale allagamento. Non abbiamo nella Storia fedelmente nominati quelli, che fiorirono li più bravi in questa Scienza fra loro, solo i più onesti, fra quei Greci, che hanno voluto lasciare una grata riconoscenza dell' animo loro alla nazione, da cui appresero questa Scienza, scrissero, che l' avevano appresa da i Sacerdoti Egiziani, da che si rileva, che sebbene questo studio era sì universale nell' Egitto, che ogni Persona anche rustica non lo trascurava, nientedimeno un ordine particolare di persone lo coltivava con più esattezza, e questo lo componevano i Sacerdoti. Non prima di Talete, e di Pittagora vide mai la Grecia i Geometri, ma qual de i due il primo fosse, non sono d' accordo gli Autori in definirlo; dunque dal tempo, in cui fiorirono questi due grandi Uomini, cominciò nella Grecia a fiorire lo studio della Geometria, che poi si avanzò a tal segno, che parve, che la sola Grecia generasse i Geometri. Un buon numero de' migliori fra questi ce lo descrive Proclo nel libro 2. de' suoi Comentarj agli Elementi di Euclide, e sono dopo Pittagora, Anassagora Clazomenio, Enipode

Chio, Teodoro di Cirene, Ippocrate Chio, Platone, Leodamante, Archita di Taranto, Teeteto Ateniese, Neoclide, ed il di lui discepolo Leone, Eudosso Gnidio, Amicla di Eraclea, Menechmo, e il di lui fratello Dinostrato discepolo di Eudosso, Teudio Magnete, Cizicino Ateniese, Ermotimo di Colofone, e Filippo di Mende. Poteva Proclo aggiugnere a tutti questi Aristeo il vecchio, di cui fa menzione Pappo, come di un insigne Geometra, che lo prese a seguitare Euclide in quello, che scrisse delle Sezioni Coniche, e similmente poteva nominare Aristotele, di cui abbiamo un Libro, che lo intitolò Matematico. *Democrito ancora merita fra questi il suo luogo, Brisone, Antifo, ed Eraclide Pontico, perchè tutti composero sulla medesima Scienza diversi Trattati.*

Se nessuno però fra' Greci fu eccellente Geometra, si meritò questo bel pregio Euclide, di cui già abbiamo parlato, perchè fu il primo, che di tutti gli scritti loro ci fece una fedele raccolta, e con buon metodo, e singolare chiarezza ci distese quello aureo volume degli Elementi Matematici, in cui tutta pose in vista quella materia, che doveva essere considerata, ed appresa bene da chi pretendeva introdursi ne' Geometrici Studj, con intenzione di proseguirgli colla intelligenza delle altre parti di Matematica. In questo volume è dove ci mostra la divisione della Geometria in due parti, che la prima, perchè destinata a spiegare la proprietà delle figure la chiama Geometria Piana, e l' altra l' intitola Stereometria, perchè esamina i Corpi, e misura la loro solidità. In questo Volume medesimo propone la dottrina de i numeri, come già abbiam detto per la coerenza grande, che passa fra le ragioni di questi, e di ogni altra grandezza, che è Soggetto universale delle Matematiche, a cui si subordina qualunque altro particolare. Oltre a questi Elementi, ha composto diverse altre materie Geometriche, ed in quattro Libri ha data la notizia de' Coni. Non è così facile ridire il sommo credito, che apportò al suo Autore una tale Opera. I molti di lei Comentatori, le frequenti edizioni lo mostrano a bastanza, e l' uso, che di essa fanno quasi tutte le Scuole, e quei Scrittori, che ci hanno lasciato altri Elementi di Geometria, giacchè tutti in un Opera tanto insigne hanno preso quello, che ha potuto arricchire la loro, e renderla più singolare. Si sarebbe potuto desiderare nell' Opera di Euclide la dimensione del Circolo, della Sfera, del Cilindro, o quella parte di Geometria, che è chiamata la più sublimi-

blime; ma queste cognizioni furono riserbate ad altri tempi, e ad altri Ingegni, che dopo il nostro Euclide fiorirono.

Appollonio Pergeo, che ne' tempi di Tolomeo Evergete si rendeva famoso per i suoi Matematici Studj, che gli acquistarono il nome di Geometra il Grande, *per compiacere a Naucrate compose in otto Libri la Dottrina de' Coni, che aveva appresa dal suo Maestro Euclide. Parla Eutocio de' primi quattro col titolo di Sezioni Coniche. Di questi i primi tre gli dedicò Appollonio ad Eudemo di Pergamo, e gli altri tutti ad Atalo. Nel Comento di questi Libri scritti in lingua Araba molti vi affaticarono, sì degli antichi, che de' moderni. Eutocio fece il suo Comento Greco a' primi quattro, Gio: Batista Memmio patrizio Veneto nel* 1565. *gli tradusse in Latino, sebbene con non molta esattezza, al qual difetto supplì il dottissimo Commandino, quando intraprese di essi una nuova traduzione, e vi aggiunse il suo Comento con i Lemmi di Pappo Alessandrino, e la traduzione del Comento di Eutocio. Marino Mersenno ne fece esso pure una traduzione Latina, a cui unì due Libri di Sereno Ateniese della Sezione del Cilindro, e del Cono, scritta a Ciro suo amico. Del V. VI. e VII. Libro di Appollonio non abbiamo, che una traduzione Araba, fatta da Abbalphat figlio di Maometto Ispahan, che capitò nelle mani di Abramo Ecchellense. Questi coll' aiuto di G. Alfonso Borelli la tradusse in Latino, e comparve stampata con i Comenti dello stesso Borelli in Firenze l' anno* 1659. *coll' aggiunta, che al Libro V. vi pose Vincenzio Viviani col titolo* Divinazione Geometrica. *Si ristampò di bel nuovo nel* 1701. *e questa seconda edizione lo stesso Viviani l' accrebbe della seconda Divinazione Geometrica de' luoghi solidi sopra i cinque Libri del vecchio Aristeo Geometra.*

Archimede di Siracusa fu uomo di lignaggio nobilissimo, amico, e cognato del Re Gerone, e di grande scienza, per essere egli riuscito eccellente Geometra, e Mecanico acutissimo. Cessò di vivere nella O. CXLII, passato l' anno LXX. della sua età. Egli ha scritto molte Opere. A Dositeo scrisse il Libro, in cui tratta della Sfera, e del Cilindro, allo stesso indirizza quanto scrive delle Figure, delle Conoidi ottuse, delle Sferoidi, della quadratura della Parabola, e delle Linee Spirali, ed in questo ultimo Libro dimostra molti Teoremi non spiegati da Conone suo intrinseco amico. Questo è quel Conone di Samio coetaneo di

Arato, e Manetone, che ritrovò la Spirale diversa da quella di Dinostrato, che poi Nicomede, ed Ippia illustrarono, ed in tanto la gloria di questo ritrovato comunemente, si attribuisce ad Archimede, perchè egli fu, che colle sue dotte riflessioni, e dimostrazioni delle di lei proprietà, maravigliosamente la coltivò. Al Re Gerone scrisse sopra il numero dell' Arena, ed Eutocio col suo Comento ci illustrò i due Libri, che aveva scritti sopra il Centro de' Corpi piani, come ci lasciò tradotti col suo Comento Federigo Commandino Urbinate i due Libri de' Galleggianti. Diverse altre Opere compose Archimede, che le riporta il Fabricio nel Libro 3. della sua Greca Biblioteca.

Coetaneo ad Archimede era Ateneo Discepolo di Appollonio Pergeo, che nella O. CXLII. scrisse un Libro a M. Marcello, che prese Siracusa, ed in esso trattava delle Macchine da Guerra. Egli lasciò onorata menzione di Agesistrato, come di eccellente Mecanico, che per tale lo loda ancora Vitruvio, di Appollonio suo Maestro, di Callistrato, e di Ctesibio Ascreno Mecanico in Alessandria, e Maestro di Erone; parla ancora di Stratone di Estio, di Archita, di Aristotele, di Calano Indiano, e di altri.

Eratostene di Cirene fiorì in questi tempi medesimi, egli fu chiamato un altro Platone per la molta sua dottrina, e per la grande perizia nelle Matematiche discipline. Tolomeo l' Evergete lo fece Custode della famosa Librerìa in Alessandria, e si mantenne in quell' impiego per tutto il Regno di Filopatore fino al decimo, e duodecimo anno di Tolomeo Epifane. Moltissime Opere Matematiche egli compose, delle quali ce ne lasciò un Indice copioso il lodato Fabricio nella sua Biblioteca Greca, ma non ci sono rimaste di lui, che poche cose, che ci hanno riportate diversi Scrittori, egli trovò il primo di tutti la duplicazione del Cubo, la di cui memoria volle appesa nel tempo all' uso di un Voto.

Erone Alessandrino fioriva anch' esso a i tempi di Tolomeo Filadelfio, e dell' Evergeta, Matematico molto eccellente, Autore di molte Opere, una buona parte perdute. Fiorì un altro Matematico di questo nome intorno al 450. di Cristo, che fu Maestro di Proclo, ed un altro, che fu bravo Astronomo a i tempi dell' Imperatore Eraclio.

Ipsiclo Alessandrino, che si crede Autore del Libro XIV. e XV. degli Elementi di Euclide, fu discepolo di Isidoro chiamato

per

per sopraunome il Grande, e da questo egli si protesta di avere appreso ciò, che egli ha scritto sopra l' inclinazione de' Corpi regolari; viveva un secolo intero prima della Nascita del Signore.

Intorno alla O. CLXXVIII. a i tempi di Cicerone, e Cesare fiorì Gemino di Rodi, diverso senza alcun dubbio da quello, che da alcuni si crede, che Proclo chiami suo Maestro, mentre Proclo fioriva intorno all' anno D. di Cristo, che però non senza errore Enrico Bruceo lo fa vivere dopo Pappo Alessandrino, come ancora malamente Giuseppe Blancano nella sua Matematica Cronologia lo enumera fra quei Matematici. che fiorirono nel quarto secolo dopo la Nascita del Signore. Egli scrisse sopra l' origine delle Linee Spirali, Concoidali, e Cissoidali, e trattò della loro proprietà.

Ne' tempi stessi fu molto celebre il nome di Teodosio Triplita, diverso da Teodosio di Bitinia, che Vitruvio, e Strabone celebrano per inventore dell' Orologio Solare adattabile a qualunque Clima. Di lui ci sono rimasti fra le altre cose tre Libri sopra la Proprietà del Circolo, e della Sfera, da' quali molto presero Tolomeo, Pappo, Teone, e Vitellione, ancorchè questo ultimo si sia sempre astenuto dal nominarlo. Di questi Libri fecero gran conto gli Scrittori Arabi, e gli vollero tradurre nella loro lingua, sebbene con poca esattezza.

Menelao Alessandrino, che Tolomeo lo chiama Geometra, fioriva sotto l' Impero di Trajano, e del suo Predecessore, cioè intorno agli anni di Cristo CX. e C. diede tre Libri di dimostrazioni sopra la Sfera, che il Mersenno pubblicò con sua traduzione Latina l' anno 1644.

Fra il secondo, ed il terzo secolo dopo la Nascita del Signore fiorì Diocle, quello che insegnò il modo di trovare due medie proporzionali fra due estreme, e il modo di segare la Sfera nella data ragione.

Pappo Alessandrino, e Teone due insigni Geometri dell' età loro fiorivano a i tempi del grande Imperatore Teodosio. Il primo è Autore di VIII. Libri di Collazioni Matematiche, de' quali però i due primi si sono perduti. La prima volta comparvero alla luce i rimanenti VI. in Pesaro l' anno 1588. *colla traduzione, illustrazione, e Comenti del Commandino, per la somma liberalità di Francesco II. Duca di Urbino. Dell' altro poi, cioè di Teone, hanno scritto alcuni, che sia stato l' Autore delle Dimo-*

mostrazioni alle Conclusioni di Euclide con poco fondamento però, attesochè Proclo, Boezio, ed Alessandro Afrodiseo, che fiorì prima di Teone, riportano molti passi, tali, e quali si leggono in Euclide. Si può bene asserire, che l' Opera di Euclide ricevè maggiore splendore dallo studio di questo Autore, perchè in fatti ne illustrò una edizione, che di essa fece, con avergli dato un miglior metodo, e con averla arricchita di molte aggiunte. Figlia di questo gran Geometra fu Ippazia, donna di un talento rarissimo, e molto adattato alla Scienza, che ella apprese, essendo riuscita a maraviglia dottissima. Apprese la Filosofia Platonica, ed il di lei Maestro fu Plotino, a cui poi succedè nella Scuola. Questa ancora fece spiccare il suo sapere nelle Matematiche nel dotto Comento, che ci lasciò sopra Appollonio.

Filone Tianense, e Nicomede fiorirono essi ancora in questi tempi con molta riputazione di bravi Geometri. L' uno, e l' altro è citato da Eutocio nel secondo Libro de' suoi Comenti sopra Archimede, e del secondo ne fa menzione ancora Proclo. Questo è quel Proclo di Diadocopoli celebre già per il dottissimo Comento, che di lui abbiamo sopra il primo Libro degli Elementi di Euclide. Fioriva nel 500. an. di Cristo.

Eutocio Ascalonita discepolo di Isiodoro il Meccanico, fioriva intorno al secolo di Cristo. Compose Comenti sopra l' Opera di Archimede della Sfera, e Cilindro, e la dedicò ad Ammonio. Egli è, che ci fa ricordanza di dodici illustri Matematici, che tutti s' impegnarono a dare la soluzione al famoso Problema della duplicazione del Cubo. Sono questi Matematici Platone, Erone, Filone di Bizanzio, Appollonio Pergeo, Diocle, Pappo, Sporone, Menecmo, Archita, Eudosso, Eratostene, e Nicomede.

Sotto questi, e molti altri Maestri fino a i descritti tempi si avanzò lo studio della Geometria, e si videro aggiunte quelle cognizioni, delle quali erano mancanti le antichissime Opere de i primi Greci, che adornarono co i loro studj questa parte di Matematica. Quanto però questo lustro, e splendore lo abbiano accresciuto i Latini Scrittori, e quelli, che in varie Nazioni di Europa si sono applicati a professare la stessa Scienza, chi è, che non sia capace di riconoscerlo dalla lettura se vorrà intraprenderla delle loro Opere, che in molto numero sono comparse fino a i dì nostri? Si meritano per tanto di ricevere questa lode di essere stati eccellenti promotori degli acquisti, che ha fatti la Geometria, tutti

gli

gli Autori, che già nel decorso di questa breve Istoria abbiamo nominati di diverse Nazioni, mentre ognuno di loro si è affaticato per farla comparire più ricca di quello ella fosse quando erano soli i Greci a coltivarla. Cresce anche più il merito della loro giusta lode dalle Opere di tanti altri, che eccitati dal loro Esempio si sono impegnati ne i stessi studj con frutto considerabile di più numerose scoperte. La scelta che quì facciamo di alcuni fra tanti, giacchè la brevità, che ci siamo prefissa, ci toglie il nominarli tutti, ha in mira unicamente di proporre ad un Giovane quali sono questi Autori, che potrà leggere, perchè arrivi esso ancora dove giunsero quelli a procurare una estensione maggiore di gloria, ed un maggiore imperio alla più bella, alla più certa fra tutte le Scienze, ed alla utilissima Geometria.

E per procedere con quel metodo, che ci divide la Geometria in Elementare, ed in più sublime per riferire gli Autori, che hanno coltivata l' una, e l' altra. Primieramente nominiamo quelli, che nello scrivere gli Elementi Geometrici seguitarono il sistema di Euclide nella loro Geometria. Niccolò Tartaglia, Francesco Flussati Candalla, Federigo Commandino, Cristoforo Clavio della Compagnia di Gesù, Claudio Francesco Milliet Dechales della medesima Compagnia, Pietro Erigoni, Isacco Barrovio, non si sono niente allontanati da Euclide; sicchè presso di questi Autori si trovano gli Elementi intieri di quel Geometra proposti, e spiegati, o con maggior chiarezza, o con dimostrazioni più certe, o con prolisso comento, o con piccolo accrescimento di nuove conclusioni derivato dalle premesse stabilite, e dimostrate da Euclide. Alcuni altri poi si contentarono pensando di giovar meglio al profitto della Gioventù, di tutti li XV. libri di Euclide, trascriverne soli VI. ed illustrarli colle loro spiegazioni, e fra gli altri Oronzio Fineo, Giacomo Pelicano, Giovanni Scheubelio, Cristiano Erlino, Corrado Dasipodio, eseguirono un tal consiglio, a cui si appresero egualmente Andrea Tacquet, Vincenzio Viviani, Bernardo Lamy, Gio: Keil, i quali però a VI. libri degli Eelementi di Euclide, aggiunsero gli altri due ne' quali egli spiega la dottrina de' Solidi. A i tempi nostri Pietro Polinier nella sua Geometria, ha trascritte tutte le Conclusioni di Euclide, ma le ha distribuite con diverso ordine, e alla maggior parte vi ha poste le sue dimostrazioni. Quest' ordine pure lo aveva variato Angelo Marchetti, ed in oltre nel suo Euclide riformato levò molte Proposizioni di Euclide,

per-

perchè le giudicò poco utili, e poco necessarie a saperſi. Hanno poi estremamente facilitato lo studio degli Elementi di Geometria, Cristiano Wolfio, Guido Grandi, Odoardo Corſini, sì per cagione del metodo con cui procedono, sì per la chiarezza, e brevità, con cui dimostrano le loro Concluſioni, laonde la Gioventù studioſa degli Elementi, che ad eſſa eſibiſcono questi dotti Scrittori, può molto approfittare ſe vi ſi voglia applicare.

Nelle Iuſtituzioni Matematiche del Corſini ancora ritroverà questo vantaggio, che ſarà di potere apprendere per mezzo loro alcune Dimostrazioni più ſcelte di Pappo Aleſſandrino, di Sereno, del Torricelli, e molte di quelle, che Archimede dimostrò nel ſuo rinomatiſſimo Libro della Sfera, e del Cilindro.

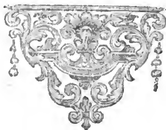
Promoſſero gli studj di Archimede Gio: Keplero nella ſua nuova Stereometria, ed Evangelista Torricelli nelle ſue Opere Geometriche de i Solidi Sferali, del moto, della dimenſione della Parabola, del Solido Iperbolico &c. che comparvero stampate in Firenze l' anno 1644. ed Iſacco Barrovio fatte di eſſe una raccolta le unì a i libri Conici di Appolonio, a Sferici di Teodoſio, e le pubblicò in Londra l' anno 1675. fra queste però non ſi vede l' Arenario, *che ſi trova nella ſeconda edizione fatta in Palermo l' anno 1685. e in altre. Questi ſono stati fra i moderni Profeſſori di Geometria, quelli, che hanno cominciato ad illustrare co i loro ſcritti la parte di Lei più ſublime, animati dal grande Archimede, ma non riuſcirono meno animoſi di loro questi altri, che hanno coltivata a' dì nostri la dottrina delle Sezioni Coniche. Dopo il famoſo Appolonio nominiamo fra i principali Claudio Midorgio, Gregorio da S. Vincenzio, Filippo de la Hire, il Conte Pagani, Iſmaelle Bullialdo, Franceſco a Schoten, Alfonſo Borelli, Giacomo Milnes, Vincenzio Viviani, Guido Grandi, Niccolò Martini, e Odoardo Corſini, che dà compimento alle ſue Matematiche Iuſtituzioni, con due libri di Sezioni Coniche industrioſamente lavorati con perſpicuità ſomma, e buon ordine, e con una ſcelta delle più belle Dimostrazioni, che facilitano l' intelligenza di diverſi trattati di Fiſica.*

Avanzamenti nobiliſſimi fece in questa occaſione la Geometria trattata da questi valenti Matematici, perchè fu la steſſa coſa l' applicarſi eſſi alla ſoluzione de' Problemi, che derivavano dalla ſpeculazione ſopra le principali Curve Coniche, e l' avvederſi della neceſſità di un nuovo Calcolo, indicato di paſſaggio dal Keplero

plero nella sua Stereometria, in cui si dovevano supporre quantità infinitamente piccole; che però se un tal Calcolo è stato già inventato, questo nobilissimo acquisto lo dobbiamo alle fatiche del Celebre Bonaventura Cavalerio, che con molta sua fatica ha trovato il metodo degli indivisibili, e lo ha spiegato in quel famoso libro, che egli compose intitolato la Geometria degli indivisibili, *illustrato poi copiosamente dal Marchese Stefano de Angelis, e dal citato Gregorio da S Vincenzio, e poi da tutti li Scrittori Analitici, che lo trasmutarono nelle Serie infinite delle quantità fatte, o col mezzo della divisione, come la fece il Mercatore, o per l'estrazione delle radici nel modo, che il Neuton la insegnò, ed ognuno sà con qual vantaggio della sublime Geometria nella soluzione de i suoi Problemi, la quale niente di meno allorchè l'intraprese il celebre Lorenzo Lorenzini discepolo del Viviani, volle perfezionarla per via di dimostrazione, secondo il metodo antico, come si vede nella esercitazione Geometrica, che in Firenze stampò l'anno* 1721.

Non poteva una sì interessante speculazione non aprire nuovi aditi a più sublimi ricerche. Queste si fecero, e ne risultò un acquisto ben grande allo studio della Geometria, e tanto più ragguardevole, quanto fu più sublime l'impresa, e fortunata, sì la scoperta di molte Curve non mai per l'avanti conosciute, sì la dimostrazione delle loro maravigliose proprietà, sì la soluzione di tanti Problemi, che le medesime somministrarono. E' vero certamente, che gli antichi Matematici si applicarono a questa impresa, e perciò non abbiamo lasciato senza lode, chi per trovare due medie proporzionali continuamente a due altre preparò la Concoide, e la Cissoide Nicomede, e Diocle, e chi inventò la Spirale, e la Quadratica Archimede, e Dinostrato per avere la quadratura del Cerchio: ma quante ancora di vantaggio ne hanno trovate i moderni Geometri applicati a questa medesima impresa meritevolissimi però di ogni encomio? Ad essi dobbiamo la Logaritmica, e la Cicloide, la Logistica Spirale, l'Epicicloide, la Catenaria, la Loxodromica, e quante altre fino a i dì nostri scoprirono Galileo Galilei, Evangelista Torricelli, G. G. Leibnitzio, Giovanni, e Giacomo Bernullii, Cristiano Ugenio, G. F. Hospital, Ehetenfrido Walthero de Tschirnhausen, il Stirlingio, il Varignoni, Renato Francesco Slusio, Francesco a Schooten, Antonio Lalovera della Compagnia di Gesù, Ferdinando Ernesto Con-

te d' Herberstein, Giov. Wallisio, Isacco Barrovio, Villebrardo Snellio, Gio: Cray, ed il Marchese Giovanni Poleni Matematici tutti celebratissimi de i nostri tempi, con quanti altri ci hanno preparati intieri corsi di Matematica. Sarebbe un non volere mai porre termine a questa nostra compendiosa Storia Geometrica, se si dovesse proseguire il numero di tanti altri famosi Uomini, che questa parte di Matematica copiosamente adornarono. Si siamo già protestati, che il nostro silenzio non ha da detrarre punto al sommo merito loro, sicchè condoneranno a noi quella colpa leggiera, che commettiamo in non rammentarli, derivata dall' impegno in cui siamo di non uscire da' termini di un breve compendio. Che del resto essendo già noti i nomi loro, per le belle Opere, che hanno date in luce, da quelle una lode riporteranno più soda, e più permanente, che dalla tenue nostra commendazione, che in averli rammentati sarebbe potuta ad essi derivare.



LA



LA SCIENZA DELLE GRANDEZZE.

P R E F A Z I O N E.


A Grandezza è tutto ciò, che riſulta dalle ſue parti, molte ſono le proprietà, che di lei ſi affermano, e fra queſte ſi enumerano la lunghezza, la larghezza, e la profondità, le quali talvolta ſi trovano inſieme, e talvolta di loro ſe ne veggono congiunte due, e ſpeſſo ancora ne compariſce una ſola. Per la qual coſa tre fatta di grandezze riſultano, e ſono la linea, la ſuperficie, il corpo. La linea è una grandezza, che ha la ſola lunghezza. La ſuperficie congiugne alla lunghezza la larghezza, e il corpo ha lunghezza, larghezza, e profondità; ciaſcuna di queſte ſpecie di grandezza appartiene a quella quantità, che ſi chiama *continua*, perchè le di lei parti ſono tutte unite inſieme, e compongono una coſa ſola, e ſi diſtingue da quella, che ſi dice quantità *diſcreta*, perchè ha tutte le ſue parti diſgiunte, e ſeparate fra loro, come è il numero. Non ſono queſte ſole quelle quantità, che ſotto il nome di grandezza ſi comprendono. E' sì univerſale l'idea, che di ſe la grandezza ci laſcia, che eſſa è capace a rappreſentarci qualſiſia ente, quando l' intelletto in lui concepiſca qualunque numero di parti.

Il moto, il tempo, lo ſpazio, il ſuono ſi conſiderano come tanti enti ſubordinati alla grandezza in generale, e perchè in alcuni di loro le parti dalle quali riſultano, o ſono tutte preſenti, o ſi ſuccedono le une alle altre, per tal motivo pure derivano nuove ſpecie di grandezze, delle quali una è chiama-

ta continua permanente, e la seconda è denominata continua successiva. Anche le Matematiche, le quali hanno da avere un oggetto, che sia loro proprio, e adequato, considerano sotto questo titolo la grandezza, che veramente è una cosa la più universale di qualunque altra, e la più adattata alla loro natura. L'Aritmetica, l'Algebra, la Geometria, la Trigonometria, l'Astronomia, la Cronologia, la Geografia, la Gnomonica, l'Agrimensura, l'Architettura, la Fortificazione, la Nautica, la Musica, la Perspettiva, la Dioptrica, la Cattoptrica, che ne sono le parti principali, sotto diversi caratteri se l'appropriano, e col di lei mezzo ci scuoprono quello, che in tutte le altre scienze, alle quali le Matematiche ci conducono, può avere il pregio di essere, o il più utile, o il più ragguardevole. In questo luogo, dove a noi occorre di parlare della Grandezza, la prendiamo in tutta quanta la sua estensione, perchè le operazioni, che sopra di essa si hanno da fare, sono il fondamento di tutti i trattati Matematici, che poi di essa parlano particolarmente: non per questo però pretendiamo di non considerarla sotto qualche specie, mentre sotto il nome di quantità discreta la consideriamo, perchè troppo bene questa si adatta ad ogni altra differente grandezza, con pensiero di fare sopra di essa quelle osservazioni, che ella può comportare, e che noi possiamo giudicarle sufficienti per l'istruzione di un giovane, che desidera di prepararsi con questo mezzo all'acquisto di cognizioni sempre maggiori, che sopra la grandezza somministrano le Matematiche discipline. Ma come che ciò, che può osservarsi nella quantità discreta principalmente appartiene, o a' differenti calcoli, che sopra di lei s'intraprendono, o a' diversi rapporti, per cagion de' quali diventa l'oggetto universale delle Matematiche. Perciò in due Trattati distribuiremo tutta la Scienza delle Grandezze, e nel primo di essi addurremo le principali calcolazioni, che si possono fare sopra la quantità discreta, e nel secondo comprenderemo tutta la Scienza delle Proporzioni. In due parti si dividerà il primo, attesochè due qualità di operazioni deve contenere, l'una, che si dice degl'interi, e la seconda, che si chiama delle frazioni. Al secondo Trattato poi si aggiugnerà la notizia de' Logaritmi.

LA



LA SCIENZA DELLE GRANDEZZE

DIMOSTRATA

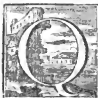
COLLE PRINCIPALI CALCOLAZIONI

NUMERICHE, ANALITICHE, E GEOMETRICHE.

Trattato Primo Parte I.

CAPITOLO I.

Della quantità discreta, che cosa ella sia, con quali segni si manifesti, e quali sieno le sue combinazioni.

I. Uella specie di quantità, che Discreta si è chiamata per trovarsi in grandezze, che hanno le parti tutte divise, e separate fra loro, deve essere il principale oggetto, di cui ora si abbia a trattare, perchè lo spirito nostro si eserciti col riflettere alla medesima nelle più generali, nelle più utili, e più necessarie operazioni, che si possono col di lei mezzo intraprendere. E' veramente cosa di molto stupore, vedere come col mezzo di questa quantità [che non è altro, che il numero] si prescrivono le leggi comuni del misurare, si determina colle misure proprie la quantità in tutte le cose, la vita civile prende regola ne' proprj interessi, la Fisica, e la Filosofia si rendono più domestiche, e si scuopre con piacere il più recondito, che si custodisce nelle matematiche discipline. Non vi è cosa nel mondo, a cui non possa convenire

qualche numero, e non vi è numero, che non ſerva a qualche coſa; ſicchè ſi conoſce con quanta ragione ſta ſcritto avere Iddio ſtabilito l'eſſere dell' Univerſo nel numero, giacchè il tempo, il moto, il peſo, la creatura, il tutto è numerato, e le numerazioni diverſe ci pongono in viſta la convenienza, o diſconvenienza di tutte queſte quantità, ſe ſieno fatti i confronti fra loro: però meritamente, *numero* ſi può dire *ciò, che ſi paragona, o ſi riferiſce alla unità*, ſia poi queſta unità di eſſere, o unità di ſoſtanza, o per fine unità di accidente. Si darà dunque principio col diſcorrere della unità, per così farci ſtrada a ragionare di qualunque altro numero, o di ciaſcheduna operazione, che dalle varie combinazioni de' numeri è ſolita derivare.

II. L'unità, a dire il vero, è coſa tanto ſemplice, che ſi trova non piccola difficoltà a farſi intendere quando ſi voglia definire, o ſi corre gran riſico di oſcurare ciò, che naturalmente è chiaro nella idea, che può avere di eſſa l'intelletto dell'uomo, ſe ſi abbiano ad uſare molte voci per definirla; che però, ſe ſi dica eſſere l'unità tutto ciò, che tutto il mondo intende quando dice un uomo, una pianta, una pietra, un animale, un corpo, ſi determina con queſte voci, che coſa ſia l'uno, anzi con più vantaggio, che quando ſi doveſſe dire: *l'uno è ciò, che in tal modo è qualche coſa, che un altro non poſsa eſsere lo ſteſso*, come pure vi fu chi ſi appagò di definire così l'unità, con manifeſtare in fatti quello, che è vero, ma non già quello, che ognuno con facilità, e chiarezza può intendere.

III. Finattanto dunque, che l'unità ſi mantiene ſola, e ſeparata da ogni altra, rimane ſempre la coſa ſteſſa ſimile a ſe, ed uguale ad un altra unità; ſebbene poſſa eſſere da queſta diverſa per qualche altra ragione: proprietà, che dovendoſi eſprimere ha per contraſſegno ſpeciale queſta nota $=$, la quale nell'eſempio, che quì ſi dà $1\,b = 1\,c$ vuol dire, che l'unità chiamata b è uguale alla unità chiamata c. Dice qualche coſa di meno il ſimile dell' uguale, perchè dove l'uguaglianza abbraccia tutto, la ſimilitudine ſi riſtringe anche ad una ſola proprietà, che convenga a qualunque grandezza vicendevolmente paragonata, ed il contraſſegno della eſpreſſione ſuol' eſſere la nota $\backsim$, onde, ſe ſi ſcriva $1\,b \backsim 1\,c$, vuol dire, che

l'uni-

l'unità chiamata *b* è simile alla unità chiamata *c*. Da più unità congiunte insieme risulta il numero, e questo è maggiore, se sono più le unità, che si congiungono, ed è minore, se sono meno, ed il contrassegno fatto con questa nota $>$ lo esprimerà maggiore, come quest' altra nota $<$ lo vorrà dire minore; così $9 > 5$, $4 < 6$, vuol dire, che il 9 è maggiore del 5, ed il 4 è minore del 6. Si possono i numeri così composti paragonare fra loro, e con questo confronto, ora si scuopre il numero intero, ed ora si vede il numero rotto, o la frazione di un numero; differenza, che dipende dal prendersi il numero con tutte le unità, che lo compongono, o dal lasciarsene qualcheduna; così, se il numero lo compongono 5 unità, il 5 sarà il numero intero; ma se si togliesse da esso qualche cosa, ciò, che rimarrebbe, non si direbbe più numero intero, ma frazione di un numero; perciò tolte dall' 8 cinque unità, nelle tre rimanenti si averebbe il numero rotto, o la frazione del numero. Cresce pure alle volte un numero, o perchè si aggiugne ad un altro numero, o perchè si multiplica per un altro, e si conosce la natura di tali numeri dalla nota, che con essi si trova, la quale nel primo caso è tale $+$. nel secondo è questa $\times$; la prima significa più, la seconda significa per; dunque $6 + 5$, vuol dire 11, e 6×3 vuol dire 18; se poi si tratta d'impiccolire il numero, questo si vede dal segno pure con cui si scrive, che consiste in una linea — sola, che si trova avere a destra, ed a sinistra il numero, o pure, che abbia un numero sopra, e l'altro sotto; però dato questo esempio $6 - 4$, vuol dire 6 meno 4, cioè 2; scritto così $\frac{9}{3}$ vuol dire 9 diviso per 3. Usano talvolta alcuni, di porre un punto fra i due numeri dati in questo modo $4 . 5$, ovvero di porne due nella seguente maniera $9 : 3$, e vogliono significare dove pongono un punto solo, che uno de' due numeri dati deve essere ingrandito per l'altro; come al contrario, dove pongono due punti, significano, che il primo numero si deve impiccolire per l'altro.

IV. Stabilite queste particolarità, si vede, che potendo crescere il numero da un infimo grado al sommo, è di necessità, che quella Scienza, che discorre de' numeri, e che volgarmente è chiamata *Aritmetica*, abbia diverse formule, col mezzo delle quali possa esprimere qualunque grandezza di nume-

mero. Nove sono questi caratteri, ciascun de' quali ci rappresenta un numero solo, e poi combinati, e congiunti insieme, ce gli esprimono tutti. Eccone le loro figure 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. applicate a significare uno, due, tre, quattro, cinque, sei, sette, otto, e nove. A queste nove figure si aggiugne quest' altra o. zero, la quale da se sola non significa cosa alcuna, ma posta appresso a qualunque altra delle nove, la fa crescere con decupla ragione, secondo il posto, che essa tiene nel trovarsi unita a quelle, e secondochè è ripetuta più volte; onde in questo esempio 10. 20. 30. &c. fa che ciascheduna di quelle figure dica dieci, venti, trenta, &c. e se si scrivesse 100., cioè fosse in qualunque de' predetti esempj raddoppiata, direbbe cento, dugento, trecento, &c. e se fosse triplicata 1000. direbbe mille, duemila, tremila, &c. Certo è, che non tutte le Nazioni si sono servite di queste figure per rilevare il significato del numero, avendo usato alcune di loro servirsi delle prime dieci lettere dell' alfabeto per contare fino a dieci, dell' undecima per contar venti, della duodecima per contar trenta, e così delle altre, rilevando poi i numeri, che sono fra mezzo a questi con quelle lettere, che servono alla desinenza di quel numero, che si deve formare: per esempio, se si deve esprimere il 15 prendono la decima lettera *k*, e la congiungono alla quinta *e*, e queste due lettere unite insieme, al loro costume, sono valutate pel 15, così, se si deve esprimere il 44 prendono la decimaterza lettera *n*, e la congiungono alla quarta *d*, e questa unione *n d* al loro modo vuol dire 44. Quando poi colle nove predette cifre si ha da contare la seconda decina, la terza, la quarta, &c. non si fa altro, se non che unire alla figura, che dà il nome alla seconda, terza, quarta, e quinta decina, &c. [che sono le predette figure 1. 2. 3. 4 5. &c.] l' altra figura, che dà la desinenza al numero dimandato; per esempio, dovendosi scrivere trentaquattro, poichè questo è un numero, che appartiene alla terza decina denominata dal tre, si prende questo 3, e si aggiugne al 4, che è numero, in cui finisce quello, che si è dimandato, e si scrive 34. I Latini distinguono i numeri ancor essi con lettere, però maiuscole, e con una serie minore, perchè con queste sette lettere I. V. X. L. C. D. M. esprimono qualunque più gran numero, ripetendo più volte le medesime, pospo-

spo-

sponendole, o anteponendole fra di loro; così dove essendo sola la lettera I. esprime l'unità, posta due volte, posta tre volte, esprime il due, ed il tre. Se la lettera V. significa 5, posta dopo la predetta lettera I. in questo modo IV significa 4 se la lettera X esprime 10, posta la stessa lettera I. una volta avanti di essa, e scritto IX. vuol dire nove, e scritto in quest' altro modo IIX. vuol dire 8. In somma, se le lettere L.C.D.M. significano 50, 100, 500, 1000, anteposta a ciascheduna di queste qualunque delle precedenti, vuol dire, che ha da scemare quel numero di unità, alle quali quella lettera è destinata; siccome posposte ad una di quelle, che esprime il più, qualunque delle altre, che esprimono il meno, cresce il valore di quella lettera per il valore di tutte le altre, che si trovano sotto di lei, e però trovandosi questa serie di lettere MDCCXLVII. si legge 1747. l'anno appunto, in cui queste cose scriviamo. Il numero 500. si suole anche scrivere così IↃ. ponendo un I con un C volto verso dell'I, siccome per scrivere 1000 scrivono un I nel mezzo a due C, che si guardano fra loro in tal modo CIↃ. Ecco dunque in qual maniera hanno gli uomini in tutti i tempi praticato di manifestare, o col mezzo di figure, o col mezzo delle lettere Latine, e Greche, minuscole, e maiuscole, tutte quelle combinazioni, che possono formarsi nella espressione delle misure per la quantità discreta. Ma perchè, come ognun vede, sebbene infiniti numeri si possano rilevare con queste combinazioni, non è però in nostro arbitrio il far servire un numero ad esprimere più cose, esprimendo sempre l' 1 l' unità, il 2 due unità, perciò si è trovato un mezzo più generale per farlo servire a più espressioni, e questo è il mezzo di esprimere le quantità tutte colle lettere dell' alfabeto, senza legare ciascuna di esse ad una sola, e distinta quantità. Così per la lettera *a* in questo senso posso esprimere l' unità, il 2, il 3, il 4, il 100, il 1000, posso esprimere il tempo, il moto, la figura, la sostanza, e qualunque altra cosa, a cui la voglia applicar l' intelletto; onde subito si conosce di qual giovamento abbia da essere un esprimere le quantità, che si vogliono, a questa usanza, che certo per massimo si conosce, e come tale comunemente si adopra nella soluzione principalmente di Quesiti, e Problemi, o più singolari, o più difficili. Su questo

par-

particolare però deve avvertirsi, che quando si tratta di voler esprimere con lettere dell' alfabeto una qualche quantità, la lettera a questo effetto applicata non deve assegnarsi per esprimere qualche altra cosa, ma per tutta la serie del quesito, a cui si risponde, deve adoprarsi per significare la stessa grandezza. Si osserva di vantaggio, che dovendosi distinguere le quantità cognite da quelle, che non sono tali colle lettere dell'alfabeto, sono scelte a questo effetto tre lettere x, z, y, le quali, dove si trovano, sono appunto quelle quantità, che non si conoscono, che però si vogliono determinare.

V. Rimane ora, che si avverta, come dovendosi rilevare un gran numero composto di molte figure, si abbia uno da contenere per dargli il giusto significato, senza far riescire confusione. La regola dunque è tale; tutta la serie delle figure, che rappresentano il numero dato, dovrà punteggiarsi; l'ordine del punteggiamento è di tre per tre figure, ponendo il primo punto dopo tutti i numeri dati; quindi si osservi, che le denominazioni delle tre figure, che si trovano per ciascheduno spartimento, sono numero, decina, centinaia con questo ordine, che l'ultima di tutte le figure date si legge per quel numero, che è, la prossima ad esso ha il valore della decina rappresentata per questa figura, finalmente la prima di questo ultimo terno rappresenta le centinaia, secondo il numero, che in questo luogo si trova. Col medesimo ordine si dà il nome alle figure, che sono nel secondo, nel terzo, nel quarto, e in qualunque altro spartimento, che segue, avvertendo, che dove la denominazione delle tre figure, che si leggono nell'ultimo spartimento arriva alle sole centinaia, la denominazione di quelle del secondo è di migliaia, di quelle del terzo è di milioni, di quelle del quarto di centinaia di migliaia di milioni, di quelle del quinto di bilione, di quelle del sesto di centinaia di migliaia di bilioni, e così di seguito; sicchè in questo modo si rende facile il rilevamento di qualunque somma delle maggiori; però dati

123, 456, 789, 012, 345, 678, 901

si hanno da leggere così, centoventitre trilioni, quattrocento cinquantaseimila, settecento ottantanove bilioni, dodicimila trecento quarantacinque milioni, seicento settantotto mila, novecentuno. Se nel primo spartimento non si trovassero tutte

tre

tre le figure, come si vede nella somma de' numeri, che qui appresso si dà, non importerebbe, perchè possono in quello trovarsene anche due soli, oppure solo uno, senza alterare le denominazioni de' susseguenti; dunque avendosi i seguenti numeri: 23, 456, 789, oppure questi 3, 456, 789, si leggerebbe la prima somma ventitre milioni, quattrocento cinquantasei mila, settecento ottantanove; e la seconda valerebbe tre milioni, quattrocento cinquantasei mila, settecento ottantanove.

VI. Si è dunque veduto, come tutte le grandezze, o quantità si esprimono, o col mezzo di cifre, o col mezzo di lettere, e come si leggono diverse somme. Rimane ora, che si propongano tutte quelle operazioni, che si possono sopra di esse intraprendere; e perchè nella idea, che in noi si trova della grandezza di essere *una cosa, che si può o ingrandire, o scemare*, abbiamo tutto ciò, che a qualunque grandezza può convenire, per questo considereremo primieramente, in che modo possa una grandezza essere accresciuta, e poi passeremo a vedere come possa una grandezza essere diminuita, e palesceremo questi due modi, tanto col mezzo delle cifre, quanto col mezzo delle lettere.

CAPITOLO II.

Del modo d'ingrandire una Quantità Numerica col mezzo delle Cifre.

I. Ingrandire una quantità, vuol dire inalzare un numero a quel segno, a cui si deve inalzare, o sublimarlo fino a quel grado a cui si può. La prima cosa si ottiene per rapporto di un numero ad un altro, per mezzo di cui s'inalza; si ottiene la seconda, quando il numero si considera rispetto a tutte quelle potenze, che a lui convengono, delle quali poi si parlerà più abbasso, servendo il trattare per ora della prima maniera d'ingrandimento. Il numero ingrandisce il numero, quando o si aggiugne numero a numero, o si multiplica il numero per un altro numero: operazione l'una, e l'altra molto opportuna, quando si hà da conoscere il valore positivo di una grandezza cambiatasi da quello, che era, con ciascheduna di queste due maniere. Sono di due fatta quei numeri,

ſopra dei quali ſi può vedere aggiunto un nuovo numero, perchè o ſono della ſpecie medeſima, o ſono di ſpecie differente, e per queſti due caſi, fanno di biſogno alcune regole da non traſcurarſi, ſenza un notabile mancamento nella condotta di una eſatta numerazione. Numeri della ſpecie medeſima ſi ſogliono chiamare quei numeri, nei quali prodotta qualunque ſomma particolare ſi rappreſentano coſe della medeſima ſpecie. Così 8763. 5247. 2125. ſe ſono tutte ſomme di gradi, di potenze, di ſpazj, di tempo, di miſure, di peſo, ſi dicono numeri della medeſima ſpecie: Laddove, quando le date ſomme rappreſentaſſero diverſe coſe, per eſempio una ſomma foſſe di giorni, un altra di ore, un altra di minuti, queſti numeri dovrebbero chiamarſi di ſpecie differente. La regola propria da ſeguitarſi per operare con eſattezza in tutto il decorſo della operazione è tale, quale quì appreſſo vien ſtabilita.

Regola per l' addizione di ſomme della medeſima ſpecie.

II. Nella diſtribuzione delle ſomme ſi oſſervi primieramente lo ſpartimento nei numeri, ſicchè ogni numero, ogni decina, ogni centinaja &c. delle ſomme inferiori corriſponda al numero, alla decina, al centinaio &c. delle ſomme ſuperiori.

In ſecondo luogo ſi cominciano a raccogliere i numeri, che ſi trovano in ciaſcheduna colonna cominciando dal più baſſo poſto a mano deſtra, e ſalendo all'insù fino a tanto, che non ſono raccolti tutti quei numeri, che compongono queſta prima colonna.

In terzo luogo ſi oſſerva ſe tutti queſti numeri raccolti inſieme fanno più, o meno di nove, o di quante decine paſſano il 9. Se fanno meno di 9, ò 9 appunto, tirata una linea ſotto tutte le colonnine, queſto numero ſi pone ſotto queſta linea, e ſotto la colonna a cui appartiene, e l' operazione ſi ſeguita nel medeſimo modo nella proſſima colonna. Se poi i numeri raccolti rilevano più di nove, ſi ſeparano tutte le decine, e ſi ſcrive al luogo predetto il numero, che ſopravanza alle decine, e ſe non ne ſopravanza alcuno ſi ſcrive uno zero, e le decine ſi portano ſotto la ſeconda colonna per operare in eſſa, e in tutte le altre rimanenti al modo ſteſſo fino a che, fatta la raccolta dei numeri nella ultima colonna, tutto il riſultato ſi ſcriva intero al ſuo luogo. *Eſempio*

Eſempio I.	*Eſempio II.*	*Eſempio III.*
612	8763	5437
31	5247	2893
152	2125	7998
795	16135	3672
		20000

Regola per l' addizione de' numeri di ſpecie diverſa.

III. In queſta addizione di ſomme di numeri di ſpecie diverſa, tutte le accennate regole nell' antecedente operazione ſi pongono in uſo, e ſolo di più ſi nota, che non ſempre ſono le decine quelle, che ſi portano, ma ſi porta il valore di quella grandezza, che ſi vede eſpreſſa nel numero precedente. Così ſe la ſomma da farſi è di giorni, di ore, e di minuti, ſi ſommano tutti i minuti inſieme nel modo dianzi detto, e poi da queſta ſomma, ſe paſſa il ſeſſanta, ſi levano le ore, e queſte ſi congiungono con la ſomma delle ore, la quale ſe ſupera il 24, di quante volte lo ſupera, di tante volte ſi fa l' addizione alla ſomma de' giorni, così che in queſto caſo prima ſi porta il 60, poi il 24. per avere la giuſta ſomma, che ſi può cercare in qualunque eſempio a queſto effetto preparato.

Eſempio ſecondo il caſo della regola.

Giorni.	*Ore.*	*Minuti.*
354	12	36
59	22	8
680	11	53
1094	22	37

Se foſſero aggiunti alle ſomme i minuti$^{\prime\prime}$, i min.$^{\prime\prime\prime}$, i min.^{iv} in tutta la ſerie dei minuti ſi ſcriverebbe ſempre ſotto ciaſcuna colonna, in cui ſi trovaſſero queſti minuti, quel numero, che rimarrebbe levati tutti i 60. Quello che ſi è detto per avvertire il modo da tenerſi quando ſi congiungono inſieme

più somme di numeri di specie differente secondo il caso proposto, si deve applicare per qualunque altro caso di qualunque altra specie di numeri differenti, e per questo effetto quì si dà un breve Catalogo di particolari misure, tutte di specie differenti, perchè quando occorresse dovere operare con esse, si sappia subito la denominazione di quei numeri, che si hanno da portare sopra i precedenti, e quali sono quei numeri, che si hanno da scrivere sotto tutte le già formate colonnette.

Distinzione di varie misure.

IV. La misura più piccola di qualunque altra è il punto, con cui si comincia, con cui si termina una linea.

Più punti continuati, e descritti per diritto, come ...... formano la linea.

La misura della linea è la lunghezza d'un grano di frumento.

Dodici linee per traverso applicate l'una all'altra in questo modo ıııııııııııı formano il pollice.

Dodici pollici formano il piede.

Due piedi, e mezzo fanno il passo comune.

Due passi comuni fanno il passo Geometrico.

Cento venticinque passi Geometrici fanno lo stadio.

Otto stadii, o mille passi fanno il miglio Italiano.

1250 passi Geometrici fanno il miglio d'Inghilterra.

1500 passi Geometrici fanno il miglio di Scozia, o la lega d'Inghilterra.

2000 passi Geometrici fanno la piccola lega di Francia; 2400, oppure 2500 passi Geometrici fanno la lega comune di Francia, e 3000 la lega grande.

3400. passi Geometrici, o poco più, compongono la lega comune di Spagna.

4000 passi Geometrici fanno il miglio di Germania.

5000 passi Geometrici fanno il miglio di Svezia.

6000 passi Geometrici fanno il miglio di Ungheria.

60000 passi Geometrici, ovvero 57060 Esapede, oppure 28 piccole leghe di Francia fanno il grado di longitudine, e di latitudine sotto l'Equatore.

360 gradi di longitudine sotto dell'Equatore fanno il circolo massimo nel globo Terrestre.

Molte

Molte altre misure si danno, colle quali si esprime il diverso valore delle monete, come denari, soldi, lire, scudi &c.

Quattro piccioli, ovvero quattro denari fanno un quattrino, dodici denari fanno il soldo, venti soldi fanno la lira, sette lire fanno lo scudo.

Anche il peso ha le sue misure dividendosi la libbra in oncie, in denari, in grani: 12 oncie fanno la libbra, 24 denari fanno l'oncia, e 24 grani un denaro.

Varie misure misurano i liquori, e con varie misure si misurano le Biade, e come che la misura è una cosa arbitraria, si multiplicano queste misure secondo le varie Nazioni, non potendo servire una per tutte, ma solo potendosi trovare la proporzione, che passa fra l'una, e l'altra di esse; così per esempio.

Il piede di Parigi si divide in 750 parti, che corrispondono a 12 pollici giusti.

Il piede di Leida, e del Reno si divide in 685 parti, che corrispondono a 11 pollici, e 7 linee.

Il piede di Londra si divide in 665 parti, che corrispondono a 11 pollici, e 3 linee.

Il piede di Danzica si divide in 635 parti, che corrispondono a 10 pollici, e 7 linee.

Il piede di Danimarca si divide in 649 parti, che corrispondono a 10 pollici e 9 linee.

Il piede di Venezia si divide in 706 parti, che corrispondono a 11 pollici, e 11 linee.

Il piede di Bologna si divide in 845 parti, che corrispondono a 13 pollici, e 9 linee.

Il piede Romano antico, secondo la misura, che vedesi in Campidoglio, si divide in dieci pollici, e dieci linee.

Il piede di Svezia si divide in 725 parti, che uguagliano 12 pollici, e 1 linea.

Il piede di Amsterdam in 10 pollici, e 5 linee.

Il piede di Anversa dividesi in 10 pollici, e 6 linee.

Il piede di Ginevra si divide in 18 pollici.

Il piede di Granoble si divide in 12 pollici, e 7 linee.

Il piede di Lione si divide in 12 pollici, e 7 linee.

Il piede di Lorena si divide in 10 pollici, e 9 linee.

Il piede di Savoia si divide in 10 pollici.

Il piede di Vienna nel Delfinato si divide in 11 pollici, e 11 linee.

Il piede

Il piede di Vienna in Auſtria ſi divide in 11 polici, e 8 linee.

Il palmo Romano in 483 parti, che uguagliano 8 polici, e 2 linee.

Il braccio Fiorentino in 1283 parti, che corriſpondono a 20, o 21 polici, e 6 linee.

La pertica d' Irlanda contiene dodici piedi del Reno.

L' eſapede, o *toiſes* ſono ſei piedi di Francia.

Da tutte queſte miſure è facile il vedere come ſi poſſono combinare le loro proporzioni, e come col mezzo delle loro notizie ſi poſſa inalzare qualſiſia data miſura a quell' altezza, a cui il biſogno la richiede col mezzo dell' addizione.

V. L' altro mezzo d' inalzare il numero è quando ſi moltiplica un numero per un altro, che vuol dire quando il numero dato ſi fa creſcere per tutte quelle unità, che ſi trovano nel numero multiplicante. Anche in queſta operazione ſi deve aver riguardo a numeri ſemplici, ed a numeri compoſti, perchè ſi abbia il giuſto valore nell'ingrandimento di queſti numeri differenti fra loro. La regola, che ſi dà per la prima fatta di queſti numeri è la ſeguente.

Si oſſervi quante unità contiene il numero dato, perchè multiplichi un altro, e per queſte unità s' ingrandiſca ciaſcuna delle figure, che ſi trovano nel numero da multiplicarſi, cominciando dalla ultima, e ſucceſſivamente paſſando alla prima con queſt' ordine, che, ſe il primo multiplicato non paſſa il 10, ſi ſcrive quello che è ſotto la linea, e ſotto il numero multiplicato, e ſe paſſa il 10 ſi ſcrive al medeſimo luogo quel numero che reſta, levate tutte le decine, le quali di mano in mano dove ſi trovano, ſi portano per aggiugnerle al prodotto della multiplicazione de' numeri ſeguenti, fino a che arrivata la multiplicazione al ſuo termine, ſi ſcriva tutto il numero riſultato in queſta ultima multiplicazione, perchè ſi vegga tutta la ſomma, con cui è rimaſto ingrandito il numero dato, come appariſce in queſto eſempio, nel quale ſi multiplica per 9 il 645, e laſcia per riſultato 5805, o come ſi vede in queſt' altro eſempio, nel quale ſi multiplica per 3 il 3210 laſciando queſta multiplicazione per riſultato 9630.

Dove nel multiplicante non è una ſola figura, ma ſono due, tre, o molte altre, allora è neceſſario ricorrere alla regola del.

la

la multiplicazione composta, che propone diverse maniere. Primieramente insegna, che si deve avvertire se il numero dato per multiplicare l'altro numero, è un numero, che facilmente si possa, come si dice, ripiegare, senza che nella multiplizione si alteri la quantità del numero che deve risultare; perchè quando il ripiego si possa dare si adopra questo ripiego, che consiste in trovare due altri numeri, che multiplicati fra loro rendono intiero il numero multiplicante; per esempio se il numero multiplicante fosse 36, giacchè 4 via 9 fa 36, farebbe appunto il ripiego di multiplicare il numero dato prima per 4, poi il prodotto da questa multiplicazione si multiplicherebbe per 9, e nel risultato sarebbe la giusta quantità, che nascerebbe se il numero fosse multiplicato per l'intero 36.

Esempio.

Numero multiplicante.	36	530	*Numero da multiplicarsi.*
		2120	
Ripiego.	4	19080	*Risultato giusto della multiplicazione.*
	9		

VI. Non trovandosi il ripiego del numero si deve operare con tutto il numero, perchè si multiplichi l'altro, e la regola per la multiplicazione è tale. S'intraprende la multiplicazione con una figura per volta, importando poco, che sia la prima, o l'ultima quella, che si prende, ma solo avvertendo al modo di disporre i numeri nelle loro file, che tante se ne fanno, quante sono le figure nel multiplicante, cioè se questo numero risulta da tre, da quattro, o cinque, o più figure, tre, quattro, o cinque, o più, hanno da essere le file, che si debbono fare, mentre ciascun numero, che si trova nel multiplicante, deve da se solo multiplicare tutto il numero a questo effetto dato, perchè sia multiplicato; nel disporre le file de' risultati delle multiplicazioni, si osserva, che la prima deve per l'appunto avere gli ultimi numeri corrispondenti agli ultimi numeri del multiplicato, potendo il primo numero della prima fila rimanere al di sopra del primo numero, che si trova nel multiplicato per causa di dover rilevare una somma maggiore

giore della ſomma di quello. La ſeconda fila poi, la terza, la quarta, e così le altre hanno d' avere l' ultimo loro numero collocato per una figura, o ſopra, o ſotto l' antecedente fila, ſecondo che ſi è cominciata la multiplicazione, o per la prima, o per l'ultima figura, che era nel multiplicante; cioè a dire, ſe ſi è cominciato dalla prima figura, l'ultimo numero, che ſi deve porre nelle file, ha da eſſere una figura più là dell' ultima figura, che ſi vede nella fila precedente, e ſe la multiplicazione ſi è cominciata dalla ultima figura del multiplicante, in queſto caſo l' ultima figura della fila ſeconda, terza, e quarta &c. ha da eſſere una figura più in dentro della ultima figura della medeſima fila precedente. Diſpoſte in queſto modo tutte le file ſi ha da rilevare la ſomma intera per vedere l' ingrandimento, che ſi è fatto nella quantità aſſegnata. Ecco l' eſempio per ciaſcuno di queſti due caſi, acciocchè colla pratica meglio ſi eſprima la ſoſtanza di queſta regola.

Eſempio della multiplicazione.

```
56789————3242315
          ———————
         29180835
        25938520
       22696205
      19453890
     16211575
Somma.  184127826535
```

Altro modo d' operare coll' eſempio medeſimo.

```
56789————3242315
     16211575
      19453890
       22696205
        25938520
         29180835
Somma.  184127826535
```

Se accadeſſe, che nel numero da multiplicarſi ſi trovaſſe qualche zero, non ſi dovrebbe tralaſciare per ſalire all' altro numero, ma nella fila, ſe ſi foſſero portate delle decine, ſi porrebbero in queſto luogo, e ſe non ſi foſſe portata decina alcuna ſi ſcriverebbe lo zero.

Eſempio.

```
523————————62043030
           186129090
          124086060
         310215150
Somma.   32448504690
```

Così

Così, ſe nel multiplicante fra la prima, ed ultima figura ſi trovaſſero uno, o più zeri, ſi ſcriverebbero queſti a quel luogo che doverebbero occupare le altre figure quando ci foſſero.

Eſempio.

320502 ———	234567
	703701
	469134
	000000
	1172835
	000000
	469134
Somma.	75179192634

Finalmente, ſe tanto il numero da multiplicarſi, quanto il multiplicante abbiano i medeſimi zeri, ſi ſcriverebbero ſotto la linea altrettanti zeri, quanti ſi trovaſſero nell' uno, e nell' altro numero; poi ſi ſeguiterebbe l' operazione come prima.

Eſempio.

3200 ———	25200
	5040000
	756
Somma.	80640000

Oppure ſi può fare in queſt' altro modo.

3200 ———	25200
	75600
	50400
	00000
	00000
Somma.	80640000

VII. Si da alle volte il caſo di dover multiplicare un numero dato in ſe medeſimo: non ſi fa altro, ſe vi è pericolo di confuſione, ſe non che ſcrivere il numero dato due volte, del reſto la multiplicazione è la medeſima, che negli altri caſi,

si, solo la somma, che da questa multiplicazione risulta, acquista un nome particolare, e si chiama quadrato del numero dato; così multiplicandosi il 12 per il 12 risulta 144, che si dice il quadrato del 12, come se poi si multiplicasse questo prodotto 144 per il 12 stesso, il numero 1728, che risulterebbe, si chiamerebbe col suo proprio nome numero cubo; ma tanto di questi numeri quadrati, che di questi numeri cubi si discorrerà al proprio luogo. Queste sole riflessioni si possono fare sopra la multiplicazione, che, se due numeri disuguali sono multiplicati per un medesimo numero, i prodotti non sono egualmente grandi, ma il loro ingrandimento corrisponde alla ineguaglità de numeri multiplicati, cioè sarà maggiore il prodotto della multiplicazione del numero maggiore, e sarà minore il prodotto della multiplicazione del numero minore; così dove il 30 multiplicando il 60 fa 1800, multiplicando il 90 farà 2700, cioè la metà più del 1800, perchè il 90 ha di più la metà del 60. Si riflette ancora come ogni prodotto si può stimare numero multiplice sì del numero multiplicante, che del numero multiplicato, mentre si trova, che ogni prodotto contiene il numero da multiplicarsi tante volte, quante sono le unità nel multiplicante, il quale multiplicante indifferentemente può essere stabilito, o nel primo, o nel secondo numero dato, giacchè qualunque di essi multiplichi l' altro, il prodotto ha sempre da essere il medesimo, così il 48, che risulta dalla multiplicazione del 6 per l' 8, o dell' 8 per il 6, è numero multiplice tanto del 6, che dell' 8. Si rifletta di più ad una proprietà, che per mezzo di questo ingrandimento della quantità, nasce nelle grandezze, ed è, che alle volte una grandezza si dice egualmente multiplice di un altra grandezza, effetto, che allora apparisce, quando le due grandezze, che si paragonano ad altre due, si osservano o contenere quelle, o essere da quelle contenute egual numero di volte. In questo modo, il 9 si dice essere del 3 egualmente multiplice, che il 12 rispetto al 4. Si riflette per ultimo come un numero si dice multiplicato per più altri numeri, successivamente, quando dopo di averlo multiplicato per il primo multiplicante, il prodotto da quella multiplicazione si multiplica per il secondo multiplicante, e questo prodotto nuovo si multiplica per il terzo, e così degli altri, fino a tanto che si trovano de' numeri multiplicanti, co-

me

me ſi vede nell' eſempio ſeguente, dove ſi multiplica il 64 per tutti queſti numeri.

64 per 12, 16, 20, 30, 40
128
64
768
768
4608
12288
245760
7372800
294912000 ultima ſomma della domandata multiplicazione, che per abbreviarla ſi può fare in altra maniera, cioè col multiplicare prima fra loro tutti li multiplicanti, e poi col loro riſultato multiplicare il numero dato, e così per ſtare nell' eſempio medeſimo il prodotto della multiplicazione di queſti numeri 12, 16, 20, 30, 40, è 4608000, dunque per un tale riſultato ſi multiplicherà il 64, e ſi avrà il prodotto fatto dianzi 294912000.

VIII. Succede all' ingrandimento de' numeri ſemplici fatto col mezzo della multiplicazione l' altro, che ſi deve fare ne numeri compoſti, e queſto ſi può intraprendere in due maniere, o con ridurre il numero compoſto alla ſua ultima ſpecie, o multiplicandolo per le ſue parti aliquote. Si riduce alla ſua ultima ſpecie il numero compoſto, quando ſi riſolve fino all' ultime parti minime, dalle quali riſulta, riducendoſi per eſempio le lire a denari, gli anni a minuti primi, o ſecondi &c. le eſapede alle linee, e qualunque altra miſura alla ſua più piccola parte. Si multiplica per le parti aliquote, quando multiplicatoſi prima il numero dato per l'intero, ſi multiplicano poi gli altri numeri, che ſono rimaſti, conſiderati queſti numeri come parti, che qualche volta ſono compreſe nel numero principale. Così 5 ſoldi di lira ſi dicono parti aliquote, perchè 5 ſoldi ſono contenuti quattro volte nella lira, cioè ſono un quarto di lira; ſimilmente 4 danari ſono parti aliquote del ſoldo per eſſere un terzo di eſſo, e così ſi diſcorre delle linee riſpetto a pollici, de' pollici riſpetto a piedi, ed in ogni altra miſura le parti minime, e le minori ſi conſiderano ſem-

pre come parti aliquote delle maggiori. Se si abbia dunque da multiplicare la quantità composta nel primo modo, cioè per la riduzione, si opera come nel quì appresso unito esempio si vede.

Si multiplichino 252 libbre di una qualche cosa per lire 33, soldi 5, denari 4.

Nell'esempio proposto, l'ultimo numero, che si trova nel multiplicante sono li quattro denari; sicchè a denari si dovrà ridurre tutto il numero dato delle lire, e de soldi, multiplicandosi le lire per 20, con aggiugnere al prodotto 5 soldi, e poi multiplicando il risultato per 12 con aggiugnere similmente al prodotto li 4 danari. Fatta la riduzione in tal modo, per questo numero risultato si multiplicano le libbre 252, e nel prodotto si vede l'ingrandimento della assegnata quantità, cioè nel caso proposto si vede quanti denari apparterrebbero a tutte le date libbre 252.

```
252 ——lir. 32. 5. 4
           20
          ————
           640
             5
          ————
           645 —— 12
          ————
           645
          1290
             4
          ————
libb. 252  7744
          ————
         15488
         38720
        15488
        ———————
       1951488
```

1951488 Somma di denari per il prezzo di tutte le libbre, la qual somma partita secondo la regola, che si darà al suo luogo lascierà lire 8132, soldi 17, denari 4 per il valore giusto di tutte le 252 libbre.

IX. L'Esempio del multiplicare per le parti aliquote si può figurare in questo caso. Un braccio di panno vale 25 lire, 10 soldi, denari 6, quanto importano 687 braccia? Si multiplica in primo luogo per 25 la somma delle braccia.

25—687

braccia 25——687
1374
3435
17175 lire, poi, perchè 10 soldi sono la metà di una lira, si prende la metà della somma delle braccia, ed è 343 lire, coll'avanzo di 10 soldi; questa somma si congiugne alla prima 17175
343 : 10
e si rileva una somma di lire 17518 : 10

I denari 6, che rimangono sono la metà di un soldo, cioè la 40:ma parte di una lira, dunque presa la 40:ma parte di 687, numero delle braccia, cioè 17. interi coll'avanzo di $\frac{7}{40}$ parti di lira, cioè 3 soldi, e denari 6, anche questo prodotto si aggiugne all'antecedente, e si fa la somma intera di 17535 lire, soldi 13, denari 6.

Se non fusse 6 il numero de' denari, ma qualunque altro, cominciando dall'uno fino all'undici, regola generale potrebbe essere l'avvertire qual parte fosse di dodici denari il numero dei denari dati, e multiplicatosi per questa parte il numero de soldi, che compone la lira, il risultato dovrebbe partire il numero, che fu dato per essere multiplicato, acciocchè il quoziente, che sarebbe il numero delle lire, si congiugnesse alla somma antecedente, e l'avanzo, se vi fosse dopo questa partizione, si dovrebbe partire per il medesimo numero che multiplica i soldi, per averne da questo secondo quoziente la somma de soldi, col lasciare l'avanzo, in caso che vi fosse, per la somma de denari. Si osservi l'insegnamento della regola nel seguente esempio.

Si abbia da multiplicare 5677 per lire 3, soldi 5, denaro 1.

Multiplichisi prima per 3—5677

Ecco il prodotto————17031 lire, e poi, perchè il 5 è la quarta parte del 20, si prenda del medesimo numero 5677 il quarto, che sarà 1419 lire, e avanzerà un quarto, cioè 5 soldi. Finalmente, perchè un denaro è la 12:ma parte di un soldo, si multiplicherà per 12 il 20 numero de soldi, che com-

compongono la lira, e risulterà 240. Questo 240 dovrà partire il medesimo 5677, e risulteranno 23 lire coll' avanzo di $\frac{117}{240}$, che partito per 12 lascierà 13 soldi, e un denaro; dunque sommate insieme tutte le lire ——— lir. 17031. —. —

	1419. 5. —
	23. 13. 1
sarà la somma ———————	18473. 18. 1

Se due erano i denari, cioè un sesto di soldo, si sarebbe multiplicato per il 6. il numero de' soldi, che compongono la lira, e colla regola precedente servendosi del 6, si sarebbe compita l'operazione. Quello, che si è detto de' danari, rispetto a' soldi, si può dire de' soldi in ordine alle lire, e si può dire di qualunque altra piccola misura relativamente alla maggiore, perchè si sappia in qual modo colle parti aliquote si debba promovere l'ingrandimento di una quantità.

X. Perchè qualche volta succede che il numero della specie più bassa non si può ridurre ad una denominazione di parti aliquote del numero della prossima antecedente specie, cioè, non si può ridurre il soldo a contenere, se non che $\frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\frac{1}{5}.\frac{1}{10}.\frac{1}{20}$ di lira, e il denaro non si può ridurre ad altro, che ad $\frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{12}$ di soldo, e così proporzionatamente si potrebbe dire delle altre misure inferiori in altra specie, riguardo alle loro misure maggiori, però affine di non incagliare nella operazione, succedendo questo caso, è necessario avvertire, se dal numero minore si può levare una parte aliquota del maggiore; per esempio, se per 9 pollici si dovesse moltiplicare una somma di esapede, di piedi, di pollici, &c. e il numero, che prima di essi ha moltiplicata la data somma sia stato 4 piedi, cioè 48 pollici, ognun vede, che i 9 pollici dati non sarebbero parte aliquota de' 48, pure, perchè questo 9 contiene il 6 che è $\frac{1}{8}$ del 48, ed il 3, che è $\frac{1}{2}$ di questo 6, prima si moltiplicherebbe la somma data con prenderne $\frac{1}{8}$, ed il prodotto della moltiplicazione per 4 piedi, e poi si moltiplicherebbe la medesima data somma per 3, con prendere dell' antecedente prodotto $\frac{1}{2}$. Ecco come si dovrebbe fare in questo caso, ed in qualunque altro simile, poco importando, che il numero

ro

ro, il quale non si vede essere qualche parte aliquota del precedente, si divida o in due, o in tre, o in più parti, purchè si ottenga l' intento della multiplicazione. Si vogliono multiplicare braccia 6, 3 soldi, danari 8, per braccia 6, soldi 3, denari 8. Prima si multiplica per il 6 il numero de' denari, e se la multiplicazione rileva il soldo, o più soldi, perchè appunto ne rileva quattro, nel luogo de' denari si pone lo o, e si porta 4, poi si multiplicano per il 6 i soldi, ed alla somma si aggiungono i soldi, se si sono portati, e se il risultato passa il 20, che è il numero di 20 soldi, che fa il braccio, si pongono sotto i soldi gli avanzi de' soldi, e li 20 si portano; così, perchè nell' esempio il 6 multiplicando il 3 fa 18, e aggiugnendosi 4, che si portava, sono 22, sotto a' soldi si scriverà il 2, e si porterà 1. Finalmente per il medesimo 6 si multiplicano le braccia, con aggiugnere al prodotto ciò, che si porta, ed il resultato tutto intero si scrive sotto il luogo delle braccia, così perchè 6 moltiplicato per 6 fa 36, aggiunto 1, che si portava, si avrà 37 da porsi a suo luogo sotto il numero delle braccia, e sarà finita la prima multiplicazione intrapresa col 6. Si comincia poi la seconda multiplicazione dell' intero numero dato per il numero della seconda specie, che si trova nel secondo luogo del multiplicante; cioè per soldi 3 si multiplicano braccia 6, soldi 3, denari 8, e la multiplicazione si fa in questa guisa. Si guarda, che parte è il 3 multiplicante del numero, che lo precede nella specie maggiore, cioè del 20, giacchè, come si è detto, ciascun braccio conta 20 soldi, e perchè non può avere denominazione di parte intera aliquota, si divide in due parti: prima si prende il 2, e poi l' 1, che rimane, e si vede, che il 2 è la decima parte del 20; si prende dunque la decima parte della somma data da multiplicarsi, e perchè si trova che il 10 non entra nel 6, si scrive o sotto la seconda figura del 37, cioè sotto il 7, e si multiplica per 20 il 6, cioè le 6 braccia, che sono come avanzo, e risultano 120 soldi, questi si aggiungono a i soldi tre seguenti, che sono nella somma, e si rilevano soldi 123, che si partono per 10, e risulta 12, che si scrive sotto de' soldi; e perchè rimangono 3 soldi, cioè 36 denari, questi si hanno da unire agli 8 denari, che nella somma sono rimasti, e risulteranno 44 denari

da

da partirsi per 10, ed il quoziente 4 si scrive sotto il luogo de' denari; perchè poi rimangono 4 denari, questi si hanno da porre sopra una linea, con sotto il 10, così $\frac{4}{10}$, oppure si può scrivere $\frac{2}{5}$, e con questo rimane compita la seconda multiplicazione. Dalla somma, che è risultata ora si prende la $\frac{1}{3}$, perchè si deve partire per l'altra parte del 3 lasciata, cioè per l'uno, e si fa la terza, che è o. 6. 2. $\frac{1}{5}$. Preparata questa terza somma, si raccolgono insieme le due somme nate dalla multiplicazione per il 3, e risulta o. 18. 6. $\frac{3}{5}$, e poi si comincia a multiplicare per l'ultimo numero, che è il numero de' denari, cioè per l'8, e perchè non è parte intera aliquota del 36 numero de' denari, a cui si è ridotta la precedente specie del numero 3, si dividerà quest' 8 in 6, e in 2, vale a dire, si considera primieramente come $\frac{1}{6}$ del 36, sicchè si multiplicherà la somma data con prendere il sesto della somma derivata dalla multiplicazione per il 3, cioè da o. 18. 6 $\frac{3}{5}$, e risulterà o. 3. 1 $\frac{3}{30}$, oppure $\frac{1}{10}$, e questa somma partita per 3, lascierà o. 1. o $\frac{31}{30}$, e ridotte queste due ultime somme in una sola, cioè o. 4. 1 $\frac{7}{15}$, sarà finita l'intera multiplicazione, che ora quì distesamente si pone.

	6.	3.	8	
per	6.	3.	8	
per $\frac{6}{20}$	37.	2.	0	
per $\frac{1}{3}$	0.	12.	4 $\frac{2}{5}$	
	0.	6.	2 $\frac{1}{5}$	
per $\frac{1}{6}$	0.	18.	6 $\frac{3}{5}$	*somma delle due precedenti.*
per $\frac{1}{3}$	0.	3.	1 $\frac{1}{10}$	
	0.	1.	0 $\frac{11}{30}$	
sommadelle due preced.	0.	4.	1 $\frac{7}{15}$	
somma intera	38.	4.	8. $\frac{1}{15}$	

Ma perchè il multiplicare in questo modo, o l'inalzare le grandezze suppone qualche notizia del modo d'impiccolire la stessa grandezza; perciò, prima di praticarlo con franchezza, bisognerà, che si aspetti di avere appresa la maniera di rendere piccola una numerica quantità.

CAP.

C A P. III.

Del modo d' ingrandire la quantità col mezzo delle lettere.

I. IL metodo d' ingrandire la quantità col mezzo delle lettere, ha portato sempre, da che cominciò a praticarsi, un giovamento di non piccola conseguenza, per aver dimostrato o con più brevità, o con più chiarezza quello, che non sempre riusciva potersi scoprire col mezzo delle cifre Aritmetiche. Nell' inoltrarsi in questo trattato, si potrà vedere coll' esempio quello, che ora si accenna, come di fatto, e la propria esperienza servirà a togliersi quel pregiudizio, che per lungo tempo ha avuto il possesso nelle altrui opinioni, quando un tal metodo o era tralasciato, perchè si considerava come inutile, o era aborrito, perchè si apprendeva come il più difficile di qualunque altro. Siccome ha il nome di Aritmetica quella parte di Matematica, che con i numeri risolve le sue operazioni, così porta il nome di Algebra questa, che opera con lettere, cioè di Aritmetica più perfetta, o di Aritmetica più speciosa. Come nell' Aritmetica si distinguono le quantità fra di loro, si distinguono nell' Algebra, considerandosi alcune come incomplesse, o semplici, essendo le altre complesse, o composte, e non sempre tutte positive, ma talvolta ancora negative, nè sempre tutte commensurabili, ma molte incommensurabili, sorde, irrazionali, e capaci sempre anche loro di essere, o ingrandite, o impiccolite, rispetto a quelle considerazioni, alle quali possono assoggettarsi. Le grandezze complesse, o composte sono quelle, che si trovano legate assieme con l' uno, o l' altro di questi due segni †, che significa più, — che significa meno. Così a † $b - c$, ovvero $c - d$ † e — &c. sono esempj di quantità complesse, laddove tolti tutti questi segnali, diventano quantità incomplesse. Si dice quantità, o grandezza positiva, e reale quella, che produce qualche cosa di reale in chi si afferma, così tre gradi di velocità, che abbia un peso, si dice, che ha qualche cosa di positivo, e reale; di quel corpo poi, che paragonato ad un altro ha meno gradi di velocità, si dice, che ha una

perfezione negativa; così, ſe una velocità di 30 gradi ſi paragoni ad una di 50, ſi può dire, che ella è ugaale a 50—20, e queſto —20 è una quantità negativa, o una mancanza, che la rende inferiore al 50 e fa, che il 50 abbia 20 più che non ha il 30. Grandezze irrazionali, ſorde, o incommenſurabili ſono tutte quelle grandezze, che rapportate ad altre non poſſono eſprimerſi con qualche nome; e di queſta natura ſono tutte quelle grandezze, delle quali levata la radice quadrata, o cuba, rimane qualche coſa, perchè non ſi può trovare qualſiſia numero, o intero, o rotto, che ſerva ad eſſe per un eſatta miſura. Dove ſi trova queſto ſegno $\sqrt{}$, che è chiamato ſegno radicale, ſi ha da intendere, che in quel luogo ſi parla di qualche grandezza incommenſurabile. Si vedrà talvolta queſto ſegno ſcritto ſenza alcuna cifra al di ſopra, ed allora eſprimerà una radice quadrata, e ſe avrà qualche cifra, come $\sqrt[3]{}\,\sqrt[4]{}\,\sqrt[8]{}$, ſignificherà radice cuba, radice quarta, radice ottava, &c. Si deve queſto ſegno radicale eſtendere ſopra tutti i termini della grandezza, di cui ſi nota la radice, quando la grandezza è una di quelle, che ſono dette *compleſſe*, e ſi ſcriverà $\sqrt[7]{ab \dagger bc}$ per ſignificare la radice ſettima di $ab \dagger bc$, ovvero $\sqrt[5]{a \dagger b \dagger c}$ per accennare la radice quinta di $a \dagger b \dagger c$, e così delle altre.

II. Paſſando ora noi a vedere in qual modo le ſemplici grandezze s'innalzano col mezzo delle lettere, oſſerviamo anche in queſto luogo due ſtrade, quali ſono l'addizione, e la multiplicazione. Si aggiungono inſieme, mettendo tra loro il ſegno †, ſi multiplicano quando ſi legano inſieme ſenza alcun ſegno: così dovendoſi ſommare le grandezze *a b c* ſi deve ſcrivere $a \dagger b \dagger c$. Volendoſi le medeſime multiplicare, ſi ſcrive *a b c*. Nell'addizione le lettere, che ſi trovano ripetute, ſi congiungono inſieme col mezzo delle cifre, e queſte ſi pongono avanti, a differenza della multiplicazione, che pone la cifra dopo la lettera; onde, ſe ſi hanno da aggiugnere queſte quantità *a. a. a. a* ſi ſcrive 4 *a*; ſe ſi hanno da multiplicare, ſi ſcrive a^4. Poſſono avere le date quantità da ſommarſi appreſſo di loro i numeri, e in queſto caſo, ſe le grandezze ſono le medeſime, come 3 *b*. 2 *b*. ſi ſommano inſieme i numeri, e appreſſo ſi ſcrive una lettera ſola in queſto modo 5 *b*; ſe ſono diverſe, come 3 *b*. 2 *f*. 4 *g*. ſi laſciano ſtare come ſono, e ſolo ſi framezzano i ſegni dell'addizione, e ſi

ſcri-

ſcrive $3b + 2f + 4g$. Se finalmente le grandezze parte ſono notate colle medeſime lettere, e parte con lettere differenti, come $2b.\ 1f.\ 3c.\ 6b.\ 2f.$ ſi ſommano le lettere, che hanno il medeſimo numero, e col ſegno $+$ ſi congiungono alle altre, ſcrivendoſi $8b + 3f + 3c$. Nella multiplicazione poi, ſe le grandezze notate co' numeri ſono le medeſime, come nel primo eſempio $3b \times 2b$, ſi multiplicano i numeri fra di loro, e ſi congiungono le lettere, ſcrivendoſi $6bb$, e ſi farebbe lo ſteſſo, quantunque le quantità foſſero diverſe; così date $2a \times 3b$, oppure $6ab \times 2cd$, ſi multiplicherebbero con ſcrivere $6ab$, ovvero $12abcd$; e ſe finalmente, oltre l'eſſer numerate le lettere nella parte davanti, anche dopo di eſſe vi foſſero i numeri, come in queſto eſempio $6a^3 \times 2a^3$, multiplicati i numeri antecedenti, ſi aggiugnerebbero le lettere con ſommare i numeri poſteriori, onde ſi ſcriverebbe $12a^6$; non ſi ſommerebbono però i numeri poſteriori, ſe le lettere foſſero differenti, ma ſi ſcriverebbe ciaſcheduna lettera col ſuo numero, come multiplicandoſi $6a^3 \times 2c^2$, ſi ſcriverebbe $12a^3c^2$. Oſſerviamo ora come s'ingrandiſcono fra di loro le quantità compleſſe, o compoſte.

III. L'ingrandimento delle quantità compleſſe per via dell'addizione, ſi fa nella ſteſſa maniera, che quello delle quantità incompleſſe, coll'inſerire fra le due quantità compleſſe il ſegno $+$, qualunque ſia il ſegno, che ſi trova fra le quantità, che ſi hanno da aggiugnere inſieme: per tanto dato $a + e$ da aggiugnerſi ad $s + t$, la ſomma riſulterà $a + e + s + t$, e ſe ſia dato $a + b$ per unirſi alla quantità $d - e$, ſi farà queſta unione con ſcrivere $a + b + d - e$. Si oſſerva in queſta operazione, che occorrendo le medeſime lettere nelle ſomme, che ſi hanno da congiugnere inſieme, per abbreviare l'operazione, ſi poſſono tralaſciare, e nel luogo loro ſi può aſſegnare alla prima di eſſe il numero di tutte le altre; così dovendoſi unire $a + b$ con $a + b$, ſi può ſcrivere $2a + 2b$, e lo ſteſſo ſi fa, ſe nelle lettere delle ſomme ſi trovano i numeri, mentre nella operazione ſi hanno da ſommare inſieme gli uni con gli altri, ſicchè date queſte due ſomme

$$\begin{array}{l} 2a + 2b + 3c \\ 5a + 3b + 5c + b \\ \hline 7a + 5b + 8c + b \end{array}$$

da unirſi fra loro, ſi ſcriverà

D 2 e ſi

e si farebbe lo stesso, se nell' esempio dato, in luogo del segno † si trovasse il segno —, e si unirebbero le quantità col segno —. Se accade, che le medesime lettere poste nelle somme abbiano numeri contrarj, si lascia nella operazione quella, che è di più, o che è di meno nelle quantità notate con segni contrarj, premettendo il segno †, se avanza di più, o il segno meno, se manca qualche cosa, come se si notassero $\dagger\, 6m - 4m$, ci sarabbero $2m$ di più, e questi si noterebbero nella operazione col segno †, e se fossero $4m - 6m$, rimarrebbero meno $2m$ da notarsi al suo luogo. Sia dunque dato $a \dagger 3b - 4m$ da unirsi alla quantità $a - 2b \dagger 3m$, risulterà la quantità $2a \dagger b - m$. Sia dato in quest' altro esempio $2c \dagger 3d \dagger 5m$ da unirsi alla somma $5c - 4d - 3m$, risulterà la somma $7c - d \dagger 2m$.

Quello, che si opera per unire insieme due somme, si fa ancora quando si tratta di unirne tre, o più altre, o si premettano i numeri alle lettere, che esprimono le quantità, o questi numeri sieno posposti alle medesime lettere. Gli esempj, che quì si aggiungono, dimostrano come si deve operare con queste regole.

Esempio primo.

$$\begin{array}{l} 2b \dagger 3c^2 - f \dagger 5m^3 \\ 5b - 5c^2 \dagger f - 8m^3 \\ 4b \dagger 8c^2 - f \dagger 4m^3 \\ \hline 11b \dagger 6c^2 - f \dagger m^3 \end{array}$$

Esempio secondo.

$$\begin{array}{l} 12m \dagger 3p - 30r \\ 5m - 8p - 22r \\ 23m \dagger 10p \dagger 10r \\ \hline 40m \dagger 5p - 42r \end{array}$$

Esempio terzo.

$$\begin{array}{l} 2a - 5b - 7qu \dagger 3t \\ 3a - 7b \dagger 12qu \dagger 9x \\ 6n \dagger 2c - 8qu - 6x \\ \hline 5a - 12b - 3qu \dagger 3t \dagger 6n \dagger 2c \dagger 3x \end{array}$$

Esempio quarto.

$$\begin{array}{l} 3a - 5b \dagger 2c \dagger d - f \\ 5a - 3b - 4c - 3d \\ \hline 8a - 8b - 2c - 2d - f \end{array}$$

da tutti questi esempj chiaramente si vede come i segni del più, e del meno abbiano a usarsi nell'addizione, e come le quantità contrassegnate colle medesime lettere si abbiano da mettere le prime, con aggiugnere nel fine della operazione tutte

te le altre, che si trovano sole nelle stabilite somme da congiugnersi assieme.

IV. Lo ingrandimento, che si fa delle quantità complesse contrassegnate per lettere col mezzo della multiplicazione, non è punto diverso da quello, che si fa col mezzo delle cifre Aritmetiche, ciascuna delle quali, che si trova nel numero multiplicante, deve multiplicare ciascuna delle cifre, che compongono il numero da multiplicarsi, accadendo anche in tutta questa multiplicazione per lettere, di dover multiplicare ciascuna di quelle, che hanno da ingrandirsi; per ciascheduna delle altre, che si trovano nel multiplicante. Si osserva nel particolare de' segni, che dove si trova la necessità di multiplicare lettere, che hanno il segno † per lettere, che hanno lo stesso segno, oppure lettere, che hanno il segno — per lettere, che hanno il medesimo segno, il prodotto si esprimerà col segno †. Se poi nella multiplicante lettera vi è il segno †, nella multiplicata il segno —, o al contrario nella multiplicata il segno †, nella multiplicante il segno —, allora nel prodotto si deve vedere il segno —.

Questa multiplicazione si fa a scala, come la multiplicazione de' numeri, e compita che sia; si fa la somma secondo le regole della addizione. Quì si propongono tre esempi, applicando a ciascheduno i casi, che si sono avvertiti.

Esempio primo.

Si ha da multiplicare $a + b - c$ per $a - b - c - d$. Multiplicandosi dunque per a, la quantità data risulta $aa + ab - ac$, e questa è la prima somma. Si passa poi a trovare la seconda somma, multiplicando per $-b$, e nasce la seconda somma, che comincia col segno —, che si pone sotto il primo segno della precedente somma, come appresso $-ab - bb + bc$. Compita la seconda somma, si trova la terza, che risulta dalla multiplicazione per $-c$, e questa ancora comincia col segno — posto sotto il secondo segno della antecedente somma, con tutto quello, che va con esso, così $-ac - bc + cc$. Finalmente si trova l'ultima somma, multiplicandosi per $-d$, e la somma, che ancora essa comincia col segno — posto sotto il secondo segno della terza somma scritta in questo modo

do $-ad-bd\dagger dc$ compirà tutta la multiplicazione, per lasciar poi, che se ne faccia la somma, quale si vede nel quì aggiunto disteso di ogni somma al suo luogo.

Esempio primo.

$$a\dagger b-c \times a-b-c-d$$
$$aa\dagger ab-ac$$
$$-ab-bb\dagger bc$$
$$-ac-bc\dagger cc$$
$$-ad-bd\dagger cd$$
Somma int. $aa-2ac-bb\dagger cc-ad-bd\dagger cd$

Esempio secondo.

$$a\dagger b\dagger c\dagger d \times a-b\dagger c-d$$
$$2a-ab\dagger ac-ad$$
$$\dagger ab-bb\dagger bc-bd$$
$$\dagger ac-cb\dagger cc-cd$$
$$\dagger da-db\dagger dc-dd$$
Somma $2a * \dagger 2ac-bb * * -2bd\dagger cc * -dd$

Esempio terzo.

$$-e\dagger f\dagger g\dagger b \quad e-f-g-b$$
$$-ee\dagger ef\dagger eg\dagger eb$$
$$\dagger ef-ff-fg-fb$$
$$\dagger ge-fg-gg-gb$$
$$\dagger be-fb-gb-bb$$
$$-ee\dagger 2ef\dagger 2eg\dagger 2eb-ff-2fg-2fb-gg-2gb-bb$$

Esempio quarto, in cui si premettono le cifre Aritmetiche alle lettere.

$$8p-4qu-20u \times 4p-2qu-40u$$
$$32pp-16pqu-80pu$$
$$-16pqu\dagger 8ququ\dagger 40quu$$
$$-320up\dagger 160uqu\dagger 800uu$$
Som. $32pp-32pqu-400pu\dagger 8ququ\dagger 200quu\dagger 800uu$

In

In alcuni di questi esempj accade di osservare alcune stellette, che si sono poste per non rendere la somma troppo lunga, e la regola dell' operato si darà, dove tratteremo del modo d' impiccolire la quantità, bastando solo quì avvertire, che dove si trovano le medesime lettere una volta notate col segno †, ed un altra volta notate col segno —, queste si hanno da tralasciare nel far la somma di tutte le grandezze. Si osserva di più, come i segni applicati alle lettere si abbiano da distribuire nella scala della operazione, e come si possano ingrandire col mezzo di queste regole date le quantità tutte positive, che sono le notate col segno †, e le quantità negative, che sono le altre col segno — descritte. Generalmente poi, e per tutti i casi si osserva, come questa operazione è scambievole fra le grandezze multiplicanti, e le altre date da multiplicarsi; perchè sia qualunque di queste assegnata per multiplicante, sempre risulterà la medesima somma, come si vede risultare, se si opera colle cifre aritmetiche; e poco similmente importa, che si scriva per esempio † *ab*, oppure † *ba*, non cagionando nel valor delle lettere differenza alcuna di quantità questa mutazione di luogo, e in questo particolare si distingue la combinazione delle lettere dalla combinazione de' numeri, i quali alterano notabilmente l' espressione delle quantità, che esprimono, anteposti, e posposti fra loro, come ognun vede, quando ha da leggere questo numero 12, o il suo rovescio 21.

Le regole, che fino ad ora si sono stabilite per l' ingrandimento delle quantità espresse con numeri, o con lettere, si applicano non solo a quelle specie, delle quali già si è parlato, ma ancora a tutte le altre, che col mezzo di queste operazioni si possono formare. Egli è vero, che quantunque la materia sia una in tutte le cose, non però tutte le cose sono le medesime, ma queste si rendono diverse, secondochè le combinazioni della materia si veggono in tutte differenti. Ed ecco perchè ancora dalle varie multiplicazioni, e addizioni, che si possono fare intorno alle quantità, hanno da risultare nuove specie di grandezze, delle quali ora si ha da parlare, per considerarle sublimate fino al più alto grado, a cui si può, come già da bel principio fu accennato. Portano tutte le grandezze a motivo di questo riguardo un nome singolare, quale è il nome

poten-

potenza, perchè considerata ciascheduna da se, si vede, che conserva in se stessa questa potenza, o facoltà di poter essere sublimata per molti gradi, in ciascuno de' quali poi, quando osserviamo le nuove specie di differenti grandezze, ci vengono queste additate come tante potenze prodotte, con multiplicarle, ora in una maniera, ora in un altra. I nomi singolari, che hanno queste potenze, sono *radice*, *quadrato*, *cubo*, *quadrato quadrato*, *surfolido*, *quadrato cubo*, &c. ed in tutte si dà un proprio distintivo, o vogliamo chiamarlo carattere esponente col mezzo delle cifre aritmetiche poste all' alto del lato destro di quella lettera, per cui si esprime qualsisia potenza, come in questi esempi si vede $b . b^2 . b^3 . b^4 . b^5 . b^6$. Ogni grandezza nel suo primo principio può considerarsi come infinitamente piccola, e per tale ci vien proposta, quando la troviamo espressa con questo carattere $b^{-\infty}$. può nientedimeno sublimarsi all' infinito, e a questo grado infinito la riconoschiamo salita, se la vediamo manifestata con questa formula b^{∞}. Allora dunque comincia a mostrare qualche estensione, o misura, che gli può convenire, quando è elevata al primo grado, che è quello, a cui si vede salita, quando si scrive b^1: e in questo grado non ha la grandezza, che una sola dimensione, la quale, perchè è principio, e sorgente di tutte le altre dimensioni, alle quali può alzarsi, perciò si chiama *radice*. Il nome della seconda potenza è *quadrato*, perchè risulta dalla multiplicazione di due grandezze uguali. L' altra potenza si chiama *cubo*, per essere fatta da tre radici uguali, come risultano le altre potenze, da quattro, da cinque, da sei, &c. uguali radici. Di queste potenze non solo possiamo avere gli esempj nelle lettere date, ma si possono addurre ancora alcuni numeri, a' quali convengono i nomi di tutte le potenze. Ogni numero può chiamarsi *radice*, perchè ogni numero, o multiplicandosi in se stesso, o multiplicando un altro, produce una più alta quantità, a cui subito che sia salito gli convengono due dimensioni, e perciò questa quantità si chiama *piano*, multiplicando il 3 per il 2, produce il 6, e questo numero si dice *numero piano*, come si chiama *quadrato*, se risulta dalla multiplicazione di un numero in se stesso, qual sarebbe il 16, che risulta dalla multiplicazione del 4 in se stesso; si distinguano però fra di loro, perchè dove le dimen-

sioni

ſioni del primo piano ſono diſuguali, le dimenſioni di queſto ſecondo ſono tutte uguali fra loro. Creſcendo le dimenſioni al numero, creſce il numero in potenza, e ſi cangia di nome, e generalmente ſi chiama *ſolido*; così il numero 30 ſi chiama un ſolido, perchè naſce da tre numeri, o dimenſioni 2. 3. 5. La diverſità delle dimenſioni dà il nome a queſto ſolido, ed ha il nome di *cubo*, ſe i tre numeri, o le tre dimenſioni, che lo producono ſono uguali, come 4. 4. 4, che producono il cubo 64. Ha il nome di *quadrato quadrato*; ſe tutte quattro le dimenſioni ſono uguali, cioè, ſe riſulta dalla multiplicazione di due numeri quadrati, come il 16, che ha per radice un quadrato. Ha il nome di *ſurſolido*, ſe riſulta da un cubo multiplicato per il quadrato della ſua radice, come il 243, che riſulta dal numero cubo 27 multiplicato pel quadrato della ſua radice 9. Ha il nome di *quadrato cubo*, ſe eſſendo il numero quadrato, ha per radice un cubo, come il 729, che riſulta dalla multiplicazione in ſe ſteſſo del 27 numero cubo, e così degli altri.

VI. Diſtinti in queſto modo i caratteri delle potenze, ſarebbe facile colla multiplicazione ſublimare qualunque quantità a tutti i gradi, che gli poſſono convenire, non dovendoſi a queſto effetto far altro, ſe non quanto ſi è detto in propoſito d'ingrandire una quantità eſpreſſa, o con cifre, o con lettere col mezzo della multiplicazione. Laonde, ſe la quantità data foſſe $b + d$ per alzarla alla ſeconda potenza, o ſecondo grado, ſi dovrebbe multiplicare in ſe ſteſſa. Se doveſſe ſublimarſi al terzo grado, biſognerebbe prima multiplicarla in ſe ſteſſa, e poi il prodotto di nuovo multiplicarlo per la data quantità $b + d$. Se ſi doveſſe ſublimare al quarto grado, ſi prenderebbe il ſuo quadrato, e ſi multiplicherebbe in ſe ſteſſo. Se ſi doveſſe trovare la quinta potenza, ſi prenderebbe il riſultato di quando fu ſublimata al terzo grado, e queſto ſi multiplicherebbe per il quadrato della ſua radice; e ſe per ultimo ſi doveſſe ſublimare alla ſeſta potenza, ſi prenderebbe il ſuo cubo, e ſi multiplicherebbe queſto cubo in ſe ſteſſo. Quello, che ſi è detto per ſublimare la data quantità $b + d$ a tutte le ſue potenze, ſi dice ancora, ſe la quantità data ſia $b - d$, mentre col mezzo di tutte le precedenti operazioni applicate a queſto ſecondo eſempio, ſi ſalirebbe fino

all'ultimo grado, a cui ſi voleſſe ſublimare una tale quantità. Si oſſerva a queſto propoſito, come talvolta ſi può adoprare una maniera più corta per ſublimare qualunque più compleſſa quantità a qualſiſia potenza, e queſto mezzo è di tirare ſopra tutti li termini della data quantità una linea, e allo eſtremo di queſta porre quel numero, che vuol' eſprimere la potenza dimandata; quindi per ſublimare alla ſeſta potenza la quantità $c \dagger d \dagger f \dagger n$, ſecondo queſta regola, ſi ſcrive $\overline{c \dagger d \dagger f \dagger n}^{6}$, e così ſi può fare, data qualunque altra quantità, e richieſto, che ſia ſublimata a qualſivoglia potenza; dunque ogni volta, che ſi troverà la quantità ſcritta a quel modo, una tale eſpreſſione ci porterà a queſta notizia della quantità ſublimata. Si oſſerva ancora, che dovendoſi multiplicare una potenza per un altra (ſuppoſto però, che le potenze ſieno di una medeſima grandezza, o compleſſa, o incompleſſa) ſi ſommano i numeri, che manifeſtano queſte potenze, per eſempio, ſe ſi ha da multiplicare la terza potenza di $c \dagger b$ per la quinta, ſommato il 3 col 5, ſi ſcrive $\overline{c \dagger b}^{8}$, e così reſta fatta queſta multiplicazione: laddove poi, ſe è una potenza già formata, quella che ſi deve elevare ad una ſuperiore, i numeri, che le diſtinguono ſi multiplicano fra loro, ed il riſultato ſi ſcrive appreſſo la ſolita linea con ſcrivere ſotto di eſſa la potenza, che ſi doveva inalzare; e così, quando la terza potenza di $c \dagger b \dagger d$ ſi aveſſe da alzare alla ſeſta, ſi ſcriverebbe $\overline{c \dagger b \dagger d}^{18}$, e queſto vorrebbe dire una terza potenza ſublimata alla ſeſta. Diſſi, che le potenze dovevano eſſere di una medeſima grandezza, come ſarebbero, ſe ſi doveſſe multiplicare $a^3 \times a^5$, ovvero elevare a^3 ad a^5, perchè, ſe foſſe diverſa la grandezza, come $a^3 \times b^5$, potrebbe naſcere un grande inconveniente, ſe ſi ſcriveſſe $a^8 b$, oppure $a\, b^8$, eſſendo impoſſibile, che due quantità di diverſo valore, così multiplicate, rimanghino elevate ad una potenza ſuperiore; in queſto caſo dunque ſi ſcriverebbe $a^3 b^5$. Si oſſerva per ultimo, che ſe ridotta la potenza nella maniera accennata ad una ſuperiore, ſi doveſſe poi multiplicare per una quantità incompleſsa, o per molte compleſse, ſervirebbe unire le quantità multiplicanti col ſegno della multiplicazione appreſso alla formata potenza, con tirare ſopra alle multiplicanti una linea, che tutte le copriſse; così, ſe ſi deve multiplicare $\overline{b \dagger c \dagger d \dagger e}^{7}$ per $a \dagger b$, baſte-

basterà scrivere come quì appresso: $\overline{b+c+d+e}^7 \times \overline{a+b}$, e questo indicherà la potenza multiplicata per $a + b$. Questa usanza di esprimere la multiplicazione di una potenza per un altra quantità complessa, si costuma talvolta per abbreviare anche la multiplicazione ordinaria delle grandezze, quando la questione lo comporti, e solo serva l'accennare, che una quantità è multiplicata; si procuri però, servendosi di questo mezzo, che la linea cuopra tutte le lettere della quantità, che multiplica, altrimenti, se qualcheduna rimanesse scoperta, vorrebbe dire, che questa lettera scoperta, fatta la multiplicazione, si dovrebbe tale quale aggiugnere al prodotto della multiplicazione.

VII. Quello, che ora deve dimostrarsi, è la maniera di unire insieme, o di multiplicare fra loro le grandezze incommensurabili, che, come abbiamo detto, nascono dalla estrazione di radici da certe grandezze, che non sono perfetti quadrati, o perfetti cubi, e che però anche tali radici hanno da rimanere quantità *incommensurabili*, *irrazionali*, o *sorde*. Prima però di ragionare di questa addizione, e multiplicazione, è necessario, che si premettano alcune regole date apposta per operare con esse la riduzione di due radici sorde, e incommensurabili, sotto il medesimo segno, e istesso nome, oppure ad una espressione più semplice, cioè al più piccolo termine, con cui si possono esprimere. Ridurre sotto il medesimo segno due radici sorde, delle quali una è elevata ad una potenza minore dell'altra, come la $\sqrt{a^2}$, che è potenza minore della $\sqrt[3]{b^3}$, vuol dire ridurre la $\sqrt[2]{}$ alla denominazione della $\sqrt[3]{}$. Per fare questa riduzione, si prende la terza potenza della grandezza a, e si scrive $\sqrt{a^3}$, che sarà ridotta al medesimo nome della $\sqrt[3]{b^3}$. Similmente per ridurre il 5 alla denominazione della $\sqrt{27}$, basta multiplicare il 5 in se stesso, e avanti il prodotto mettere il segno radicale $\sqrt{}$, che sarà $\sqrt{25}$, una potenza simile alla potenza $\sqrt{27}$. Non sempre però riesce di potere operare con questa regola, ed allora principalmente questa impossibiltà apparisce, quando le radici date sono tali, che una è elevata alla seconda potenza, e l'altra è elevata alla terza, e non si può estrarre dalla prima la radice quadrata, perchè per essa multiplicandosi l'intera quantità radicale, si alzi al grado della prima; per esempio, se sia data la $\sqrt{5^2}$

 da

da elevarsi alla radice cuba $\sqrt[3]{40}$, ben si vede, che da 5 non si può avere la giusta radice quadrata, e però per operare in occasione di questo, e di altro simile caso, è d'uopo alzare a grado maggiore tutte due le date radici, e ciò si fa con multiplicare questa radice quadrata $\sqrt{5^2}$ in se medesima, e deve risultare 25, cioè il quarto suo grado, da esprimersi così $\sqrt[4]{25}$, e poi con multiplicare questa $\sqrt[4]{25}$ per il precedente suo quadrato $\sqrt[2]{5}$, la quale multiplicazione ci lascia il 125, che è il grado maggiore, a cui si alza, e che si esprime così $\sqrt[6]{125}$. Fatta colla prima radice la sublimità fino al grado proposto, si alza la seconda radice $\sqrt[3]{40}$ al grado di quella, col multiplicare il cubo $\sqrt[3]{40}$ per se stesso, ciò che fa 1600, cioè il quadrato cubo, da esprimersi con questo segno $\sqrt[5]{1600}$ con che subito si vede come tutte due le radici date $\sqrt[2]{5}$, $\sqrt[3]{40}$, si sono ridotte ad avere il segno medesimo, e il medesimo nome, perchè tutte due sono espresse così $\sqrt[6]{125}$ $\sqrt[6]{1600}$, senza che si sia ingrandito, o punto alterato il primo loro valore, che sempre rimane il medesimo in sostanza, e solo accidentalmente si muta, essendo sempre la prima radice quella, che serve per radice a tutte le altre potenze.

VIII. Serve la seconda regola per ridurre le quantità incommensurabili ad una più semplice espressione, la quale sempre non può ritrovarsi, ma pure una qualche volta si dà, ed allora appunto quando la radice sorda data contiene qualche volta un numero, che sia numero quadrato, oppure un numero, che sia cubo, qual sarebbe nella $\sqrt{27}$ il 9 numero quadrato, e nella $\sqrt{24}$ l'8 numero cubo. Ogni qual volta dunque questo numero sia trovato, se è quadrato, non si fa altro, se non che prendere la sua radice, e questa si scrive tanto alla parte sinistra del segno radicale, quanto alla parte destra, se è cubo alla parte sinistra del segno $\sqrt{}$ si scrive la radice di questo cubo, e a destra si pone il numero, che esprime quante volte il cubo è entrato nel numero diviso, e sopra il segno $\sqrt{}$ si pone il segno della terza potenza 3, e si rende in questa maniera più semplice la espressione della radice sorda; così se la radice sorda data è la precedente $\sqrt{27}$, si prenderà il 3, che è radice del 9 numero divisore, e si scriverà per l'espressione più semplice $3\sqrt{3}$, e vorrà dire, che

$3 \times \sqrt{3}$

$3 \times \sqrt{3} = \sqrt{27}$, e se la radice data è $\sqrt{24}$ si scriverà $2\sqrt{3} = \sqrt[3]{24}$. Se le radici sorde date sono due, è necessario, che si trovi un numero, il quale entri per l'appunto nell'una, e nell'altra data radice; questo però non serve, ma di più è necessario avvertire, che i numeri, i quali esprimono quante volte il trovato entra in ciascheduna delle due date radici, sieno due perfette potenze, cioè, o due numeri quadrati, o due numeri cubi. Essendosi convenuto in queste due condizioni, si prende la radice di queste due perfette potenze, e preparati i segni radicali, una si scrive alla sinistra del primo segno radicale, e l'altra similmente si scrive alla sinistra del secondo segno radicale, poi alla destra tanto del primo, che del secondo segno radicale, si pone il numero, che si è trovato entrare per l'appunto nelle due date sorde radici, e con questo rimangono le radici ridotte ad un medesimo termine, e alla più semplice espressione. Eccone un esempio. Sono date queste due radici sorde

Radice prima $\sqrt{96}$ Radice seconda $\sqrt{216}$

L'una, e l'altra di queste radici contiene per l'appunto il 6, la prima 16 volte, la seconda 36 volte, e tanto il 16, che il 36 sono perfette potenze, o numeri quadrati. La radice del 16 prima potenza è 4; la radice del 36 seconda potenza è il 6. Si scriveranno dunque questo 4, e questo 6 ciascheduno alla sinistra del proprio segno radicale, così $4\sqrt{}$, $6\sqrt{}$, e si porrà alla loro destra il numero 6, trovato capace a misurare le due radici, sicchè scrivendo noi $4\sqrt{6}$, $6\sqrt{6}$, avremo terminata l'operazione, cioè avremo tanto il $4\sqrt{6} = \sqrt{96}$, quanto il $6\sqrt{6} =$ alla $\sqrt{216}$.

IX. Con queste due regole, stabilita la maniera di ridurre le date radici sorde ad un espressione più semplice, e al medesimo nome, si può con facilità far passaggio all'addizione, e multiplicazione delle medesime, facendosi l'addizione con sommare insieme le radici delle due perfette potenze osservate nella riduzione delle date sorde radici sotto il medesimo nome, così che, se nell'esempio prodotto le radici si sono trovate 4, e 6, si sommeranno insieme questi due numeri, e si farà 10 da porsi avanti al segno radicale, col porre

dopo

dopo il numero, che si è trovato misurare per l'appunto tutte due le radici sorde, cioè nell'esempio medesimo il 6. Ecco dunque, che scrivendosi $10\sqrt{6}$, si è fatta l'addizione delle due radici date $\sqrt{96}$, $\sqrt{216}$. Si potrebbe questa addizione fare in altra maniera per le radici sorde seconde, cioè de' quadrati, quando i numeri di queste radici multiplicati fra loro producessero un quadrato, e l'operazione sarebbe tale. Date le due radici, si multiplicherebbe l'una per l'altra, e levato dal prodotto la radice quadrata, questa si raddoppierebbe, poi sommati insieme i numeri delle radici, questa somma si unirebbe al doppio della radice, e in questa somma posta dopo il segno radicale, si avrebbe la somma delle due date radici. Eccone l'esempio $\sqrt{6}$, $\sqrt{24}$.

Si multiplichino insieme queste due radici $\sqrt{6} \times \sqrt{24}$, il prodotto del 6 pel 24 è 144. La radice quadrata di 144 è 12. Di questa radice preso il doppio, si ha 24. Ora si prenda la somma delle radici, che è 30, e questa unita al 24, si avrà 54, che scritto dopo il segno radicale in tal modo $\sqrt{54}$, lascerà la somma delle date radici. Che se non si voglia operare nella prima maniera, e non si possa operare colla seconda a causa di non risultare dalla unione de' numeri delle due radici seconde un numero perfettamente quadrato, si potranno sommare le radici sorde con framezzare ad esse il solito segno del più; onde, se le radici sorde date fossero $\sqrt{15}$, $\sqrt{27}$, si sommerebbero, scrivendole in questa guisa $\sqrt{15} + \sqrt{27}$.

X. Ora dovendosi multiplicare le radici sorde, si dà per regola generale di multiplicare l'una per l'altra, perchè la radice quadrata del prodotto esprimerà la multiplicazione delle due radici: così la $\sqrt{bcde}$ si conosce prodotta dalla multiplicazione della $\sqrt{bc}$, per la $\sqrt{de}$. Ma dovendosi multiplicare le radici dopo fatta l'addizione, si multiplicano fra di loro i termini posti avanti a i segni radicali, e si multiplicano un per l'altro i termini posti dopo, sicchè, se fossero date queste due radici $\sqrt{96}\sqrt{216}$, perchè fatta la riduzione al loro più piccolo termine, si sono trovate $4\sqrt{6}$, $6\sqrt{6}$, si multiplicherà il 4 primo termine della prima riduzione pel 6 primo termine della seconda riduzione, e si avrà 24; poi si multiplicheranno gli ultimi termini 6, e 6, e si avrà 36, e nel mezzo a questi due risultati si porrà il segno $\sqrt{}$, che però scrit-

ſcritto così $24\sqrt{36}$, ſi avrà la multiplicazione delle radici $\sqrt{96}$, $\sqrt{216}$; ma perchè in queſto eſempio accade, che i termini delle radici date da multiplicarſi fra loro formano un numero perfettamente quadrato 20736, e per conſeguenza ſi trova un altro numero ſolo, che multiplicato in ſe ſteſso, produce la medeſima ſomma, e queſto è il 144, però accadendo in altre congiunture un caſo ſimile, ſi dovrà, fatta la multiplicazione fra loro de' primi termini poſti avanti il ſegno $\sqrt{}$, multiplicare il loro riſultato per uno ſolo de' ſecondi; laonde, ſe nella prima multiplicazione del 4 pel 6, riſulta il 24, queſto numero ſi multiplicherà pel 6, e ſi avrà il 144, e poi, ſcrivendoſi $24\sqrt{144}$, ſi farà fatta la giuſta multiplicazione delle due radici $\sqrt{96}$, $\sqrt{216}$. Non ſolo quando il prodotto da due termini radicali è numero perfettamente quadrato, ſi deve operare come ſi è avvertito, ma ancora quando dividendoſi l' uno per l' altro, riſulta un quoziente perfettamente quadrato. Che però è bene notare queſto caſo, per operare quello, che occorre con più eſattezza. L' eſempio a cui ſi può applicare la regola precedente ſia nella $\sqrt{12} \times \sqrt{72}$ da multiplicarſi. L' eſpreſſione più ſemplice della prima è $2\sqrt{3}$. L' eſpreſſione più ſemplice della ſeconda è $3\sqrt{8}$. Dunque fatta la multiplicazione come ſi è detto, riſulterà $6\sqrt{24}$ prodotto di $\sqrt{12} \times \sqrt{72}$, nel qual riſultato, come in tutti gli altri, che ſi poteſsero produrre, ſi vedrà ſempre il modo di multiplicare le ſorde radici. Si può aggiugnere, che ſe la quantità data ſi doveſse multiplicare in ſe ſteſsa, come $6\sqrt{5} \times 6\sqrt{5}$, ſi multiplicherebbero le quantità poſte avanti al ſegno radicale, e il loro prodotto 36 ſi multiplicherebbe per la quantità poſta dopo il ſegno radicale, e il riſultato 180 ſarebbe la multiplicazione di $6\sqrt{5} \times 6\sqrt{5}$, come ſarebbe bbc la multiplicazione di $b\sqrt{c} \times b\sqrt{c}$.

XI. Una denominazione particolare conviene al riſultato della addizione di queſte grandezze incommenſurabili, e queſta è, che alle volte ſono chiamati queſti riſultati *binomi*, ora *multinomi*, ed ora *apotomi*. Sono detti *binomi*, ſe ſono riſultati di due, ſono detti *multinomi*, ſe ſono riſultati di tre, o più grandezze incommenſurabili; e le differenze, che ſi trovano nelle ſteſse grandezze incommenſurabili, ſono quelle, che ſi eſprimono colla voce di *apotomi*; ſebbene preſso di altri queſta differenza non vi è, eſsendo eſſi ſoliti di diſtinguere colla mede-

medesima voce di *binomi* anche queste differenze. Se occorresse, che molti di questi binomi si avessero da unire insieme, o che uno si dovesse multiplicare per l'altro, in queste due operazioni si praticherebbero le stesse regole, che si praticano nell' addizione, e multiplicazione delle quantità composte, o complesse. Però dati da sommarsi questi binomi

$$25 - 6\sqrt{24}$$
$$24\sqrt{144} - 3\sqrt{8}$$

Si scriverà——$25 - 6\sqrt{24} + 24\sqrt{144} - 3\sqrt{8}$

e dato da multip. $a + \sqrt{b} \times c + \sqrt{d}$ si farà

$$ca + c\sqrt{b}$$
$$+ a\sqrt{d} + \sqrt{bd}$$

e la som.loro farà $ca + c\sqrt{b} + a\sqrt{d} + \sqrt{bd}$

XII. Quando i termini delle date quantità irrazionali sono molti insieme, si multiplicano diversamente le date quantità; come pure è diversa la multiplicazione, che si ha da fare, quando le quantità date sono composte di razionali, e d'irrazionali, e le differenze di queste multiplicazioni si possono osservare negli esempj seguenti

Esempio I.

$10 + 2\sqrt{6}$ si multip.
$\times 10 + 2\sqrt{6}$
$100 + 20\sqrt{6}$
$+ 20\sqrt{6} + 24$
som. $124 + 40\sqrt{6}$

Esempio II.

$\sqrt{40} + \sqrt{60}$
$\times 40 + \sqrt{60}$
$40 + \sqrt{2400}$
$+ \sqrt{2400}\ \sqrt{60}$
som. $100 + 2\sqrt{2400} = 100 + 40\sqrt{6}$

Esempio III.

$\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{5} \times \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{5}$
$3 + \sqrt{6} + \sqrt{15}$
$+ \sqrt{6} + 2 + \sqrt{10}$
$+ \sqrt{15} + \sqrt{10} + 5$
som. $3 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{15} + 2\sqrt{10} + 2 + 5$
$= 10 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{15} + 2\sqrt{10}$

Esempio IV.

$\sqrt{2} + \sqrt{1} + \sqrt{3} \times \sqrt{2} + \sqrt{1} + \sqrt{3}$
$2 + \sqrt{2} + \sqrt{6}$
$+ \sqrt{2} + 1 + \sqrt{3}$
$+ \sqrt{6} + \sqrt{3} + 3$
som. $2 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{3} — + 1$
$+ 3 = 6 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{3}$

Eem

Esempio V.

$$
\begin{array}{l}
\quad 10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60} \\
\times\ 10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60} \\
\hline
100 + 10\sqrt{24} + 10\sqrt{40} + 10\sqrt{60} \\
\quad + 10\sqrt{24} + 24 + \sqrt{960} + \sqrt{1440} \\
\quad\quad + 10\sqrt{40} + \sqrt{960} + 40 + \sqrt{2400} \\
\quad\quad\quad + 10\sqrt{60} + \sqrt{1440} + \sqrt{2400} + 60 \\
\hline
100 + 20\sqrt{24} + 20\sqrt{40} + 20\sqrt{60} + 24 + 2\sqrt{960} + 40 + 2\sqrt{1440} + \\
2\sqrt{2400} + 60 = \\
\hline
= 224 + 20\sqrt{24} + 20\sqrt{40} + 20\sqrt{60} + 2\sqrt{960} + 2\sqrt{1440} + 2\sqrt{2400}.
\end{array}
$$

seconda somma.

$$
= 224 + 20\sqrt{24} + 20\sqrt{40} + 20\sqrt{60} + 4\sqrt{240} + 6\sqrt{160} + 10\sqrt{96}.
$$

terza somma.

XIII. La multiplicazione, che si deve fare per avere il cubo di una quantità composta irrazionale, è diversa dalla multiplicazione fatta in tutti i precedenti esempj, ne i quali la quantità composta irrazionale si è riquadrata. La differenza si può osservare nei seguenti esempj.

Esempio I.

Si deve trovare il cubo di $3 + \sqrt{2}$, di cui il quadrato trovato è $11 + 6\sqrt{2}$. Per trovare questo cubo si ha da multiplicare

$$
\begin{array}{l}
11 + 6\sqrt{2} \times 3 + \sqrt{2} \\
\hline
33 + 18\sqrt{2} \\
\quad + 11\sqrt{2} + 12 \\
\hline
45 + 29\sqrt{2}
\end{array}
$$

cubo trovato.

Esempio II.

Il quadrato di $2 + 2\sqrt{3}$, si è trovato $16 + 8\sqrt{3}$; si trovi ora della medesima quantità il cubo, che si cerca.

$$
\begin{array}{l}
16 + 8\sqrt{3} \times 2 + 2\sqrt{3} \\
\hline
32 + 16\sqrt{3} \\
\quad + 32\sqrt{3} + 48 \\
\hline
80 + 48\sqrt{3}.
\end{array}
$$

Cubo trovato.

Esempio III.

Si sà, che il quadrato di $\sqrt{4} + 3$ è $4 + 2\sqrt{12} + 3$, cercasi il cubo.

$$4 + 2\sqrt{12} + 3 \times \sqrt{4} + \sqrt{3}$$
$$4\sqrt{4} + 2\sqrt{48} + \sqrt{36}$$
$$+ \sqrt{48} + 2\sqrt{36} + 3\sqrt{3}$$
$$4\sqrt{4} + 3\sqrt{48} + 3\sqrt{36} + 3\sqrt{3}$$
$$= 4\sqrt{4} + 12\sqrt{3} + 9\sqrt{4} + 3\sqrt{3}$$
$$= 13\sqrt{4} + 15\sqrt{3} \text{ . cubo trovato}$$

Il quadrato di $\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{5}$ è $3 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{15} + 2 + 2\sqrt{10} + 5$, qual sarà il cubo? Ecco l'operazione per ritrovarlo nell'

Esempio IV.

$$3 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{15} + 2 + 2\sqrt{10} + 5 \times \sqrt{3}\sqrt{2} + \sqrt{5}$$
$$3\sqrt{3} + 2\sqrt{18} + 2\sqrt{45} + \sqrt{12} + 2\sqrt{30} + \sqrt{75}$$
$$+ \sqrt{18} \qquad + 2\sqrt{12} + 2\sqrt{30} + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{20} + \sqrt{50}$$
$$+ \sqrt{45} \qquad + 2\sqrt{30} + 2\sqrt{75} + \sqrt{20} + 2\sqrt{50} + 5\sqrt{5}$$
$$\textit{Cubo } 3\sqrt{3} + 3\sqrt{18} + 3\sqrt{45} + 3\sqrt{12} + 6\sqrt{30} + 3\sqrt{75} + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{20} + 3\sqrt{50} + 5\sqrt{5}$$
$$= 3\sqrt{3} + 9\sqrt{2} + 9\sqrt{5} + 6\sqrt{3} + 6\sqrt{30} + 15\sqrt{3} + 2\sqrt{2} + 6\sqrt{5} + 15\sqrt{2} + 5\sqrt{5}$$
$$= 24\sqrt{3} + 26\sqrt{2} + 20\sqrt{5} + 6\sqrt{30}.$$

Esempio V.

Questo ultimo esempio si propone in una quantità composta irrazionale espressa con lettere, per fare avvertito, come si debba operare col mezzo di essa. Il cubo, che si dimanda è di $\sqrt{a} + \sqrt{b}$. Si riquadrerà dunque prima la data quantità, e poi si formerà il cubo.

$\sqrt{a} +$

$$\sqrt{a} \dagger \sqrt{b} \times \sqrt{a} \dagger \sqrt{b}$$
$$a \dagger \sqrt{ab}$$
$$\dagger \sqrt{ab} \dagger b$$
$$\textit{quadrato } a \dagger 2\sqrt{ab} \dagger b$$

$$a \dagger 2\sqrt{ab} \dagger b \times \sqrt{a} \dagger \sqrt{b}$$
$$a\sqrt{a} \dagger 2a\sqrt{b} \dagger b\sqrt{a}$$
$$\dagger a\sqrt{b} \dagger 2b\sqrt{a} \dagger b\sqrt{b}$$
$$a\sqrt{a} \dagger 3a\sqrt{b} \dagger 3b\sqrt{a} \dagger b\sqrt{b} \textit{ cubo trovato}$$

CAPITOLO IV.

Del modo d' impiccolire la quantità Numerica colle Cifre.

§. I.

Della Sottrazione, e divisione de numeri.

I. Tutto l' oppoſto a quello, che fino ad ora ſi è fatto per inalzare la quantità, e ſublimarla al grado più alto ſi ha preſentemente da intraprendere, ſe ſi deve cercare ogni ſtrada, che eſſer poſſa o la più opportuna, o la più propria per impiccolire una determinata grandezza, e tanto abbaſſarla, che ſia ridotta alla ſua ultima ſpecie. Eccone per tanto le regole, delle quali ci valeremo a queſto effetto ſenza tema di riuſcire, o meno cauti nella ſcelta delle migliori, o troppo proliſſi nel praticare le più malagevoli; nè già permetteremo d' allontanarci dal metodo atteſo ſempre nelle operazioni precedenti, quale è ſtato, di prima ragionare delle ſemplici, e poi delle compoſte grandezze, ma con queſt' ordine ſteſſo tratteremo della ſottrazione, e diviſione della quantità, che appunto a queſti due Capi tutto ſi ha da ridurre quello, che può conoſcerſi a propoſito per impiccolire qualſiſia data numerica quantità.

II. Impiccolire un numero per via di ſottrazione, vuol dire torre un minor numero dal maggiore, nel che fare, perchè ſi operi rettamente ſi deve avvertire, che ſotto il maggior numero dato deve collocarſi il minore, che ſi ha da ſottrarre, e ſi deve adattare con ogni ſua figura ſotto ogni figura del primo. La ſottrazione poi ſi fa cominciando dall' ultimo numero poſto a mano deſtra, che può eſſere o minore di quello da cui ſi deve ſottrarre, o eguale a quello, o maggiore, o pure tanto minore, che ſia il zero medeſimo. Se il numero da ſottrarſi è

 mi-

minore del numero da cui si deve sottrarre, questo minor numero di unità si deve levare dal maggiore, che gli sta sopra, e l'avanzo si deve porre sotto una linea tirata sotto le due somme de' numeri dati, con notare, che appunto corrisponda al luogo del numero, che fa la sottrazione. Se il numero, che si deve sottrarre è tanto minore, che sia uno zero, in questo caso nel luogo dell'avanzo si pone lo stesso numero da cui si doveva fare la sottrazione. Se il numero, che si deve sottrarre è uguale, sotto di esso nel luogo, che si è stabilito per gli avanzi, si deve porre uno zero. Se questo numero finalmente è maggiore, in tal caso il numero da cui si fa la sottrazione, si fa crescere di una decina, e dal numero così accresciuto si leva il dato numero maggiore col porre l'avanzo dove si deve, e poi la decina aggiunta al minor numero si porta, e si dà al primo numero, che si deve sottrarre per tirare avanti l'operazione coll' istesso ordine, fino a che ci sono numeri da sottrarsi. Supponghiamo, che si abbia da levare da questa somma 86456 la somma 30286, quì si trova, che l'ultimo numero della minor somma è il 6 ugale all'ultimo numero della somma maggiore, dunque perchè levandosi 6 dal 6 resta niente, si deve collocare al suo luogo uno zero; ciò fatto si passa al secondo ultimo numero della somma minore, e si trova, che è un 8, numero maggiore del 5, che gli corrisponde nella somma maggiore, ecco che questo 5 si deve far crescere con una decina, e si deve leggere 15, e poi si ha da levare l'8 dal 15, e notare l'avanzo 7 al proprio luogo. Si passa susseguentemente all' altro numero, che si ha da sottrarre, che è il 2, e prima di sottrarlo dal numero 4, che gli sta sopra, si fa crescere della unità, che è il numero della decina, che si porta, e si dice 3, e poi questo 3 si leva dal 4, e rimane 1, il quale si pone cogli avanzi. Proseguendo l'operazione si trova lo 0, che si ha da levare dal 6, e perchè il zero è lo stesso nulla, si pone nel luogo degli avanzi interamente il 6, e si finisce l'operazione nell'esempio dato col levare il 3 ultimo numero della somma minore dall'8 ultimo numero della somma maggiore, ed il 5, che rimane si pone appresso gli altri avanzi, e si rileva che tutta la somma avanzata, fatta la sottrazione di 30286 da 86456 deve essere 56170. Le stesse regole si osservano praticate negli esempj seguenti.

Esem-

	Esempio I.		*Esempio II.*		*Esempio III.*
	569024		386548		9456789
Somma da sottrarsi	145213		53200		7385679
avanzo	423811	*avanzo*	333348	*avanzo*	2071110

	Esempio IV.
	369325
	98767
avanzo	270558

III. Se i numeri dati acciocchè s'impiccolifcano fono numeri compofti, poffono nafcere tre cafi, e però tutti tre fi hanno da avvertire. Può effere nel primo cafo dato un numero femplice da fottrarfi da un numero compofto: può effere nel fecondo cafo dato un numero compofto da fottrarfi da un numero femplice, e poffono darfi nel terzo cafo due numeri compofti difuguali, perchè il minore di effi fi abbia da levare dal maggiore. Per operare in ciafcuno di quefti cafi è neceffario ricordarfi di ciò, che altrove fi ftabilì per il diftintivo de numeri compofti da numeri femplici, ed è bene avvertire la condizione di tutte quelle mifure, che furono propofte, quando mai l'operazione cadeffe fopra qualcheduna di effe. Occorrerebbe d'impiccolire un numero compofto per un numero femplice, quando da una fomma di miglia, di ftadj, di paffi Geometrici, di paffi communi &c. fi doveffe levare una fol fomma di miglia, e in quefto cafo, nel luogo degli avanzi, abbaffati i numeri tutti della fpecie differente tali quali fono, cioè gli ftadj, gli paffi &c. fi farebbe colla regola della fottrazione de numeri femplici la fottrazione de numeri delle miglia. L'efempio, che quì fotto fi pone, fa vedere, come in un fimil cafo fi deve operare. Sono dati

	Miglia	*Stadj*	*Paffi Geometrici*	*Paffi Communi*
	1683	6	20	1
Per levare da effi miglia	865	—	—	—
reftano	818	6	20	1

Se ora il cafo foffe contrario, e dalla fomma di
Miglia 1683. — . — . —
fi doveffero levare 865. 6 . 20 . 1

In tutti i luoghi dove fono pofte le linee fenza numeri, fi do-

si dovrebbe concepire il numero di quella specie medesima di cui è il numero, che sta sotto alle medesime linee per essere sottratto, e così, se l'ultimo numero, posto sotto l'ultima linea nel dato esempio è il numero de passi communi, nel luogo della linea si hanno da concepire, come posti due passi communi, nella seguente si hanno da concepire, come posti 25 passi Geometrici, e nell'altra se gli hanno da concepire 8 stadj, che sono tutte quelle misure, che si producono l'una dall'altra per arrivare a fare un miglio intero: poi incominciando la sottrazione, si deve dire: chi da 2 passi communi ne leva uno, rimane uno, che si pone al luogo degli avanzi nel proprio posto, e si porta la specie del numero aggiunto sotto il nome di unità, con dire porto uno, che si legge col 20, secondo numero da sottrarsi, e fa 21, e si segue a dire, chi da 25 passi Geometrici ne leva 21 resta 4 per avanzo da porsi al proprio luogo, e si porta di nuovo uno, che si legge col 6, e fa 7, e si dice, chi da 8 stadj leva 7 rimane uno, che si pone al suo luogo, e similmente si porta uno, che letto col 5 fa 6, e seguita a farsi la sottrazione delle miglia, che sono rimaste col metodo praticato nel precedente esempio.

Se finalmente portasse il caso, che la somma data fosse di miglia 1683, stadj 6, passi Geometrici 23, passi communi 1, perchè si sottraessero da essa miglia 865, stadj 7, piedi Geometrici 21, piedi communi 0, si dovrebbe in questo caso considerare ogni specie di numero, come sola, per operare sopra di essa secondo la regola generale della sottrazione, allorchè il numero da sottrarsi è minore di quello, da cui si deve fare la sottrazione, o pure è uguale al medesimo; ma quando il numero da sottrarsi fosse maggiore, si dovrebbe ingrandire la specie del numero, da cui si averebbe a fare la sottrazione, con aggiugnergli la specie del numero precedente, e poi fatta la sottrazione, e posto l'avanzo al suo luogo, si porterebbe l'unità sopra il seguente numero da sottrarsi, per proseguirsi col medesimo ordine l'operazione, fino al suo termine. Perchè dunque nell'esempio, fissato abbiamo l'ultima specie del numero da sottrarsi, che è uno zero, cioè un numero minore del suo corrispondente, che è l'1, nel luogo dell'avanzo si pone tale quale quest'uno: in oltre perchè la specie del numero da sottrarsi, posta nel secondultimo luogo è 23, cioè un

un numero eguale a quello, da cui si deve sottrarre, però nel secondultimo luogo degli avanzi si pone uno zero. Similmente perchè la specie prossima del numero da sottrarsi è un 7, numero maggiore di quello, da cui si deve fare la sottrazione, che è il 6, non è possibile, che questo 7 si levi dal 6, dunque si ha da alzare questo 6, che rappresenta gli stadj con un miglio, che si leverà dalla specie del numero precedente, e perchè un miglio sono 8 stadj, come è noto, il 6 non si considera più come tale, ma come accresciuto dall' 8, e valerà 14, da cui levato il 7, si avrà per resto un altro 7, da porsi fra gli avanzi al suo luogo. Per ultimo poi, trovando nella specie seguente dei numeri da sottrarsi il 5, questo va accresciuto di una unità, che si porta dalla sottrazione già fatta, e si legge 6 da sottrarsi cogl' altri susseguenti dalla somma della medesima specie 683 nel modo commune alla sottrazione de numeri semplici, e come quì appresso si vede.

	M.	*S.*	*P. G.*	*P. C.*
	1683.	6.	23.	1
	865.	7.	23.	—
avanzo	817.	7.	——	1

Portando il bisogno di dovere sottrarre più somme di numeri, da più somme di altri numeri, prima tutte le somme da sottrarsi si dovrebbero unire a una somma, e poi similmente si dovrebbero unire in una sola tutte le somme date, perchè da queste si facesse la dimandata sottrazione.

IV. Si nota per regola generale nella sottrazione de composti, di non mai confondere le differenti specie de numeri fra di loro, ma sibbene, che ogni specie di numero occupi sempre il suo luogo, e che le maggiori sempre precedano le minori.

Si da anche per regola generale, che dovendosi sottrarre un maggior numero, da un minore, al minore si deve sempre aggiugnere l' unità, la quale unità si risolve in tutte le parti di un intero del numero precedente; cioè se si dovessero levare minuti 50' da 30', sarebbe necessario a questi 30 aggiugnere l' unità non per fare 31, ma per far 90, esprimendo questa unità un intero della somma precedente, vale a dire 60 minuti primi, coi quali debbono essere li 30' ingranditi.

Per ultimo, se si trova qualche zero, tanto nella somma da sottrarsi, quanto in quella, che si deve sottrarre, non si hanno da saltare queste figure, per non alterare le denominazioni dei numeri, ma quando si arriva a questo zero, se si porta qualche decina dell'ultimo numero da cui si è fatta la sottrazione, il numero, che esprime queste decine è quello, che si legge nel luogo dello zero, e si leva dal zero superiore, secondo la regola della sottrazione, e se non si porta numero alcuno di decina, nel luogo degli avanzi si scrive lo zero. L'esempio, che quì si pone, mostra il caso di cui si parla.

Si levi da ——	56070223
il numero ——	4080132
questo è l'avanzo che rimane ——	51990091

V. La regola, che si è data per impiccolire la quantità, non solo è buona per questo effetto, ma apporta di più un vantaggio, quale è di essere opportuna, per far conoscere, se l'ingrandimento fatto di una quantità, sia legittimo. L'operazione dunque è tale. Aggiunte in una sola somma tutte le quantità, che sono distribuite per molte, si vede nel risultato il pieno ingrandimento della quantità, che si cerca: ma perchè si può dubitare se un tale ingrandimento sia veramente quello, che deve essere, per assicurarsi della verità, ecco come si fa. Si ripiglia a mano sinistra la somma delle date quantità a colonna per colonna, senza portare decine, e il prodotto di ciascheduna colonna si sottrae dai numeri della prima somma, cioè da quelli di mano in mano, che corrispondono alle dette colonne, i quali sempre hanno la denominazione di quella decina, che si sente accennata nelli stessi prodotti, e se nell'ultima sottrazione rimane uno zero, questo è contrasegno, che l'addizione della quantità è ben fatta. La somma dei seguenti numeri.

3456 è 18258, la somma della prima colon-
7890 na è 16, che si leva dal 18 primo numero
1234 della somma, che corrisponde alla detta pri-
5678 ma colonna, e rimane 2. La somma della seconda colonna è 20, che levato dal 22 numero corrispondente alla seconda colonna rimane 2. La somma della terza è 24, che

che levato dal 25 numero, che corrisponde alla 3 colonna, resta 1. Finalmente la somma dell'ultima colonna è 18, la quale, perchè corrisponde per l'appunto all'ultimo numero della somma grande, perciò si dice, che l'addizione è ben fatta.

VI. Il secondo mezzo per impiccolire le grandezze è la divisione, che pure si fa è sopra numeri semplici, e sopra quelli, che sono composti. Impiccolire un numero col mezzo della divisione vuol dire, vedere quante volte un numero minore dividente entra in un altro numero maggiore da dividersi; da che apparisce, che questa regola comprende tre fatta di numeri, il primo dei quali si chiama il divisore, il secondo il numero da dividersi, o non diviso, il terzo si dice numero quoziente, perchè esprime quante volte il numero minore può entrare nel maggiore. Il singolare della divisione, che non conviene a nessun altra operazione aritmetica è di cominciarsi ad operare dal primo numero di ogni data quantità, laddove tutte le altre cominciano dall'ultimo numero dei loro dati. Dovendosi intraprendere la divisione dei numeri semplici, prima di ogni altra cosa è necessario osservare quante figure sono quelle, che compongono il divisore, e quante sono le altre, che compongono il numero da dividersi, dipendendo dal numero delle figure, che si trovano nel divisore, il determinare quante figure abbiano da risultare per il quoziente, che col mezzo della divisione si cerca. Se nel divisore vi è una sola figura, è cosa facile il sapere il numero delle figure del quoziente; perchè, o questa sola figura, che è nel divisore è un numero minore del primo numero, oppure è un numero maggiore: Se si verifica il primo supposto, il numero delle figure, che sono nella somma, che si ha da dividere, corrisponderà al numero delle figure, che avranno da comporre il quoziente. Se poi si verifica il secondo supposto, le figure del quoziente saranno una meno delle figure del numero divisore. Due esempj, che quì si pongono, dimostrano la pratica dell'uno, e dell'altro supposto.

Esempio I.		*Esempio II.*	
Dividasi per 6	967890	*Dividasi per* 4	326564
Questo è il Quoz.	161315	*Quoz.*	81641

Quello, che in secondo luogo è necessario di avvertire per far la divisione di una quantità numerica è, che quelle

 uni-

unità, le quali rimangono, fatta la divisione del primo numero, si prendono come tante decine, e si leggono col numero seguente; per esempio, se il primo numero dato da dividersi fosse il 35, e il divisore fosse l' 8, questo secondo numero si vedrebbe entrare nel primo quattro volte coll'avanzo di 3 unità, or queste tre unità dovrebbero prendersi come tre decine da unirsi al numero seguente, il quale se fosse un 7 rileverebbe 37 da partirsi similmente per l' 8, e così per la regola medesima tutti gli avanzi anderebbero sempre letti, fino al compimento della operazione; di cui qui sotto se ne pone un esempio.

Dividasi per 8: 357904
Sarà il Quoz. 44738

Occorre pure di osservare, che talvolta nella divisione di una quantità numerica, si trova un numero, che è minore del divisore, e che non può ingrandirsi con alcun avanzo della divisione del numero precedente, perchè non è rimasta parte alcuna. In questo caso nel luogo del quoziente si deve porre uno zero, e quel numero minore, se nè ha altri appresso, deve esprimere tante decine quante sono le unità, che contiene, da leggersi secondo l' osservazione precedente, col numero, che lo segue per proseguire l' operazione; se poi fosse l' ultimo, si dovrebbe scrivere accanto al quoziente sopra una linea, con sotto il numero divisore, per aversi l' intera somma di questo quoziente, come pure si scriverebbe sopra la linea al medesimo modo quell' avanzo, che rimarrebbe all' ultima figura del numero da dividersi, se per l' appunto dal divisore non si potesse partire. Gli esempj per questi casi sono i seguenti.

Esempio I.
Si divida per 6 789054
Quoziente 131509

Esempio II.
si divida per 7 53654
7664 $\frac{6}{7}$

Esempio III.
si divide per 9 | 840089
93343 $\frac{2}{9}$

VII. Quanto si è notato fin qui, può abbastanza servire, quando il partitore comprende una sola figura, ma se crescesse nel partitore il numero delle figure, sarebbe in questa supposizione necessaria un altra regola, la quale però qui a questo effetto si pone. Si supponga adunque, che il partitore abbia

bia tre, o quattro, o più figure. Prima di ogni altra cosa è necessario stabilire il numero delle figure, che hanno da risultare nel quoziente della divisione, che si vole intraprendere: Per la qual cosa, regola generale è, il contare il numero delle figure, che sono nel divisore, ed osservare se tutte quante si trovano entrare una qualche volta in altrettante figure, che sono nel numero da partirsi, perchè, se si vede che entrano, tirata una linea al di sopra del numero da partirsi, la prima figura del quoziente si dovrà porre sopra l' ultimo numero preso dalla somma da partirsi, che corrisponde all' ultimo numero del partitore; per cagione di esempio, se nel partitore fossero sette figure, e tutte sette entrassero in altre sette del numero da partirsi, la prima figura del quoziente si dovrebbe porre sopra questa settima figura, e poi dal numero di tutte l'altre figure che si trovassero nella somma da partirsi, rimarrebbe determinato il numero delle figure del quoziente, cioè, se dopo quelle sette, fossero altre tre, cinque, o nove figure; il quoziente conterrebbe oltre la prima stabilita altre tre, cinque, o nove figure. Ma se fatto il confronto delle figure del quoziente con altrettante del numero da partirsi, si vedesse, che queste rilevassero una somma minore di quelle in tal caso, per determinare il luogo della prima figura del quoziente, si dovrebbe prendere una figura di più dalla somma da partirsi, e sopra questa si porrebbe la prima del quoziente, per contare poi le altre secondo il modo predetto: onde contenendo il divisore sette figure, le quali non entrassero nelle prime sette del numero da partirsi, per stabilire il luogo della prima figura del quoziente se ne prenderebbero otto, e sopra l' ottava si scriverebbe questa prima figura del quoziente, e poi tutte le altre si scriverebbero sopra quelle, che fossero rimaste nel dato numero da partirsi. Fissato con questa regola il numero delle figure per il quoziente, si deve immediatamente cercare il nome della sua prima figura, che può essere ciascheduna delle nove cifre aritmetiche, ma non mai maggiore del 9, quindi per determinarla si dee figurare chi opera di partire quelle sole figure, che si son dette corrispondere a tutto il quoziente, o sette, o otto, che elle sieno, o più, e questo partire si regola nella seguente maniera. Prima osservi chi parte quante volte il primo numero del partitore

entri nella prima figura, e se questa non basta, osservi quante volte entri nelle prime due figure del numero da partirsi, e veduto, che può entrare due volte, tre volte &c. osservi se la seconda figura del partitore entra altrettante volte nella prossima figura del numero che si parte considerato tale quale è, oppure inalzato colle decine dell'avanzo, che è rimasto al primo partitore: Guardi poi nella stessa maniera, se il medesimo numero di volte, con cui la prima, e la seconda figura del partitore è entrata nelle corrispondenti figure del numero, che si parte, possano ancora entrare tutte le altre figure del partitore in tutte le rimanenti figure del numero da partirsi, se vede, che tutte possano entrare egual numero di volte, questo numero lo scriva nel primo luogo del quoziente; Se poi osserva, che non possono entrare, deve andare scemando il supposto primo quoziente di una unità per volta, fino a tanto, che abbia trovato il preciso numero, con cui tutte le figure del partitore possono entrare nel numero, che egli parte, e trovato, che abbia questo numero, lo scriva al luogo predetto. Ciò fatto, per la figura del quoziente trovato multiplichi, secondo le regole della multiplicazione, l'ultima figura del partitore, la qual multiplicazione, o rileverà un numero di desinenza uguale all'ultima figura del numero partito, o rileverà un numero di desinenza disuguale. Se la desinenza sarà uguale, sotto l'ultimo numero partito porrà uno zero; se sarà disuguale, alzerà il numero rilevato dalla multiplicazione, fino a che non arrivi a trovare la desinenza di questo numero partito, e tutto quello di più, che averà aggiunto per alzare questo numero lo scriverà sotto del numero partito, con serbare le decine, se alcune vi sono, per unirle al risultato dalla multiplicazione del secondo ultimo divisore multiplicato per il quoziente medesimo, acciocchè di nuovo col metodo di prima si scriva sotto alla suddetta ultima figura del numero partito, quel numero, che conviene, e poi tutti gli altri successivamente, fin che non abbia scoperto l'avanzo intero, nato dalla divisione del numero, fatta nella predetta maniera. Trovato dunque questo avanzo aggiugnerà al medesimo la prima figura di quelle, che sono rimaste nel numero dato da partirsi, e vedrà se questo nuovo numero preparato, possa essere partito dal dato partitore, per dividerlo, quando

do ſi poſſa, come l'antecedente numero, e non potendo eſſer partito, dovrà porre uno zero nel ſecondo luogo del quoziente, e aggiugnere di più un altra figura delle rimaſte alla ſomma, acciocchè ſi ripeta la ſolita operazione del partire, finchè durano le figure propoſte a queſto effetto. Si pongono quì due eſempj, perchè in eſſi ſi poſſano riſcontrare le regole già ſtabilite.

Eſempio I.

Quoz.	4564
Si parte per 3678 -	16789008
	20770
	23800
	17328
avanzo --	2616

Eſempio II.

Quoz.	5046
ſi parte per 4278 -	21586788
	19670.
	25668

Partito il numero dato è rimaſto nel primo eſempio per quoziente 4564, e per avanzo 2616, da ſcriverſi appreſſo al quoziente ſopra una linea con ſotto l'intero partitore così $4564 \frac{2616}{3678}$ avvertendoſi per regola generale, che qualunque avanzo laſciato dalla operazione non deve mai eſſere maggiore del partitore, ma deve eſſere ſempre minore, altrimenti l'operazione ſarebbe mal fatta. La diviſione nel ſecondo eſempio ha dato per quoziente 5046 ſenza alcuno avanzo. Se foſſe dato un numero da dividerſi con più diviſori ſi dovrebbero multiplicare tutti i diviſori fra loro, ed il riſultato dividendo la ſomma data, produrrebbe il quoziente medeſimo, che naſcerebbe dal ripetere le diviſioni con tutti i dati numeri diviſori.

VIII. Renderebbeſi un poco più malagevole l'operazione, che ſi dovrebbe fare per impiccolire i numeri di ſpecie differente, o compoſti col mezzo della diviſione, niente di meno una piccola attenzione fatta alle regole, che per queſto effetto ſi danno, può ſervire per operare francamente in tutti i caſi, che poſſono accadere. Prima può eſſere, che ſi abbia da dividere il numero compoſto per il numero ſemplice, o il numero ſemplice per il compoſto. Secondo può eſſere, che tanto il diviſore, che il numero da dividerſi ſia compoſto, ma che la compoſizione di uno ſia diverſa dalla compoſizione dell'al-

l'altro. Se il divisore è numero semplice, ed è composto il numero, che si hà da dividere, si divide prima, secondo le solite regole della divisione dei semplici, la prima specie del numero divisore, e ciò, che avanza da questa divisione si multiplica per la specie del numero seguente, che trovasi fra quelli, che si hanno a dividere coll'aggiunta di quelle unità, che sono in questa seconda specie di numero, e si ripiglia al solito la divisione di questo prodotto, con seguitare ad ingrandire gli avanzi, se ve ne sono, sempre per la specie dei numeri seguenti, che sono dati, con crescere ogni prodotto delle unità, che in quella specie di numero dato si trovano. Se ne propone un esempio per regola di tutti gli altri. Si ha da vedere quante volte il 645 entra in 689023 lire, 10 soldi, denari 8. Prima si parte per 645 il 689023, e ciò, che avanza, si multiplica per 20 cioè per quella specie di numero, che compone la lira, con aggiugnere al prodotto il 10 dato, e questo prodotto si parte di nuovo per il 645, e così pure l'avanzo di questa divisione si multiplica per 12, che è la specie del numero, che compone il soldo, con aggiugnere al prodotto i denari 8, che sono scritti al numero dato, acciocchè anco questo risultato si parta per lo stesso numero 645, e queste tre divisioni lascieranno il numero delle lire, soldi, e denari, che si dovrebbero a 645 uomini, se fosse commune guadagno la somma di lire 689023, soldi 10, denari 8.

divisore 645 --	689023	*numero diviso*
Quoz. I. 1068	4402	
	5323	
avanzo --	163	*da multiplicarsi per* 20
	3260	*Prodotto*
	10	*num. aggiunto*
Quoz. II. 5	3270	*num. da partirsi di nuovo per* 645
	- 45	*avanzo multiplicato per* 12
	540	
	8	*numero aggiunto*
Quoz. III. 0 $\frac{548}{645}$	548	*num. da partirsi per* 645

toccherebbero dunque a ciascun Uomo lir. 1068. sol. 5 den. 0.

IX. Se

IX. Se tanto il partitore, che il numero da partirſi foſſe compoſto, e nell' uno, e nell' altro vi foſſero le ſteſſe ſpecie, tutti due queſti numeri ſi ridurrebbero all' ultima loro ſpecie, per poi intraprendere la diviſione, ſecondo la regola data per i numeri ſemplici, ſe non che, trovato il primo quoziente, l' avanzo ſi dovrebbe multiplicare per la ſeconda ſpecie del numero, che compone la ſomma data, e così ſucceſſivamente ſempre ſi multiplicherebbe ogni avanzo, finchè non ſi foſſe arrivato all' ultima ſpecie del numero dato, per dividerſi ſempre i prodotti col medeſimo diviſore. Dividendoſi dunque 365 giorni, 12 ore, 40^{I}, 50^{II} per giorni 35, ore 16 30^{I}, 40^{II}. l' uno, e l' altro numero ſi ridurrà a minuti medeſimi, cioè a terzi, e partita, che ſia la prima volta una ſomma per l' altra, l' avanzo, ſe vi ſarà, ſi multiplicherà pel 24, che è la ſpecie del numero, che fa i giorni, e ſi rinnoverà la diviſione, e poi il ſecondo avanzo ſi multiplicherà per 60, che è la ſpecie del numero delle parti, che fanno l' ora, e finalmente riuſcendo della diviſione un altro avanzo, ſi multiplicherà queſto pure di nuovo per 60, che ſono le parti, che formano i minuti, per compire in queſto prodotto la richieſta diviſione. Si parta dunque il ſeguente dato numero di

G. O. M^{I}. M^{II}.	G. O. M^{I}. M^{II}.
365 . 12 . 40 . 50 *per*	35 . 16 . 30^{I}. 40^{II}.
24 *multiplicante pr.*	24 *multiplicante pr.*
730	70
1460	140
12 *num. aggiunto*	16 *num. aggiunto*
8772 *ſomma prima*	856 *ſomma prima*
60 *multiplic. ſec.°*	60 *multiplic. ſec°.*
526320	51360
40 *numero aggiunto*	30 *numero aggiunto*
526360 *ſomma ſeconda*	51390 *ſomma ſeconda*
60 *multiplic. terzo*	60 *multiplic. terzo*
31581600	3083400
50 *n. agg.*	40 *n. agg.*
31581650 *da partirſi per*	3083440

ultima ſomma della riduz. di tutti i numeri dati.

I.*quoz.*)	747250	*avanzo mult. per* 24
10.)	1494500	
	2989000	
prod. I.	17934000	*part. per* 3083440
II. *qu.* 5.)	2516800	*avanzo per* 60. *multip.*
prod. II.	151008000	*part. per* 3083440
III. *quoz.*)	27670400	
48.)	3002880	*avanzo per* 60. *multip.*
prod. III.	180172800	*part. per* 3083440
IV. *qu.*)	26000800	
58.)	1333280	*avanzo ultimo.*

che non si multiplica di più, per non vi essere altri numeri nell' esempio dato; sicchè l'intero quoziente della divisione sarà

G.	*O.*	*M'.*	*M''.*	
10.	5.	48.	58.	$\frac{1333280}{3083440}$

X. Succede non rade volte, che i numeri composti dati non sono della specie medesima, oppure uno si ha da dividere per l'altro. Dunque ragion vuole, che si proponga quel modo, che si deve tenere per operare in questo caso. Ciò, che si è avvertito nella regola precedente di risolvere ciascheduno de' dati numeri composti alla sua ultima specie, si deve avvertire anche in questa occasione, in cui dovendosi operare secondo il caso proposto, si dovrà prima ciascun numero risolvere nella sua ultima specie; fatta questa risoluzione, si hanno da multiplicare fra loro tutte le specie de' numeri, nelle quali si risolve il numero composto, come sarebbe il numero de' soldi, che compone la lira pel numero de i denari, o il numero delle linee, che compone il pollice, col numero de' pollici, che compongono il piede, e col numero de' piedi, che compongono i passi, &c. e poi il prodotto da queste multiplicazioni dovrebbe multiplicare alternativamente l' una, e l' altra delle somme, che sono derivate dalla risoluzione de i numeri composti alla loro ultima specie, e quello, che

che risulterebbe da queste multiplicazioni, sarebbe ciascuna delle somme, sopra le quali si avrebbe a fare la operazione richiesta, secondo il metodo nella precedente regola determinato. Questa nuova proposta regola si manifesta nel seguente quesito, che si dà per esempio.

In libbre di oro 6433. once 6. denari 8. s'impiegano tolleri 413540. lire 4. soldi 10. quale è il prezzo, che vale ciascuna libbra?

si parta per lib. once. denari.	*tolleri. lire. soldi.*
6433. 6. 8.	413540. 4. 10
I. *mult. per* — 12	*multip.* I. *per* — 6
6433	2481240
12866	*n. agg.* — 4
n. agg. — 6	*pr. som.* 2481244
pr. som. 77202	*sec. mult.) per)* — 20
sec. mult.) per) — 24	49624880
154404	*n. agg.* — 10
308808	*sec. som.* 49624890
n. agg. — 8	*e ult. risoluz.*
sec. som. 1852856	

e compimento della riduz. all' ult. specie.

Il 120., che ora si ha da prendere per multiplicante è un risultato dalla multiplicazione del num. delle lire che compongono il tollero, e del num de' soldi, che compongono la lira, che dee multiplicare l'ultima somma del Partitore.

Il 288, che multiplica nella seguente operazione, risulta dalla multiplicazione del nu. delle once, che vanno alla libbra, pel numero de i denari, che vanno all' oncia, e che dee multiplicare l' ultima somma, in cui si è risoluto il num. dato da partirsi.

1852856 *per* 120.	49624890. *per* 288.
1852856	99249780
37057120	396999120
num. part. 222342720 *del*	396999120
	14291968320 Q. I. 64
	951405120
I. *avanzo multip. per* 6 —	62034240

di nuovo il 222342720 *parte il* 372205440
secondo avanzo multip. per 20 149862720 Q.II.1.
terza divis. col 222342720 *del* 2997354400 Q.III.13.
773927200
.1o6899040 avanzo

che si lascia stare, perchè è finita l'operazione, nella quale per la soluzione del Quesito rilevasi, che per ogni libbra d'oro si dee pagare la somma di 64 tolleri 1 lira, e quasi 14 soldi.

XI. Un altra particolarità, che può accadere ne i numeri composti dati è da avvertirsi, perchè si pratichi in essi rettamente la divisione; e questa particolarità allora sopraggiugne, quando il primo numero dato da partirsi porta una qualche misura riquadrata, e poi i numeri della specie seguente non sono quadrati; per esempio, si danno da dividere 500 esapede quadrate, 14 piedi, e 8 pollici, per esapede 50 piedi 5 pollici 10. Ecco, che per operare coll'esempio così proposto, è necessario prima fare un altra cosa, cioè riquadrare tutte le specie de i numeri dati da dividersi, cioè i piedi 14 e gli 8 pollici; per la qual cosa, deve sapersi, che ogni esapeda quadrata contiene 36 piedi, dunque ogni piede di esapeda quadrato dovrà essere uguale a 6 piedi, e però per ridurre i dati 14 piedi a piedi quadrati, si dovranno dividere per 6, e si troveranno 2 piedi quadrati coll'avanzo di 2 piedi non quadrati. Siccome ogni piede di esapeda quadrata contiene 6 piedi, così ogni piede, che nasce da 12 pollici, se è quadrato dee contenere 144 pollici; si multiplicheranno dunque questi due piedi, che sono avanzati per 144, e risulteranno 288 pollici, a i quali si uniranno gli altri 8, che si trovano nel numero dato, e saranno in tutto 296 pollici, e perchè ogni pollice di piede di esapeda quadrata equivale a 6, dunque, se 12 pollici formano un piede, saranno in ogni 6 parti di piede di esapeda quadrata 72 pollici, e con questo numero si dividerà la somma de i pollici 296, e si troverà per quoziente 4 con l'avanzo $\frac{8}{72}$, ovvero $\frac{1}{9}$, perchè non procede più oltre la operazione, non trovandosi nella somma de i numeri composti dati da dividersi altra specie di numero sotto de i pollici.

Che

Che se ci fossero le linee, l'avanzo trovato 8 si dovrebbe riquadrare per la somma delle linee quadrate, che si trovano in un pollice, che sono 144, e poi al prodotto aggiunte le linee, che si trovassero nel dato numero, tutta la somma si dividerebbe per 864, perchè la linea di esapede quadrata tante appunto ne contiene. Compita con questa regola la riduzione de' numeri dati, s'intraprende la divisione al solito, che si fanno le altre, nelle quali i numeri composti dati sono tutti della medesima specie, cioè con ridurre ciascuna somma alla sua ultima specie: avvertendo solo, che se, fatta la risoluzione de i numeri all' ultima sua specie, si trova un avanzo alla specie de i numeri, che si sono riquadrati, quel partitore, che ha riquadrata l' ultima specie del dato numero, dee multiplicare l'una, e l'altra delle somme, ridotte all'ultima specie dei loro numeri, con aggiugnere al numero dato da dividersi l'avanzo, che se gli dee, e poi si dà principio alla divisione, regolando gli avanzi, secondo il metodo nel precedente caso fissato.

XII. Per compimento della divisione, si nota, che talvolta tanto il numero da dividersi, quanto il divisore potrebbero terminare in zeri. Quando si trovasse questo caso per abbreviare la operazione, si taglierebbero e da una parte, e dall' altra tutti quei zeri, nel numero de i quali convenissero le due somme date per essere impiccolite col mezzo della divisione. Si può riscontrare questa osservazione nell' esempio seguente, in cui si parte per 365000 il 789500000. Trovandosi, che tre zeri sono le l'ultime figure del partitore, e che il numero da partirsi termina anche esso con molti zeri, si levano da ogni parte tre zeri, e si opera con i numeri, che rimangono nel partitore 365, e nel numero da partirsi 789500, senza che il quoziente si muti, come si vede nelle operazioni, che tutte due si intraprendono, cioè prima col numero intero, e poi col numero troncato perchè apparisca la verità del dato insegnamento.

Operazione prima.	*Operazione seconda.*
2163 *quoz.*	2163 *quoz.*
365000—789500000	365 ...— 789500...
595000	595
2300000	2300
1100000	1100
avanzo — 5000	*avanzo* ——— 5

 Ope-

Ecco dunque come l'una, e l'altra operazione dà il medesimo quoziente 2163. Potrebbe a qualcuno parer differente l'avanzo, ma non è verò, perchè impiccolito ciascuno secondo le regole, che si daranno altrove, tanto il primo, che il secondo ritorna $\frac{1}{3}$. Si vuole ancora notare, che siccome il primo ingrandimento del numero fatto per l'addizione, si trova compito adequatamente col mezzo della sottrazione, come si nota a suo luogo, così l'addizione può servire di prova alla sottrazione, che appunto si vede ben fatta, quando l'avanzo aggiunto alla somma, che si è sottratta, restituisce lo intero numero, da cui si è fatta la sottrazione. Anche la multiplicazione, e la divisione si servono vicendevolmente di prova, dimostrandosi la bonta della prima col dividere il risultato pel numero, che si è multiplicato, e la bontà della seconda con multiplicare il divisore pel quoziente trovato, perchè questa multiplicazione dovrà lasciare un prodotto, dopo avergli aggiunto l'avanzo, se pure qualche cosa rimane nel compimento della divisione, uguale al numero diviso. Potrà ciascuno da se far questa prova negli esempj, che si sono dati, se vuole rimanere accertato della bontà di qualunque operazione già fatta.

§. II.

Della Estrazione delle Radici.

XIII. Tutte le regole date per insegnare il modo d'impiccolire le grandezze, servono per quei casi, ne i quali, secondo l'arbitrio di chi le adopra, si ha da impiccolire una data numerica quantità. Rimane ora, che si proponga ciascuno di quei mezzi, per i quali una quantità numerica può impiccolirsi fino ad un segno, che è quello di dovere esser ridotta alla prima sua potenza, di là dalla quale non vi è altra possibilità di impiccolirla, se non si volesse ridurla allo infinito grado di sua picciolezza, che è lo stesso nulla. Abbiamo avvertito più avanti, come la prima potenza di una quantità numerica si chiama radice del numero; sicchè, se tanto s'impiccolisca il numero, che si ritrovi l'ultima sua radice, s'impiccolisce fino all'ultimo, e sommo grado, in cui, parten-

tendo dal più alto, che prima di lui ſi affermava, può naturalmente diſcendere. Appartengono a molte ſpecie quelle radici, nelle quali può riſolverſi un numero, perchè, o ſi vuol riſolvere a quella radice, che ſi chiama quadrata, o a quella radice, che ſi chiama radice cuba, oppure ſi vuol riſolvere a qualunque altra radice di qualunque altra potenza; nientedimeno, perchè quelle, che ſi rendono più familiari, e più opportune ſono l'eſtrazione delle radici da una ſeconda, o da una terza potenza, di queſte due eſtrazioni di radici ora parleremo, con intenzione di ſcoprire le più facili maniere per arrivare al noſtro intento di impiccolire con queſto mezzo, per quanto ella comporta, una grandezza numerica.

Radice quadrata è quella radice, che ſi cava dal numero, quando un tal numero è veramente quadrato. Il numero poi è veramente quadrato quello, che naſce, come ſi diſse, dalla multiplicazione di un numero, fatta in ſe ſteſſo. Per queſta ragione il 49 è numero quadrato, perchè naſce dal 7 multiplicato in ſe ſteſſo, e queſto 7 è la vera radice quadrata del 49, non potendoſene altra trovare con qualunque altra diviſione. Se ſi dee impiccolire il numero con ridurlo alla ſua radice quadrata, è coſa facile, quando il dato numero non paſſa il 100, perchè dee queſto numero aver per propria radice quadrata qualcuna di quelle cifre Aritmetiche, che dall' uno ſi contano fino al dieci, delle quali figure quì per diſteſo ſi propongono i quadrati.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.	64.	81.	100.

Il più delle volte però il numero quadrato paſſa il cento, e ſi eſprime con quattro, con ſei, con dieci, e con più figure Aritmetiche, e per queſti caſi appunto ha da ſervire queſta regola, che preſentemente ſi vuole aggiugnere, per inſegnare, come ſi abbia da operare in qualunque numero di figure ſia propoſto il numero quadrato. Si propone in primo luogo il modo di trovare una radice quadrata, che ſi eſprima con due cifre.

Il numero, da cui ſi dee levare la radice quadrata, che contenga due cifre, non può aver meno di tre figure, nè più di

di 4, pel quale effetto si osserva, che dato il numero, da cui si dee estrarre la radice quadrata, si dee questo numero spartire con i punti, ed il primo punto si dee mettere dopo l'ultima figura a mano destra, e le figure si hanno da collocare a due per due in qualunque spartimento, prescindendo dal primo posto a mano sinistra, che può avere una sola figura, come in fatti sempre ha da avere, quando è dispari il numero delle date figure. Contandosi questi punti, o spartimenti fatti con i punti, si conosce subito quante figure è per avere la radice quadrata, corrispondendo il numero di queste alla somma di quelli. Trovato in questo modo il numero delle figure, che ha da avere la radice quadrata, si descrive al fianco della somma data, a quella parte, dove uno vuole, una lunetta (fatta apposta per dentro collocarvi le figure tutte, che si troveranno appartenere alla radice, che si dimanda, e che si cerca. Dopo tutte queste preparazioni, si comincia a trovare la prima figura della radice quadrata, e si trova così.

XIV. Si prendono i numeri, che sono nel primo spartimento, o uno, o due, che sieno, e si confronta con ciascuno de i primi 9 numeri quadrati, che già si sono notati, perchè non potendo mai superare il nono quadrato, o si troverà uguale a un di quelli, o si troverà minore di alcuno di essi. Se si troverà per l'appunto uguale ad uno di quelli, la radice quadrata di quello sarà la radice, che si prenderà come radice di questo, e si porrà nel luogo delle radici, tirando un freghetto alle figure del primo spartimento, perchè con questa figura trovata è rimasta compita la operazione sopra di lui. Quando il numero si trovasse minore di uno di quelli, si cercherebbe qual numero quadrato fra tutti i nove, più se gli accostasse, e presa la radice di questo, si noterebbe da banda con porre quel di più, che avesse il numero non quadrato, sotto una linea, e come prima si cancellerebbero le figure del primo spartimento. Sia dato questo numero 6456 per levarne la radice quadrata. Diviso il numero in due spartimenti, rimane nel primo a mano sinistra il 64, che confrontato a ciascuno dei nove numeri quadrati, si trova per l'appunto fra loro, e si vede, che ha l' 8 per radice quadrata. Questo numero 8 si prende, e posto al luogo della radice col freghetto accennato, si cuopre il 64, ed è finita la prima opera-

razione. Se fosse stato il 70, questo non si sarebbe trovato nella serie de i 9 primi quadrati; si sarebbe però trovato il 64 numero quadrato, contenuto dal 70, e più vicino al medesimo 70, e così presa la radice di questo 64, cioè l'8, e posta al suo luogo, e quel 6, che manca per arrivare al 70, posto da parte col solito freghetto, coperto il 70, sarebbe anche in questo caso compita la prima operazione, e si passerebbe alla seconda. Consiste questa seconda operazione, in unire allo avanzo del numero rimasto alla prima operazione, le due figure, che sono nel secondo spartimento per fare un numero solo da partirsi, oppure, se non è restato avanzo, consiste la operazione seconda in abbassare dal suo luogo le due figure del secondo spartimento, per intraprendere sopra di esse la divisione. Ognuno sà, che dovendosi dividere un numero, è necessario, che si abbia il divisore, sicchè la industria di questa seconda operazione, non solo consisterà in proporre il numero da dividersi, ma di più in preparare il divisore. Si prepara il divisore con raddoppiare lo intero numero, che si trova nel luogo della radice, e questo numero raddoppiato si pone al lato, o dove un vuole, appresso alla somma da partirsi, con unire al numero preparato un punto, il quale vuol dire, che in quel luogo si dee considerare un altra figura da avvertirsi, per far giusta la divisione, che si comincia in tal modo. Della somma da partirsi si prendono tutti i numeri, a riserva dell'ultimo da mano destra, e si vede quante volte, secondo le regole della divisione, in essi entra il numero preparato, che non dovrà mai passare le nove volte, e questo quoziente, che si afferma, dee considerarsi come se si trovasse nel luogo di quel punto, di cui abbiamo parlato, e la ultima figura lasciata nella somma, che si è partita, rilevata coll'avanzo, se vi è stato nella prima partizione, dee partirsi per questo quoziente, che dee in essa entrare il medesimo numero di volte. Se si trova, che entri, si scrive questo quoziente medesimo a canto la prima radice trovata, e si considera come seconda figura della radice, e si passa alla terza operazione. Ma se questo numero di volte non entra, si scema il quoziente trovato di una unità per volta, fino a tanto, che non sia trovato quello, che possa entrare, come si è detto, il medesimo numero di volte nella ultima figura della somma da partirsi, e

con

con questo al solito si rende al suo termine la seconda operazione. Si abbia dunque da proseguire di estrarre la radice quadrata in questo numero 7056, intorno a cui già si sà, che la radice delle due prime figure è 8 coll' avanzo 6. Si prende questo 6, e si pone appresso al 56, e si scrive intero il 656, e questo è il numero, che si dee partire. Si raddoppia la radice trovata 8, e si fa 16. Come quì si vede col punto accanto per inserire in quel luogo il quoziente, che si troverà. Si parte dunque il numero preparato, con lasciare l' ultima figura a man destra, e con cercare quante volte il 16 entra nel 65, e si trova, che vi entra 4 volte coll' avanzo di una unità, che letta coll' ultima figura lasciata nel numero da partirsi, dice 16. Si dimanda dunque, se questo quoziente 4 entra in questo 16 il medesimo numero di volte, con cui è entrato il 16 nel 65, e perchè si vede, che per l' appunto entra queste 4 volte, perciò si pone questo 4 al luogo della radice dopo l' 8, e resta compita la operazione, la quale ha dato l' 84 per radice del 7056. Ma se in vece di questo numero 7056 si fosse dato il primo numero 6456, da cui levata la prima radice 8, non era rimasto avanzo alcuno, il numero, che in questo caso si sarebbe dovuto partire, sarebbe stato solo il 56, cioè le sole figure poste nel secondo spartimento, e perchè non sarebbe stato possibile, che il 16 numero doppio della radice trovata, e partitore lo avesse partito, perciò nel luogo della radice dopo l' 8, si sarebbe scritto uno zero, ed il 56 sarebbe rimasto uno avanzo, e come tale si sarebbe scritto dopo la radice trovata in questo modo 80 $\frac{56}{160}$, del qual modo di scrivere gli avanzi delle radici quadrate più a basso si parlerà.

XV. Se la data somma, per estrarre da essa la radice quadrata contenesse più di due spartimenti, più di tre, di quattro &c. si rinnoverebbe la operazione fatta per trovare la seconda figura della radice nello esempio precedente, per operare sopra ciascuno degli spartimenti susseguenti, prima con preparare il numero da partirsi nel modo predetto, poi con preparare il partitore anche esso alla maniera precedente. Si dà per regola generale, che trovandosi il partitore preparato, o uguale, o maggiore della somma da partirsi, letta senza la ultima figura, non si dee intraprendere la divisione, perchè

non

non ſi può partire una tal ſomma, ma ſi dee nel luogo delle radici porre uno zero, e tutti i numeri, che ſono nella ſomma, che ſi voleva partire ſi conſiderano, come uno avanzo, appreſſo a cui ſi hanno da abbaſſare le due figure nello ſpartimento ſeguente, ſe vi è, per ſeguitare la eſtrazione della radice, oppure, ſe non vi è altro ſpartimento, ſi ha da ſcrivere accanto alla radice trovata, ſopra una linea, con porre ſotto la medeſima la unità, e altrettanti zeri quante ſono le figure, che compongono queſto avanzo, e ſi chiama un tale avanzo una frazione decimale. Si vuole quì aggiugnere un eſempio di eſtrazione di radice quadrata, che avvertito, ſervirà per tutti gli altri, che poteſſero eſſer propoſti.

Eſtrazione della Radice quadrata.

luogo de i partitori. (*luogo per le radici* | 657890

dal 43. 28. 19. 25. 21. 00

pr. partit. 125 — 728 *numero del ſecondo ſpartimento unito all' avanzo*

ſec. partit. 1307 — 10319 *numero del terzo ſpartimento unito all' avanzo*

terzo part. 13148 — 117025 *numero del quarto ſpartimento uniall' avanzo*

quarto part. 131569 — 1184121 *numero del quinto ſpartimento unito all' avanzo*

quinto part. 1315780 — 0000000

In una eſtrazione di radice quadrata della grandezza, che quì ſopra ſi vede, o di qualunque altra grandezza, è neceſſario ſapere il modo da ritrovare l'avanzo. Si nota però a tale effetto, che preparato l'intero partitore, e cominciato con eſſo a partire il numero ſimilmente preparato, la regola, che in queſta operazione ſi dee oſſervare, è la medeſima, che la regola data avanti per impiccolire un numero, che ha più figure, col mezzo della diviſione. Chi dunque ha bene appreſa una tal regola, rieſcirà per trovare in queſta operazione l'avanzo, che è neceſſario ſaperſi, perchè ſi poſſa andare avanti nella ricerca di tutte le figure, che dee avere una radice quadrata.

XVI. Un vantaggio principalissimo nasce da questa regola, quale è, di saper trovare in un tratto quel numero di parti, che sono necessarie per formare un corpo, o una figura quadrata: per esempio, se si dovessero sfilare in una figura quadrata 49729 uomini, basterebbe levar da questo numero la radice quadrata 223, e si saprebbe subito, che si potrebbero fare 223 file, e che ciascuna fila conterrebbe 223 uomini, che se fosse necessario ingrandire ciascuna fila di un uomo di più, 447. uomini, che si avessero in pronto, servirebbero per un tale ingrandimento, cioè il doppio della trovata radice quadrata con uno di più, somministrerebbe il numero degli uomini necessarj per lo ingrandimento di queste file, le quali conterrebbero 224 uomini per ciascuna.

Similmente si trova un campo capace nella sua veduta di contenere 33 uomini di fronte, e altrettanti di fianco, multiplicandosi questo numero in se stesso, si trova quanti uomini occuperanno questo terreno. Quando poi di un numero preciso di uomini si volesse fare una tal distribuzione, da cui risultasse la figura di un quadrato lungo, per far questo, sarebbe bene prefiggersi una tal quale proporzione, per regolarsi secondo questa, in tal contingente. Potrebbe essere per esempio la proporzione quella, che è del 6 al 4, del 5 al 3, o qualunque altra a nostro talento; ovvero, secondo la quantità del terreno, sopra di cui si dovesse distendere il Battaglione, perchè, come ognuno può facilmente persuadersi, quello spazio di terreno, che si richiede da un uomo all' altro, se è posto per fianco, è maggiore di quello, che si dee occupare da un uomo posto per fronte; così, se 3 piedi di distanza servono per ciascun uomo posto alla fronte, 7 almeno son necessarj per ciascun uomo, che si ponga nelle file, onde si potrebbe operare, quando questo caso dovesse accadere, secondo la proporzione del 7 al 3, per avere il numero degli uomini, necessario da impiegarsi in questo Battaglione; ma figuriamoci, che gli uomini, i quali si volessero porre alla fronte della figura, corrispondessero al 6, oppure al 5, e gli uomini, che si volessero porre al fianco corrispondessero al 4, oppure al 3, si dovrebbe operare come quì appresso, Pel numero maggiore della proporzione si multiplicherebbe il numero dato degli uomini, ed il risultato si partirebbe pel numero mi-

ro minore della proporzione, e da questo quoziente si leverebbe la radice quadrata, e nel numero della radice si vedrebbe il numero degli uomini posti alla fronte della figura. Poi il medesimo numero degli uomini si dovrebbe multiplicare pel minor numero della proporzione, acciò fosse diviso il risultato del numero maggiore della proporzione, e da questo nuovo quoziente, levata la radice quadrata, nel numero di questa si vedrebbe il numero degli uomini da porsi nelle file laterali. Ecco in un esempio, tutto il disteso della operazione. Il numero degli uomini dato è 3456, la proporzione, che si suppone è del 6 al 4. Si multiplica per

6 il 3456
prodotto 20736
si parta pel 4 5184 *quoz. da cui si leva la rad. quad.*
divisore 142 ——284 *rad. quad.* 72, *e num. di uomini da*
000 *porsi alla fronte.*

multiplichisi per 4 *il* 3456 *n. degli uomini supposti*
prod. che si parte per 6 13824
2304 *n. da estrarsi la rad. quad.*
divisore 88——704 *rad. quadr.* 48. *e num. di uomini*
000 *da porsi alle file di fianco.*

Di questo operato porrà essere la riprova il multiplicare le due radici fra loro, che ci renderanno intero il dato numero degli uomini.

48 *per* 72
288
576
3456

XVII. La maniera di distribuire in varie altre figure qualunque numero dato di uomini, si aggiugnerà, dove parleremo della descrizione di queste figure, e intanto s'insegnerà la maniera di levare la radice quadrata da i numeri composti. E' facile riescire in questa operazione, purchè uno avverta di non intraprendere l'estrazione della radice quadrata da i numeri composti, se prima non gli abbia ridotti all'ultima risoluzione, come s'insegnò, trattandosi d'impiccolire simil fatta di numeri. Compita, che sia una tale risoluzione, per il valore di quel numero, che è infimo nella spe-

ſpecie data, relativamente al quadrato, ſi multiplica l' ultimo prodotto derivato da tutte le precedenti multiplicazioni. Laonde, ſe le miſure, dalle quali ſi vuole levar la radice quadrata, comprendono l'eſapede, i piedi, i pollici, e le linee; eſſendo l' infima ſpecie le linee, ſecondo il valore di queſte, in ordine al quadrato, ſi multiplicherà, prima di eſtrarre la radice, tutta la derivata ſomma della multiplicazione delle precedenti miſure.

Vale una linea quadrata 864 linee quadrate.

Vale un pollice quadrato 72 pollici quadrati.

Vale un piede di eſapeda quadrata 6 piedi quadrati.

Sia per tanto dato queſto numero eſapede 59, piedi 4, pollici 9, linee 7, per eſtrarre da queſte miſure la radice quadrata. Ecco la riduzione

59
6
———
354
4 *piedi aggiunti*
prima riduz. ——— 358
12
———
358
716
9 *pollici aggiunti*
ſeconda riduz. ——— 4305
multip. per 12
———
4305
8610
7 *linee agg.*
terza riduz. ——— 51667
multip. per 864 *valore di una linea quad.*
———
413336
310002
206668
———
44640288 *ſom. ultima, da cui ſi dee cavare la radice quadrata, ſecondo la regola generale.*

Levata queſta radice quadrata, eſſa ſi parte pel numero della linea quadrata 864, e ciò, che riſulta è la radice quadrata dell' eſapede. L'avanzo, che rimane, levata la radice quadrata dell'eſapede, ſi multiplica pel 6 numero di un eſapeda, e il riſultato, ſi parte anch'eſſo per lo ſteſſo numero della linea quadrata 864, e nel quoziente ſi hanno i piedi quadrati. L' avanzo di queſta operazione ſi multiplica anch' eſſo per 12, e dal quoziente ſi leva un altra radice quadrata, che rappreſenta il num. de i pollici quadrati, e finiſce in queſto modo la operazione, da riſcon-

scontrarla, se è ben fatta, colla regola, che si dà per assicurarsi, se nella estrazione di qualunque radice quadrata si sia bene operato. La regola per questo riscontro, è la multiplicazione, la quale dovendosi fare, si multiplica la radice trovata per la radice medesima, e in questa multiplicazione si osserva tutto ciò, che fu osservato nella multiplicazione di un qualche numero, o semplice, o composto, quando più figure si trovano nel multiplicante, e fatta la multiplicazione nel risultato dalla unione di tutte le somme, si vedrà il numero, che fu dato, perchè da esso si estraesse la radice quadrata. Avrebbe potuto portare l'accidente, che il numero dato per questa estrazione di radice, non si fosse trovato perfetto numero quadrato, e allora si sarebbe ciò avvertito, se dopo la estrazione della radice si fosse veduto rimanere qualche avanzo: in un simile accidente, per far ritornare colla multiplicazione il numero, che dee venire, basta, che alla intera somma, già risultata dalla unione di tutte le altre, si aggiunga questo avanzo, che si vedrà tornare intero il numero, che dee tornare. Se questo numero non venisse intero, sarebbe stata malamente estratta la radice quadrata. Fu levata già la radice quadrata da questo numero 43281925 2100, e si trovò 657890. Si faccia dunque la riprova di questa regola con tale esempio,

```
      657890
  per 657890
  ----------
     3947340
    3289450
   4605230
  5263120
 59210100
------------
432819252100
```

nel quale ciò, che risulta per intera somma, fa vedere essersi bene operato nella estrazione della radice quadrata.

XVIII. Quanto si è proposto fin ora, riguarda il modo d'impiccolire una grandezza fino all'ultimo segno, a cui si può arrivare col mezzo della estrazione della radice quadrata. Rimane il secondo mezzo, che appartiene alla estrazione della radice cuba, essendochè anche nella ricerca, e ritrovamento di questa, abbiamo un altro modo d'impiccolire una numerica quantità. Siccome il cubo nasce dalla multiplicazione del numero quadrato per la sua radice, così l'8, che è numero cubo, nasce dalla multiplicazione del 4, che è numero quadrato pel 2, che è radice di questo numero quadrato, però dovendosi levare dal numero la radice cuba, non bisc-

bisogna contentarsi di levare da esso la radice quadrata, ma si dee con nuova operazione, solo propria per questo effetto, intraprendere la estrazione di un altra particolare radice, nella quale, come nel suo ultimo termine può risolversi qualunque numero dato. Non riesce molto difficile l'operare con questo metodo sopra il numero, quando la figura non passa la grandezza di una delle prime nove, perchè essendo una di queste, si vede subito in un occhiata, che si dia alla quì aggiunta tavoletta, quale è la radice cuba, che ad ognuna di quelle conviene.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	8	27	64	125	216	343	512	729

Dunque portando il bisogno di dover levare la radice cuba del 512, basta guardare nella distesa tavoletta, se questo numero si ritrova, e qual figura gli sta sopra, perchè presa questa figura, si sarà presa la radice cuba del numero dato. Può incontrare uno della difficoltà, quando dee levar la radice cuba da un numero, che non solo non si ritrova nella descritta tavoletta, ma che è molto più alto di qualunque di quelli, e rilevato con più di 4, di 6, ovvero di 9 figure. Per torre dunque una tal difficoltà, e render chi si sia pronto ad operare in simil congiuntura, si propongono tutte quelle cose, che si hanno da osservare necessariamente nella operazione.

In primo luogo il numero dato, perchè da esso si levi la radice cuba, dee esser diviso in varj spartimenti, ed ognuno di questi dee contenere tre figure, che si disgiungono dalle altre con un punto, ponendosi il primo punto al fianco della ultima figura scritta a mano destra della data somma. Quanti punti si troveranno così notati, ci renderanno avvertiti del numero delle figure, che dee avere la radice cuba, che si vuol ritrovare. Per fare questi spartimenti, si nota quello, che si notò negli spartimenti preparati, per levare dal numero dato la radice quadrata, cioè, che siccome nel primo di quelli non è necessario, che si trovino due figure, ma che può servire una sola, così ancora nel primo di questi non importa, che sieno tutte tre le figure, ma possono ritrovarsi

due

due ſole, e ſola una, ſenza che la mancanza delle altre cagioni varietà nella radice, che ſi vuol ritrovare. Trovato con queſta regola il numero delle figure, che ha da avere la radice cuba, ſi paſſa a trovare la qualità della prima, vale a dire, quale fra tutte le nove figure aritmetiche, ſia quella, che ſi dee porre nel primo luogo della radice. Si ha da trovare la qualità di queſta figura, con avvertire l' intero numero, che trovaſi nel primo ſpartimento poſto a mano ſiniſtra, il quale, o rieſce di ritrovarlo tale, e quale nella tavoletta preparata, o ſe non vi è per l' appunto, vi ſarà però uno di quelli, che più a queſto ſi accoſterà.

Accadendo di ritrovarlo tale, e quale, ſi prende quella figura, che gli ſta ſopra, e queſta ſi pone nel luogo delle radici, preparato da parte, e reſta compita la operazione pel primo ſpartimento; ſe poi non vi è per l' appunto, ſi oſſerva quel numero, che più ad eſſo ſi avvicina, e preſa per radice la figura, che gli ſta ſopra, ciò che gli reſta di avanzo, ſi pone da parte, e ſotto un frego ſi naſconde ogni figura poſta in queſto primo ſpartimento, intorno al quale non ſi fa altra operazione. Si tratta ora di dover trovare la ſeconda figura delle radici, per fare la qual coſa, dee avvertirſi uno de i due caſi, che poſſono eſſere accaduti nella prima operazione, cioè, ſe nel trovare la prima radice è rimaſto dello avanzo, oppure, ſe non è rimaſto avanzo alcuno. Se è rimaſto dello avanzo, preſſo a queſto ſi pongono tutte tre le figure del ſuddetto ſpartimento, e tutta la intera ſomma è quella, ſopra la quale ſi dee operare, intraprendendo la diviſione, che ſe non è rimaſto avanzo alcuno, la ſomma, che ſi dee preparare per l' effetto predetto, conſiſte ne i ſoli tre numeri, che compongono il ſecondo ſpartimento. Preparata dunque con un di queſti due modi la nuova ſomma, che ſi ha da dividere, è neceſſario trovare il numero diviſore. Si prepara il numero diviſore così: ſi prende tre volte la radice trovata, e ſi multiplica queſto riſultato per tutte le figure, che ſi trovano nella iſteſſa radice, ed il prodotto da queſta multiplicazione è il diviſore, intorno al quale ſi oſſerva, che ſe è maggiore delle figure, che ſono nella ſomma da partirſi, non conſiderate le ultime due, che ſi laſciano, è ſegno, che non ſi può partire, e che nel luogo della radice ſi dee porre

un

uno zero, con riguardare tutta la somma, che non si è potuta partire, come un avanzo da servirsene al solito nel proseguimento della operazione. Ma se è minore, si parte con la somma preparata, lasciate le due ultime figure, e il quoziente, prima si nota nel luogo della radice, come un altra figura, poi si riquadra, finalmente si fa il suo cubo. Fatte queste operazioni sopra la figura trovata, per questo quoziente, si multiplica il partitore, poi pel quadrato fatto si multiplica il predetto triplo della radice, e risulterà una seconda somma, che si pone a scala sotto la precedente, piegando la scala alla parte destra della prima somma, finalmente si pone il preparato cubo, come terza somma, secondo l'ordine della scala. Così disposte le altre somme, di tre se ne fa una con aggiugnerle insieme, ed il prodotto si dee levare dalla somma, che è partita, se si può, per trovare l'avanzo, se vi è, se non si può, si ha da scemare il quoziente, posto nel luogo delle radici di una unità per volta, tanto che, fatte tutte le predette operazioni, riesca trovare questo avanzo, se vi è, o di vedere una somma uguale alla somma partita, cosa, che accaderà quando il numero sarà numero perfetto cubo. Tutto quello, che si è fatto per trovare la seconda figura della radice cuba, si ripete per trovare la terza, la quarta, e quante occorrono; sicchè, se si farà vedere la regola applicata allo esempio, potrà questo servire per tutti gli altri casi corrispondenti.

XIX. Si levi la radice cuba del numero seguente 45.499.293. Avendo il dato numero otto figure, si divideranno queste figure in tre spartimenti, e di questi il primo avrà due sole figure. Nella Tavola delle radici cube non si trova il 45, ma si trova bene il 27 numero cubo ad esso più prossimo, sopra del quale si vede 3. Dunque questo tre deve essere la prima figura della radice cuba ritrovata, che ci lascia d'avanzo 18, perchè dal 27 al 45 tanta differenza appunto si trova. Questo avanzo si pone da parte, e si aggiungono ad esso le tre figure del secondo spartimento, così 18499, ed in questa serie di figure è preparata la somma, che ora si dee partire (preparato, che sia il partitore) per trovare la seconda figura della radice cuba. Dovendo il partitore essere fatto [come si è detto] col triplo della radice trovata, multiplicato

per

per la stessa radice; essendosi trovato per radice il 3, il suo triplo è 9. Multiplicando noi dunque questo 9 per il 3 abbiamo 27, e questo è il numero partitore di 184 solo, giacchè le altre due figure 99 si hanno da lasciare. Si potrebbe dire, che il 27 nel 184 ci entrerebbe sei volte, giacchè sei via 27 fa 162 numero minore del 184. Ma perchè, se questa somma 162 si prendesse colle due altre, che gli dovrebbero succedere, disposte tutte tre a usanza di scala, si rileverebbe una somma maggiore del dovere, per questo si dice, che ci entra sole 5 volte, e si pone questo 5 accanto al 3 nel luogo delle radici. Collocato il 5 al suo luogo, di esso si fa il quadrato 25, e poi il cubo 125. Successivamente per il 5 medesimo si multiplica il 27 e si ha la prima somma 135; quindi si multiplica il triplo della prima figura della radice, cioè il 9 per il quadrato del 5, cioè per 25, e si ha la seconda somma 225: in ultimo si prende per terza somma il cubo del 5, cioè 125, e queste tre somme si distribuiscono così

135
 225
  125

che raccolta in un intera somma fa 15875 *questa si leva dal*
numero partito 18499 *e si vede subito tale*
avanzo 2624 *che ci da luogo a proseguire l' operazione.*

Si prende dunque questo avanzo 2624, che unito appresso ai numeri dell'ultimo spartimento 293, produce la somma da partirsi 262[illegible]293. Per trovare ora il partitore si prende il triplo della radice trovata 35, cioè 105, e si multiplica per lo stesso 35, e produce 3675 numero partitore, e si osserva quante volte questo numero entra nel solo 26232, lasciate al solito l' ultime due figure 93, procurandosi in questo fare un quoziente tale, che multiplicando il numero partitore, ci lasci un prodotto, il quale raccolto insieme colle altre due somme di numeri da trovarsi, non sia cagione di un numero maggiore del suo dovere; pertanto venendo noi a partire il dato numero, troviamo, che ci sta 7 volte, perchè 7 via 3675 fa 25725, numero minore, quanto basta, della partita somma; si pone però questo 7 nel luogo delle radici per terza figura, e si riquadra, e viene 49, e si prende il suo

 cu-

cubo, e si ha 343. In oltre si tirano fuori le tre somme, come nella seconda parte di questa operazione si è già fatto. La prima somma si fa con multiplicare il numero partitore per l'ultima figura della radice trovata, cioè con multiplicare per il 7. 3675, e si ha per prima somma 25725, poi per il quadrato 49 si moltiplica il triplo della radice, che si pose, cioè 105, e risulta la seconda somma 5145, in ultimo luogo si prende il cubo fatto 343, e queste tre somme così si hanno da distribuire a scala

25725
5145
343

e poi si hanno da raccogliere in una somma intera, la quale per l'appunto da 2624293 cioè una somma uguale all'intero numero, che si doveva partire, e che però fa vedere, che il numero dato era cubo perfetto, giacchè non ha lasciato avanzo alcuno, dopo fatta l'estrazione di sua radice, che si è trovata essere 357. Ecco tutta insieme l'operazione.

I. Radice 3
Triplo della radice. 9   *re* 45.499.293. | 357
II. radice 5 — 27 *part. di* 18499 - - 5 *quoz. e sec. fig. della rad.* 35
quadrato 25 135   15875   105 *Triplo della rad. multipl.*
225   2624293. 315 *per la stessa radice* 35
Cubo 125   125   525
15875   3675 *numero divisore*
III. radice 7 X 3675   7. *quoziente, e III. radice*
quadr. 49 X 105 *tri-* 25725
plo della radice 5145
cubo del 7 —— 343
2624293 somma uguale alla somma partita; quando qualche avanzo fosse rimasto, sarebbe stato un contrassegno, che il numero da cui si fosse estratta la radice cuba, non sarebbe stato perfetto numero cubo.

XX. L'uso di questa regola non è veramente sì grande, che possa paragonarsi alla estrazione della radice quadrata, niente di meno può occorrere qualche caso nella vita civile, che abbia bisogno di far mettere in opera una tal regola. Per esempio si deve fare un pozzo, che contenga 35937 piedi cubi di acqua, si vogliono sapere le dimensioni di questo Pozzo; oppure un altro esempio: certa persona fa un loggiato, che ha di misura 104976000. piedi cubi, la larghezza è 6 vol-

te

te più dell' altezza, e questa 3 quarti meno della lunghezza, si potrebbero voler sapere le giuste misure di questo loggiato. L' una, e l' altra di queste due domande deve essere sodisfatta coll' estrazione della radice cuba, è ben vero, che la seconda esige qualche altra operazione, prima che si venga alla estrazione di questa radice, perchè si hanno da prendere i numeri delle misure supposte, cioè 1. 6. 24. e ciascuno di questi si ha da multiplicare per l' altro, e col prodotto dalla multiplicazione si deve multiplicare il dato numero 104976000, perchè dal risultato di questa nuova multiplicazione si estragga la radice cuba, nella quale si vedrà la misura dell' altezza del proposto loggiato, ed una tale misura ingrandita per 6 darà la larghezza, come in ultimo, multiplicata per il quadruplo del 6, darà la lunghezza, e comparirà l' operazione ben fatta, se la multiplicazione delle tre misure trovate l' una per l' altra lascierà il prodotto uguale a piedi cubi dati nella dimensione del loggiato.

1. 6. 24 *Proporzione delle misure prese*
6 / 144

divide 144 *il* 104976000 729000 *Quoziente*
417
1296
0000000

Estrazione di radice cuba da 729000 90 *radice cuba*
90 *prima misura, che multiplicata per 6 da*
540 *seconda mis. che multipl. per 24 ovvero per* $\frac{1}{4}$ *del 24 lascia*
2160 *terza misura*

Multiplicazione delle tre misure l' una per l' altra.

90 — 540 — / 2160
48600 / 8640
17280
1296000

somma che riscontra 104976000

XXI. Quando occorresse di dover operare con piedi cubi, con pollici cubi, con linee cube si aggiungono opportunamente le quantità di tutte queste misure. Equivale il piede cubo a 216, e ogni piede di esapeda cuba equivale a 36. Ogni

 pol-

pollice cubo equivale a 373248, ed ogni pollice di esapeda cuba equivale a 72. Ogni linea cuba equivale a 644972544, ed ogni linea di esapeda cuba equivale a 864.

XXII. Per assicurarsi se dal numero dato si sia esattamente levata la radice cuba si deve prima multiplicare la radice trovata in se stessa, cioè si deve prima riquadrare, e poi il risultato da questa multiplicazione si deve nuovamente multiplicare per la radice cuba, e se in questo ultimo prodotto si vede il numero, da cui si suppone estratta la radice cuba, è certo, che l'operazione è ben fatta. Notisi, che se dopo l'estrazione della radice cuba, fosse rimasto qualche cosa nel numero, da cui si fosse levata, questo avanzo si dovrebbe aggiugnere al risultato della ultima multiplicazione, acciocchè per mancanza di questo non si dovesse credere mal fatta l'operazione.

XXIII. L'estrazione della radice da una quarta potenza si riduce alla estrazione della radice quadra in questo modo, perchè prima da tutto il numero dato si leva la radice quadra, e poi da questa radice trovata, si estrae un altra radice quadra, e in questa ultima radice estratta si ha la radice della quarta potenza. Più laboriosa è l'estrazione della radice dalla quinta potenza, perchè non meno di sedici operazioni si hanno da fare per levare una radice di due figure da una quinta potenza. Lo spartimento dei numeri deve farsi di cinque in cinque, come di sei in sei, di sette in sette &c. Si fanno li spartimenti dei numeri nella estrazione delle radici dalle potenze sesta, settima, ottava &c. Fatto lo spartimento, ecco come succedono le operazioni.

Si prende di tutte le figure che compongono il primo spartimento, la radice più prossima, e questa posta nel luogo assegnato per le radici, si nota sotto le figure del primo spartimento l'avanzo, se pur rimane, con abbassare le altre cinque figure, che si trovano nel secondo spartimento, e con questo resta finita l'operazione, che si ha da fare per trovare la prima figura della radice. Ora per trovare la seconda succedono le seguenti operazioni.

1. si alza il numero della radice trovata alla potenza, che precede la potenza su cui si opera, cioè in questo caso alla quarta.

2. Il risultato si multiplica per il numero di questa stessa data potenza, cioè quinta.

3. Il

3. Il prodotto di questa multiplicazione deve partire il numero preparato per levar da esso la seconda figura della radice dimandata.

4. Il quoziente trovato è la sèconda figura della radice, che si dimanda, onde si pone accanto al primo nel luogo delle radici.

5. Questa seconda radice multiplica il partitore, e si serba questo primo prodotto.

6. Si alza il numero della prima radice trovata alla potenza sopra cui si opera, meno due, cioè alla terza potenza.

7. Il risultato si multiplica per 10.

8. Il prodotto da questa multiplicazione si multiplica per il quadrato della seconda radice trovata, e il risultato si serba per il secondo prodotto.

9. Si alza la prima radice trovata alla quinta potenza meno tre, cioè alla seconda potenza, e si multiplica per 10 il risultato.

10. Questo prodotto si multiplica per il cubo della seconda radice trovata, e si serba questo terzo prodotto.

11. Si prende la prima radice trovata, e si multiplica per il segno della potenza sopra di cui si opera, cioè per il cinque.

12. Il prodotto si multiplica per la predetta potenza della seconda radice trovata, cioè per la quarta potenza, e si serba il risultato per il quarto prodotto.

13. Si alza la seconda radice trovata a quella potenza, su cui si opera, cioè quinta, e il risultato da il quinto prodotto.

14. Tutti questi cinque prodotti si distribuiscono uno sotto dell' altro a scala andando la scala a mano destra, e si fa di tutti una sola somma.

15. Questa somma si confronta col numero preparato per trovare la seconda figura della radice, e deve essere o uguale, o minore, perchè se fosse maggiore bisognerebbe scemare la seconda supposta trovata radice; essendo uguale è contrassegno, che il numero dato è una perfetta quinta potenza, se è minore si fa la sottrazione del maggiore, e non vi essendo altro spartimento di numero sopra cui si abbia a continuare l' operazione resta questa finita, e si è trovata la radice, che si dimanda; ma se vi sono altri numeri da poter continuare l' estrazione della radice all' avanzo si abbassano questi numeri, e si

e si ripetono tutte le operazioni, che si son fatte per trovar la seconda figura della radice, e queste operazioni hanno da dare la terza, la quarta, e qualunque altra figura, che possa comportare la somma tutta del numero dato.

Per l'estrazione di queste radici si aggiungono le seguenti tavole, acciocchè si abbia in pronto il modo di trovar la prima figura della radice, che si dimanda.

Tavola per i numeri della quinta potenza.

1.	2.	3.	4.	5.	6.
1.	32.	243.	1024.	3125.	7776.

7.	8.	9.	10.
16807.	32768.	59049.	100000

Tavola per i numeri della quarta potenza.

1.	2.	3.	4.	5.	6.
1.	16.	81.	256.	625.	1296.

7.	8.	9.	10.
2401.	4096.	6561.	10000.

Si possono preparare le tavole delle altre potenze con multiplicare ciascun numero della precedente, per quella figura a cui appartiene, per esempio, se il 32 è la quinta potenza del due, multiplicando il 32 per la sua figura a cui appartiene, cioè per il 2 si avrà 64, sesta potenza del 2, e così degli altri.

XXIV. L'estrazione della radice della settima potenza si regola per un pezzo come la precedente, se non che dove il numero, che qualchevolta multiplica uno de risultati è il dieci, in questa operazione è diverso, perchè nel settimo luogo è il 21, nel nono luogo è il 35; ma dopo di aver trovato il terzo prodotto, occorre di trovare due altri fra il terzo, e il quinto, che sono particolari di questa regola; onde la maniera di trovarli è tale.

1. Si prende il cubo della radice prima trovata, che si multiplica per 35.

2. Il

2. Il prodotto si multiplica per la quarta potenza della seconda radice trovata, e il risultato fa il quarto prodotto.

3. Si prende la stessa prima radice trovata, e si multiplica per il numero della potenza su cui si opera, cioè per il 7.

4. Il prodotto si multiplica per la potenza del numero della seconda radice trovata, e nel risultaro si ha il quinto prodotto.

Trovati questi due prodotti, si ritorna alle regole della operazione precedente, espresse sotto il numero 11, 12, e si termina questa operazione, come quella, e a simiglianza di queste qualunque altra, che si possa intraprendere per levare la radice da qualsisia più alta potenza.

C A P. V.

Dell' impiccolire le quantità colle lettere dell' Alfabeto.

§. I.

Della sottrazione, e divisione.

I. TUtte le operazioni, che nell' antecedente Capitolo si sono fatte per impiccolire una quantità espressa con numeri, si possono rinnovare sopra le quantità, che sono notate per mezzo di lettere dell' Alfabeto. Nel che fare è di molta importanza, per procedere con chiarezza, separare l' una dall' altra le combinazioni tutte di molti, e differenti casi, che possono accadere, quando si ha da operare o sopra grandezze complesse, o sopra grandezze incomplesse, cioè, come altrove abbiamo detto, semplici, e composte. Prima però di ogni altra cosa osserviamo, che dovendosi impiccolire le grandezze coll' ajuto di quel segno, che già lo abbiamo chiamato altrove segno del meno, l' uso di un tal segno è tanto importante, quanto pure importa l' avvertire, che anche l' altro segno chiamato del più suole avere una gran parte in queste medesime operazioni: per questo effetto pertanto l' artificio principale della operazione consiste in ben sapere adattare a proprii luoghi questi due segni, sicchè con male collocarli non dovesse riuscire d' intraprendere una operazione, e che poi ne risultasse un altra, o sortisse la disgrazia, che non se ne concludesse veruna.

na. Da questa applicazione ben fatta dei segni al suo luogo risulta la bontà di tutta l'operazione, e quella sempre si avrà, ogni qual volta faremo il cambio di questi segni, mettendo quello del meno accanto all' avanzo, se accanto alla quantità, che avrà operato, troveremo quello del più, o trasmutando al contrario nel segno del più quello, che era del meno per scrivere il risultato della operazione, che deve mostrare l' impiccolimento della quantità scritta, e proposta con lettere, essendosene fatta la sottrazione. Eccoci dunque a determinare, che il primo modo d' impiccolire le quantità contrassegnate con lettere è la sottrazione, la quale potendo esser richiesta, perchè si faccia sopra le quantità semplici, che sono espresse o colle medesime lettere, o con diverse, esige, che si dia la regola più propria per facilitare il buon esito della operazione. Se la quantità, che si vuol sottrarre porta le medesime lettere, che la quantità da cui si deve fare la sottrazione, ognuno conosce benissimo, che tolta dalla prima quantità data la seconda richiesta, non ha d'avanzare cosa alcuna; così se sia data la quantità b, perchè da essa si levi l' altra quantità b, nulla dovrà rimanere dopo fatta la sottrazione. Ma se la prima quantità fosse numerata con maggior numero, che la minore, come se si proponessero $6g$, perchè da essi si togliessero $4g$, si dovrebbe, come nella sottrazione dei numeri levare il minor numero dal maggiore, e rimarrebbe per avanzo $2g$. Potendo poi essere il più delle volte, che le quantità date contengano lettere differenti, come succede, se dalla quantità b si deve levare la quantità c, termina l' operazione il segno del meno, che si frappone alle due quantità date, in tal modo $b - c$ oppure $3b - 3c$. Nulla di più rimarcabile occorre, quando la sottrazione si abbia da fare sopra le quantità incomplesse, proposte a noi per mezzo di lettere.

II. E' meglio dunque passare a vedere, come sia il costume di operare, quando le quantità date sono complesse, o composte, per sottrarre da esse altre quantità ugualmente composte. Le lettere, che sono in queste quantità composte possono esse pure essere o le medesime, o diverse, e l'uno, e l'altro, che si verifichi su questo particolare, deve osservarsi, se i segni, che si trovano con esse sieno sempre i medesimi, o sieno sempre diversi, o quando i medesimi, e quando diversi

verſi. Se i ſegni ſono i medeſimi, tanto nella quantità, che ſi deve ſottrarre, quanto in quella, da cui ſi deve fare la ſottrazione, e ſono notate tutte due le quantità colle medeſime lettere; ſe la ſuperiore è maggiore, e l' inferiore minore, ſi deve la minore levare dalla maggiore, e ſi deve all' avanzo premettere il medeſimo ſegno; ma ſe la ſuperiore è minore della inferiore, e il ſegno loro è il —, deve la quantità minore levarſi dalla maggiore, e ſi deve porre l' avanzo ſcrittogli avanti il ſegno †. Che ſe la quantità ſuperiore è maggiore della inferiore, e ha di più avanti di ſe il ſegno †, quando queſta ha il ſegno —, ſi aggiungono inſieme tutte due le quantità, con ſcrivere avanti ad eſſe il ſegno della maggiore, cioè il † col qual ſegno, ugualmente ſi noterebbe la quantità ſeguente nell' avanzo, ſe la ſuperiore notata col ſegno † foſſe minore dell' inferiore, notata col ſegno —, fatte come prima di due ſomme una ſola. Al contrario ſe accadeſſe, che la quantità ſuperiore foſſe notata col ſegno —, e foſſe maggiore della inferiore notata col ſegno † ſi dovrebbero unire inſieme le due ſomme, ma con ſcrivere avanti il ſegno —, che ſi premetterebbe ancora alla ſomma delle medeſime quantità, quando la ſuperiore notata col ſegno —, foſse minore, e l' inferiore foſſe maggiore, e aveſse avanti il ſegno †. Come finalmente, ſe le lettere foſsero diverſe, e diverſi i ſegni, laſciato il ſegno alla quantità ſuperiore, ſi muterebbe nel ſegno contrario quello della inferiore, con ſcrivere tali, e quali foſſero le quantità nel proprio luogo.

Nel ſeguente eſempio ſi oſſervano tutti queſti caſi compreſi.

8*a* — 9*c* — 5*b* † 8*m* † 3*n* — 10 *r* — 6 *p* † *q* † 3*c*
5*a* — 4*c* — 7*b* — 4*m* — 5*n* † 5 *r* † 12*p* — *u* † 7*c*
3*a* — 5*c* † 2*b* † 12*m* † 8*n* — 15 *r* — 18*p* † *q* † *u* — 4*c*

Queſta mutazione di ſegni non deve cagionar maraviglia, perchè dovendo la grandezza, che ſi leva dall' altra, di poſitiva diventar negativa, per queſto è neceſſario il cambiamento dei ſegni nelle grandezze, le quali ſi vogliono ſottrarre dall' altre.

III. L'altra maniera di multiplicare la quantità, che ſi eſprime con lettere è chiamata diviſione, perchè riduce le quantità a tal grado di baſſezza, che non è più quella, che era prima, e ſolo può riſalire al ſuo poſto, ſe la quantità, che divide, ſarà multiplicata per le parti della diviſione. Queſte parti, che riſultano dalla diviſione col nome proprio le chiamiamo quoziente, perchè ci fanno vedere quante volte la quantità che divide, è potuta entrare nella quantità che è ſtata diviſa. Le operazioni di queſta regola, a ſimilitudine di tutte le altre, ſi formano, e ſopra le quantità ſemplici, o incompleſse, e ſopra le compleſse, o compoſte; e perchè ciaſcuna di eſse, dopo l'operazione dovrà rimanere impiccolita, cioè dovrà moſtrare meno numero delle ſue parti, perciò il ſegno proprio, che accompagnerà, o con cui ſi opererà in queſta regola, ſarà il ſegno del —, che ſi ſcriverà con porre ſopra di eſso la quantità da dividerſi, e con ſcrivere al diſotto la quantità, che ha prodotto la diviſione. Nell'eſempio, che quì ſi aggiugne $\frac{b}{c}$ ſi vuol dire, che la quantità chiamata b è rimaſta diviſa dalla quantità chiamata c. Ogni qual volta dunque che ſia data una quantità da dividerſi, ſi ha da vedere, ſe tutte le lettere, che ſono nella quantità, che divide, ſi trovino in quella, che ha da rimanere diviſa, perchè trovandoſi le medeſime lettere nell'una, e nell'altra quantità, il quoziente dovrà eſsere 1, perchè non può eſſere, che la ſteſsa grandezza più di una volta ſia contenuta da ſe medeſima. Se le lettere, che ſi trovano nelle date quantità aveſſero qualche lettera di commune, nella diviſione ſi leverebbe la lettera commune, e ſi ſcriverebbero le ſole lettere diverſe nel modo predetto. Così data, perchè ſi divida, la quantita acb per la quantità cd, il quoziente di queſta diviſione ſarà $\frac{ab}{d}$, e ſe è data la quantità bnd, perchè ſi divida per la quantità bn, il quoziente, che dovrà comparire, ſarà la ſola quantità d. Come che le lettere poſsono eſsere tal volta precedute dalle cifre Aritmetiche, ſi deve avvertire, come in queſto caſo dovrebbe farſi la diviſione; ſi farà la diviſione prima con dividere la quantità per le ſue lettere, e poi il numero per il ſuo numero alla maniera della diviſione dei numeri, perciò ſe foſse data queſta quantità

tità $9bb$ da dividersi per $3b$, prima si dividerebbe bb per il b, e rimarrebbe b, poi si dividerebbe il 9 per il 3, e rimarrebbe per quoziente il 3. Onde questo quoziente si scriverebbe $3b$. Se il numero si trovasse dopo le medesime lettere, come se si avesse da partire $b5$ per $b3$, quello si scriverebbe nel quoziente, che fosse di più nel numero da partirsi, premessa la medesima lettera; onde nell' esempio dato, fatta la divisione, il quoziente sarebbe $b2$. Accadendo poi, che o tutte le lettere delle due somme fossero differenti, o maggiore il numero unito alla quantità da partirsi, questo sarebbe quel caso in cui il quoziente rimarrebbe una frazione, ed all' usanza di una frazione si dovrebbe scrivere: però essendo dato bcd da partirsi per ef, oppure, se fosse dato b^3 da partirsi per b^7, si scriverebbe il primo quoziente in tal modo $\frac{bcd}{ef}$, e il secondo così $\frac{b^3}{b^7}$; ovvero in tal guisa b^{3-7}, oppure b^{-4}, se non forse meglio si scriverebbe così $\frac{1}{b^4}$ per manifestare con questa formula la frazione ridota al più piccol termine, con aver diviso ciascuno dei detti termini $\frac{b^3}{b^7} \times b^3$, come si dirà al suo luogo. Se invece dei numeri anteposti, e posposti alle quantità, che si dividono, e a i loro divisori si premettano i segni del più, e del meno, che come altrove abbiamo detto, ci distinguono le quantità positive dalle negative, questa regola si deve notare, che se la quantità, che si divide è positiva, cioè porta avanti di se il segno †, e la quantità che divide è similmente positiva, il quoziente rimane positivo: così diviso † bc per † b rimane per quoziente b † c. Se l' una, e l' altra quantità è negativa, anche in questo caso il quoziente rimane positivo: così diviso $-c \times -d$ ecco il quoziente † $\frac{c}{d}$. Ma se la quantità positiva si divida per la negativa, e la negativa per la positiva, in ciascheduno dei due casi il quoziente risulterà negativo, diviso dunque † $ab \times -b$ sarà il quoziente $-a$, o diviso $-cd \times$ † ef sarà il quoziente $-\frac{cd}{ef}$.

IV. Quanto si è stabilito fin quì determina le regole per impiccolire col mezzo della divisione le quantità, che portano

no il nome di quantità ſemplici, o incompleſſe, quando le lettere, che le eſprimono ſono in tutte due le quantità le medeſime, quando ſono diverſe, quando tanto nell' una, che nell' altra ſi trovano parti medeſime, e parti diverſe, e quando alle lettere ſono antepoſti i ſegni poſitivi, e negativi, e finalmente quando ſono precedute dai numeri, o quando queſti ſi trovano dopo di eſſe. Ma perchè il più delle volte ſi ha da operare con quantità, che ſono compleſſe, o compoſte, a queſto effetto ſi aggiungono opportunamente quelle regole, che ſi dovranno avvertire in qualunque combinazione di caſo, che ſia per poter biſognare. Si ſupponga per tanto in primo luogo di doverſi partire una quantità compoſta, che non abbia lettera alcuna ſimile alle lettere della quantità compoſta, che la deve dividere, come ſarebbe, ſe ſi doveſſe dividere $bc + df + gb$ per $mn + pr$; in queſto primo caſo ſi vede preſto il quoziente, perchè poſta ſopra una linea la prima quantità, e ſotto la medeſima linea poſta l'altra quantità, in queſta eſpreſſione ſi ha il quoziente proprio ſenza tante altre combinazioni; ſi ſcriva dunque così $\frac{bc + df + gb}{mn + pr}$, che rimane diviſa la data quantità. Ma ſe la quantità, che ſi deve dividere è tale, che il diviſore ſia capace di dividerla per avere lettere corriſpondenti a quelle, che ſi trovano in eſſa; la diviſione ſi deve fare quaſi nella ſteſſa maniera, con cui ſi fa la diviſione dei numeri, avendoſi ſolo riguardo ai ſegni del più, e del meno, che non ſempre ſi conſervano i medeſimi, ma ſpeſſo fra loro ſi cambiano. Si vuole dividere la ſeguente quantità $dd + 2de + ee + 2df + 2ef + ff$ per $d + e + f$. Come dal caſo propoſto ſi vede, avendo tutte le lettere il medeſimo ſegno del più, tanto nella ſomma, che parte, quanto in quella, che ſi ha da partire, anche il quoziente deve riſultare col medeſimo ſegno del più. Ecco il modo di trovare queſto quoziente. Si partono per la prima lettera del partitore d le prime due lettere della quantità da partirſi dd, e ſi trova il quoziente d. Per queſto quoziente trovato ſi multiplica il diviſore, e riſulta $dd + de + df$, queſto riſultato ſi pone ſotto altrettante parti della quantità diviſa, proccurando, che ogni parte della ſomma inferiore corriſponda ſotto la parte della ſomma ſuperiore, che ſi trova avere le medeſime lettere, e poi ſi fa la

ſot-

sottrazione per avere nell' avanzo, appresso a cui si cala una parte della somma superiore, la quantità da partirsi: dunque trovato che l'avanzo è o † *de* † *ee* † *df*, si pone appresso a questo avanzo la parte † 2*ef*; e si ripiglia sopra questa somma la divisione alla maniera di prima. Si parte per la prima parte del divisore, cioè per † *d* la prima parte della preparata somma † *de*, e si trova per quoziente † *e*, col quale si multiplica il partitore, e risulta *ed* † *ee* † *ef*, che si pone parte per parte sotto lo somma, che si è divisa, secondo la regola di sopra data, e si fa una nuova sottrazione per avere nell'avanzo la nuova somma da partirsi, per compire tutta la divisione dimandata. Fatta dunque questa nuova sottrazione, si trova, che l'avanzo è o † o † *df* † *ef* † *ff*. Questa nuova somma si parte, e si trova per quoziente † *f*, che multiplicata secondo il solito, produce *df* † *fe* † *ff*, il qual risultato posto sotto la sua somma, perchè se ne faccia la sottrazione, si trova, che non avanza niente, e con questo si vede compita l'operazione, aggiunta perciò quì appresso per regola delle altre, che si potessero proporre colla medesima supposizione.

quantità da dividersi	*dd* † 2*de* † *ee* † 2*df* † 2*ef* † *ff*	
divisore d † *e* † *f*.	*dd* † *de* . . . † *df*	*Quoz.*
	o † *de* † *ee* † *df* † 2 *ef*	*d* † *e* † *f*.
	de † *ee* . . . † *ef*	
	o † o † *df* † † *ef* † *ff*	
	df † *ef* † *ff*	
	o † o † o	

V. In questo esempio si è operato sempre col medesimo segno del più. Si propone ora un altro esempio, nel quale il partitore ha sempre il segno del meno. Si opera in questo come nell' esempio precedente, solo che si osservi, che incontrandosi il divisore notato col segno del meno, e col medesimo segno, scritta la quantità, che si deve dividere, il quoziente deve avere il segno del più. Se poi il divisore ha il segno del meno, e la quantità, che si divide, ha il segno †, in questo caso il quoziente si scrive col segno —. Occorrono tutti due questi casi nel seguente esempio in cui si parte *aa* — *bb* — 2 *ad* † *dd* per *a* — *b* — *d*.

In

In primo luogo partendosi *aa* per *a* il quoziente rimane *a*. Questo si pone nel luogo del quoziente, e per esso si multiplica tutto il divisore, ed il prodotto posto al solito luogo si fa la sottrazione, come si deve. Se il prodotto, che risulta dalla multiplicazione di *a* — *bd* per *a* si trova il seguente *aa* — *ab* — *ad*, si pone la prima parte di questo risultato *aa* sotto la prima parte del numero da partirsi *aa*, si pone la seconda parte — *ab* sotto la seconda parte — *bb*, e la terza parte — *ad* sotto la terza — 2*ad*. Sottratta la prima parte dalla prima rimane o. La seconda non potendosi sottrarre dalla seconda rimane tale quale † *ab* — *bb* se non che è preceduta dal segno del più, la terza sottratta dalla terza, lascia — *ad* dunque tutto l'avanzo è questo o † *ab* — *bb* — *ad*, a cui si aggiugne la parte rimasta dalla somma da partirsi † *dd*, e si ripete la divisione. In questa seconda divisione, la quantità † *ab* — *bb* — *ad* tutta notata col segno —, è quella che deve dividersi dal divisore notato col segno medesimo del —; sicchè il quoziente deve scriversi preceduto dal segno †. Partendosi dunque † *ab* per *a* — *b* — *d* rimane per quoziente † *b*, e questo si pone al suo luogo, vicino al primo quoziente trovato, e ripetuta la multiplicazione, che si deve fare di questo nuovo quoziente coll' intero divisore, risulta la quantità *ab* — *bb* — *bd*, la quale disposta sotto la somma divisa nella maniera di prima, si passa a fare la sottrazione. Sottraendosi dunque *ab* dalla *ab* rimane o, sottraendosi — *bb* da — *bb* rimane o, e perchè la terza quantità — *bd* non si può sottrarre dalla terza quantità — *ad*, questa si scrive, come è, con farglı precedere il segno †, e si scriverà † *bd* — *ad*, e non trovandosi altro nella somma, che si deve sottrarre, si pone a questo avanzo la parte rimasta nella somma partita † *dd*, e questa nuova somma † *bd* — *ad* † *dd* si divide per il medesimo divisore *a* — *b* — *d*. Porta il caso, che la prima lettera del divisore non si trova nella prima parte della somma, che si divide, ma si trova nella seconda: or questa mutazione poco importa, e tanto serve, che ella in qualche luogo si trovi, perchè si possa fare la divisione, e perchè fra le quantità, che si dividono, si trova il segno del †, trovandosi nel mezzo delle quantità *ad*, *dd*, perciò il quoziente sarà preceduto dal segno — e sarà fatta la divisione — *d*; questo quoziente si po-

si pone al suo luogo, e si ripete la multiplicazione, dalla quale risulterà $-ad + bd + dd$. Queste tre parti di quantità, poste sotto le parti della somma divisa, si hanno da sottrarre dalla medesima, e perchè tutte corrispondono fra loro, perciò non si lascia avanzo alcuno, e rimane compita l'operazione, che quì tutta insieme si dispone.

$$\begin{array}{l} aa-bb-2ad+dd \quad \text{per } a-b-d \\ \underline{aa-ab-ad} \qquad\qquad Q.\ a+b-d \\ o+ab-bb-ad+dd \\ \underline{ab-bb-bd} \\ o\ .\ o+bb-ad+dd \\ \underline{-ad+bd+dd} \\ o\quad o\quad o \end{array}$$

VI. E' accaduto nella operazione, che quì si è fatta avvertire, per due volte un risultato della multiplicazione del divisore per il quoziente con alcuni termini, che non erano nella somma, che si partiva, così questo termine $-ab$, che si trova nella prima multiplicazione, non si trova nella somma partita, e quest' altro $-bd$, che si legge nella seconda multiplicazione, non si trova nella sua somma partita, e pure non per questo è rimasta incagliata l'operazione, ma si è preso l'espediente di trasportare l'uno, e l'altro termine nei luoghi de i proprj avanzi, solo con mutare il segno di negativo, che era, in positivo, e questo ora lo notiamo, perchè, occorrendo il caso stesso in altre operazioni, si abbia da proseguire quella operazione in cui accaderà nella medesima maniera, che si è proseguita la precedente. Si vuole ora aggiugnere un altro esempio, in cui più di una volta abbia da succedere la stessa cosa, perchè ci somministri più facilità di operare in qualunque altra simile congiuntura. Si diviva dunque per $e-g-f-b$.

$$\begin{array}{ll} \text{la quantità} & ee-2eg-ff+gg-eb-fb+gb \\ & \underline{ee-eg-ef-eb} \\ & o+eg+ef-ff+gg-fb+gb \\ \text{Quoz.} & \underline{eg+gg+gf+gb} \\ e-g+f. & o+ef-gf-ff-fb \\ & \underline{ef-gf-ff-fb} \\ & o\quad o\quad o\quad o \end{array}$$

VII. Si vuole aggiugnere un altro esempio, nel quale, tanto il divisore, che le quantità da dividersi sono notate con diversi segni, per osservare anche in questo caso, come una tale operazione dovrebbe da noi intraprendersi.

Si

Si deve dividere per e — f † g — b
questa quantità ee — ff † 2fg — 2fb — gg † 2gb — bb
ee — ef † eg — eb
o † ef — ff — eg † 2fg † eb — 2fb — gg
ef — ff † fg — fb
Quoz. o · o — eg † fg † eb — fb — gg † 2gb — bb
e † f — g † b eg † fg — gg † gb
o · o † eb — fb † gb — bb
eb — bf † bg — bb
o · o · o · o

In questi esempj si è potuto osservare il modo di operare la divisione nelle quantità complesse, quando queste sono accompagnate da i medesimi segni differenti, e quando i termini stessi si trovano in tutte le diverse somme, o pure, quando non in tutte le somme si trovano corrispondenti. Non ha portato l'occasione l'avvertire un qualche avanzo dopo la divisione, perchè si sono sempre preparati divisori, che per l'appunto dividevano la data quantità, che se il divisore non si fosse dato capace a dividere la quantità assegnata, in un tal caso sarebbe comparso un qualche avanzo, che si sarebbe scritto appresso al quoziente sopra una linea, con sotto il proprio divisore, come si fa quando vi è un qualche avanzo, fatta la divisione dei numeri. L'esempio seguente propone questo caso particolare. Si ha da dividere *bbbbd — bbb* † *dc* per *bb*: partendo *bb* il primo termine lascia per quoziente *bbd*, partendo il secondo termine lascia — *b*, ma perchè il terzo termine † *dc* non lo può partire, perciò questo, come avanzo, si scrive appresso el quoziente sopra una linea, preceduto dal proprio segno, così † $\frac{dc}{bb}$. Dunque tutto il quoziente di questa divisione si ha $bbd - b - \frac{dc}{bb}$.

VIII. Si sono vedute in tutti i precedenti esempj operazioni di divisione sempre fatti sopra grandezze, non precedute da cifre, ora perchè anche questo caso può darsi, a tale effetto torna bene l'osservare, come si dovesse operare, quando questo accadesse. In due volte si fa questa operazione, prima con dividere la quantità data per le lettere al modo predetto,

detto, in secondo luogo con partire le cifre alla usanza del partire i numeri, così, se si ha da partire 128*abbd* per 8*ab*, si parte prima *abbd* per *ab*, ed il quoziente è *bd*, e poi si parte 128 per 8, ed il quoziente è 16, che collocato prima delle lettere *bd* compone 16*bd*, proprio quoziente della divisa quantità 128*abbd*. Pare un poco più malagevole la divisione delle quantità complesse, precedute dalle cifre: ma anche in questa si può riuscire con facilità, prendendola a fare colla regola, che quì ora si dà. Disposta tutta la quantità, che si deve dividere in quel modo, che uno vuole, si prendono delle sue parti, lasciate le cifre, quelle, che possono essere divise dal primo termine del divisore, preso anche esso senza le cifre, e si prepara il quoziente di questa prima divisione: si abbassano poi nella stessa maniera gli altri termini della quantità da dividersi, quelli cioè, che si possono dividere dal secondo termine del divisore, e si trova il quoziente di questa divisione, e così seguitando ad abbassare gli altri termini, se altri sono rimasti, per dividergli con gli altri termini, che possono essere rimasti nel divisore, si prepara l'ultimo quoziente, che può derivare da una tal divisione. Compita in questa maniera la divisione delle lettere, si prendono i numeri, che si trovano avanti alle lettere, che furono le prime ad esser divise, e tutti quanti uno per volta, si partono per il numero, che precede il primo divisore; e quello, che risulta da tutte queste divisioni particolari è la cifra, che deve premettersi, a qualunque lettera, con cui si è formato il quoziente.

Esempio di questa regola.

si divida 1024*bbik* † 1696*bikk* — 224*bbkl* — 512*biil* —
848*iikl* † 112*bill* † 384*bimn* † 636*ikmn* — 84*blmn*
per 16*bk* — 8*il* † 6*mn*.

Lasciati addietro tutti i numeri; giacchè le lettere del primo termine del partitore *bk* si trovano tutte due nei primi tre termini della quantità da partirsi, questi prima si hanno da partire per trovare il quoziente, e però si separano da tutti gli altri così

bbik † *bikk* — *bbkl*
bk divisore

Quoziente *bi* † *ik* — *bl*

Similmente, perchè altri tre termini della quantità da partirsi si dividono dal secondo termine, che si trova nel partitore, però anche questi separati dai rimanenti, si opera sopra di essi così

$$biil - iikl + bill$$
$$-il \text{ divisore}$$
Quoziente $\overline{bi + ik - bl}$

Perchè finalmente gli ultimi termini tutti si possono partire per l'ultimo termine del divisore, anche questi si dividono dopo che si sono separati dagli altri, così

$$bimn + ikmn - hlmn$$
$$+ mn \text{ divisore}$$
Quoziente $\overline{bi + ik + bl}$

Dunque il quoziente di questa divisione si è trovato essere $bi + ik - bl$

Per trovare ora quali sono quei numeri, che hanno da precedere qualunque termine di questo quoziente, si deve scrivere distintamente ciascun numero, che si trova unito a i primi tre termini, che si sono divisi, e questi sono

1024 · 1696 , 224

ciascuno di questi si ha da partire per il 16 prima cifra, che precede il primo termine del divisore, onde si vede, che nel primo numero entra il 16. 64 volte, nel secondo 106 volte, nel terzo 14 volte, però ognuno di questi numeri precederà il suo termine del quoziente, e si scriverà

$64bi + 106ik - 14bl$, e rimane compita l'operazione.

IX. Se maggiore difficultà potesse apparire nella regola, che si è quì sopra proposta, quando le lettere, che sono nei termini della quantità da partirsi, non corrispondessero nel luogo loro alle lettere, che sono nei termini del partitore, cioè, che le lettere del primo termine del partitore non fossero nel primo termine del numero da partirsi, ma nel secondo, o nel terzo, o in qualunque altro, questa difficoltà ancora si dovrebbe superare con mutar l'ordine di questi termini, e con adattarli ai luoghi corrispondenti a quelli, che occupano le lettere del partitore, sebbene non è sempre necessario, che si cominci la divisione dal primo termine, che si trova nel partitore, potendo cominciare anche dall'ultimo, o da qualunque degli intermedj, con avvertire però, che fissato una volta

volta il primo termine, che deve partire, in tutto il decorso della operazione ha questo da essere il partitore. Dunque se fosse data, perchè si partisse, questa quantità:

$$77prrs - 132qrss - 60pqqs + 35ppqr$$

per $12qs - 7pr$

sarebbe dato quel caso, in cui dovrebbe trasferirsi l'ordine dei termini nella quantità da dividersi, o si volesse poi cominciare l'operazione dal primo termine del partitore, o dall'ultimo. Così volendosi cominciare dal primo, i termini del primo spartimento da dividersi dovrebbero essere

$$-qrss - pqqs.$$

e volendosi cominciare dall'ultimo, i primi termini dello spartimento sarebbero $prrs + ppqr$, e poi fatti questi spartimenti si proseguirebbe l'operazione come prima

	$qrss - pqqs$		$prrs + ppqr$
	qs divisore		pr divisore
Quoziente	$rs - pq$	*Quoziente*	$rs - pq$

Per trovare i numeri, che hanno da precedere il quoziente, si ha da dividere come per l'avanti il numero, che precede il primo stabilito termine, cioè il 132, e il numero 60 per 12 numero, che precede il primo termine del partitore, e si trova 11, e poi 5. Onde dati questi numeri al quoziente, si è trovato $11rs - 5pq$, essere il vero quoziente in questa seconda divisione. Si può assicurare chi vuole della bontà di tutte le prescritte regole, e di tutti gli esempj, che si sono uniti alle medesime, con prevalersi della regola contraria alla divisione, che è la multiplicazione. Ognuno ben sa come la divisione distrugge ciò, che la multiplicazione stabilisce; però prova della divisione, se questa sia ben fatta, esser deve la multiplicazione, nella quale i termini, che si hanno a multiplicare sono il quoziente trovato dalla divisione, ed il divisore. Se multiplicate queste due quantità fra loro, risulta quella, che fu divisa, siamo subito assicurati della esattezza di nostra operazione, che senz' altro dovrebbe giudicarsi mal fatta, quando il risultato per la multiplicazione manifestasse un prodotto diverso da quello, che doveva tornare. Già del modo di multiplicare queste quantità espresse con lettere precedute dai numeri, e date senza altro numero, altrove se ne è parlato, pe-

rò servirà, che in un esempio solo dei passati, si faccia vedere l'applicazione di quello, che ora affermiamo per nostra sicurezza anche maggiore.

si multiplichi dunque 64bi † 106ik — 14bl *per* 16bk — 8il † 6mn

1024bbik † 1696bikk — 224bbkl
— 512biil — 848iikl † 112bill
† 384bimn † 636ikmn — 84blmn

som. 1024bbik † 1696bikk — 224bbkl — 512biil — 848iikl † 112bill † 384bimn † 636ikmn — 84blmn

Questa somma riscontra tale, e quale colla somma, anteriormente data per primo esempio della divisione delle quantità precedute da cifre Aritmetiche, e così riscontrerebbe qualunque altra somma, che potesse formarsi dalla multiplicazione dei quozienti, trovati in tutti gli altri esempj per i divisori delle medesime somme.

§. II.

Della Estrazione delle Radici.

X. Dal modo d' impiccolire generalmente la quantità espressa con lettere, si fa passaggio ad avvertire in che modo si possano impiccolire quelle quantità, che furono una volta sublimate a qualunque potenza più alta. Se mai alcuna operazione applicata all'impiccolimento delle quantità si è resa facile, questa è facilissima, perchè esclude qualunque prolissità di calcolazioni, che sono state inevitabili nelle qui sopra stabilite operazioni. Consiste dunque l' impiccolimento di una potenza in una divisione, che può chiamarsi insieme sottrazione, perchè, o sia la potenza di grandezze complesse, o sia di incomplesse, con togliere il numero, che manifesta il grado minore dal numero, che manifesta il grado maggiore della potenza, è fatta subito la divisione, e si è impiccolita una tale potenza. Sia dunque dato a^5, perchè si parta per a^3, si levi il 3 dal 5, e ciò che rimane scritto dopo dell'a al suo luogo lascia il quoziente della divisione già fatta a^2. Così se si deve dividere a^1 per a^1 il quoziente ha da essere a^0, oppure si può scrivere per resto 1-1, e se si vuol dividere

a^0 per

a^2 per a^3, si può scrivere per quoziente $\overline{a}^1$, oppure si può scrivere così $\frac{1}{a^1}$, ed il medesimo si pratichi ogni qual volta la minore potenza deve essere divisa per la maggiore, cioè sempre si ponga il quoziente con sopra la linea, al fine della quale si ponga il numero del grado, che prima aveva con ingrandirlo del numero divisore; così volendosi dividere $\overline{a}^3$ per a^1, si ha da scrivere per quoziente $\overline{a}^4$ oppure $\frac{1}{a^3}$, e la stessa regola si deve operare in qualunque altra simile occorrenza. Con questa maniera di dividere la potenza, ben si comprende come può questa ridursi ad un grado infiitamente piccolo, perchè essendo $a=4$, il valore di $\frac{1}{a^1}$ sara $\frac{1}{4}$ del 4, il valore di $\frac{1}{a^3}$ sarà $\frac{1}{64}$ del 4, il valore di $\frac{1}{a^5}$ sarà $\frac{1}{1024}$, e per conseguenza crescendo sempre la divisione, s' impiccolisce ancora sempre più la potenza, e questo impiccolirsi si riduce all' infinito, da esprimersi poi con questo carattere $a^{-\infty}$. Che se da tutti questi infinini gradi si ascendesse al supremo, si potrebbe altresì salire tant' alto colla potenza, che si arriverebbe all' infinito, e si esprimerebbe con questa formula a^{∞}, come già si notò, parlandosi dell' ingrandimento delle potenze. Se la divisione della potenza si abbia da fare con un altra potenza, espressa con lettera differente, quello, che si avvertì in proposito di ingrandire le potenze in simile congiuntura, si avverte ora per impiccolirle, cioè, che si scriva il quoziente alla usanza della divisione, senza mutare i numeri esponenti della potenza: onde scrivendosi $\frac{a^6}{b^4}$, vuol dire, che la quantità, chiamata a sollevata alla sesta potenza, si è divisa per la quantità b sublimata al 4 grado delle sue potenze. Quando le potenze si considerano in quantità complesse, l' impiccolimento loro si fa anche di una maniera brevissima, perchè si lascia tale quale è la serie delle quantità complesse, e solo dalla esponente della potenza maggiore, si leva l' esponente della potenza minore, e coperta con una linea tutta la quantità complesa, all' estremo di questa linea si aggiunge l' avanzo della esponente: l' esempio seguente $\overline{a+b+c+d}^6$ esprime una nona potenza, che è stata divisa da una terza potenza. XI.

XI. Succede a questa prima maniera d'impiccolire le potenze l'altra, per cui resta impiccolita la potenza, quando la medesima si riduce a quella sua prima radice, da cui cominciò a sublimarsi dall'infimo grado al più alto. In questa estrazione di radice è necessario, che si rifletta di qual condizione sia la data potenza, ed a quale specie di quantità sia unita, se alle incomplesse, o semplici, oppure alle complesse, o composte. Si leva la radice quadrata con facilità da una potenza incomplessa, per esempio b, perchè basta levare di quella quantità una parte, che sia $\frac{1}{2}$, si vede quale sia nella quantità, che si nota in tal modo $b^{\frac{1}{2}}$ la radice richiesta, come levato $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, &c. si vede anche sempre più, se sono dimandate le altre radici, in qual maniera possano queste potenze essere impiccolite; anzi impiccolita già fino ad uno de i predetti termini una qualche data potenza b^1 di più si trova modo di fare una nuova estrazione di radice dalla radice medesima di una tale potenza; e così se $b^{\frac{1}{2}}$ è radice quadrata della potenza b^1, sarà nuova quadrata radice della radice $b^{\frac{1}{2}}$, la radice $b^{\frac{1}{4}}$, e di questa radice $b^{\frac{1}{8}}$ sarà nuova quadrata radice $b^{\frac{1}{16}}$, e così sempre si troverebbero nuove radici, tanto, che c'inoltreremmo ad un grado infinitamente più piccolo di qualunque de i precedenti. Se quando la potenza è di grado infimo si leva dalla medesima nel modo predetto qualunque sorte di radice, si potrà con più facilità estrarre questa radice, essendo potenza di un grado più alto, e così, se fosse data b^{12} perchè se gli estraesse la radice quadrata, cuba &c. partito il 12 per 2, per 3, per 4, &c. si scriverebbe b^6, b^4, b^3, e queste sarebbero le radici richieste, come per levare la radice quinta da b^{10}, partito questo numero per 5, ci lascierà per la radice, che si dimanda b^2. Non è però sì particolare questa regola alle grandezze incomplesse, che non si possa ancora adattare alle grandezae complesse. Si pratica per l'appunto la stessa regola anche in questo caso, perchè essendo dato $d + e + f$ nona potenza, perchè da essa si levi la terza radice, partito per 3 l'esponente della potenza, rimane $\overline{d+e+f}^3$ per quella radice, che si pretende, ed egualmente dovendosi levare la radice quadrata della $d + e + f +$, un quarto, che si prenda di questa espo-

esponente, si ha la radice quadrata, che si esprime così $\overline{d+e+f}^{\frac{1}{2}}$.

XII. Qualche riflessione maggiore si richiede, quando si tratta di levare la radice, o sia quadrata, o cuba, o qualunque altra da potenze composte con numero maggiore di termini, come sarebbe, se si dovesse levare la radice quadrata da $mm + 2mn + nn$, oppure da un numero di termini uniti insieme con segni differenti, come $mm - 2mn + nn + 2mp - 2mp + pp$, o finalmente da una serie di termini preceduti da cifre Aritmetiche, come $256nn + 107nq + 98np + 144pp + 55qp + 16pp$.

Questi tre casi prima determiniamo per la radice quadrata, perchè dal modo di operare in essi, si deduce abbastanza il metodo per applicarsi, se il bisogno lo voglia, a qualunque altro, che esiga estrazione di radice quadrata. Per procedere dunque con ordine in questo affare, è bene ricordarsi di quelle regole, che furono prescritte, quando si trattò di dare un sistema per la estrazione della radice quadrata da i numeri. Principalmente dunque dovendosi levare la radice quadrata dal primo esempio dato $mm + 2mn + nn$, si ha da trovare la radice di mm, e perchè mm risulta dalla multiplicazione di $m + m$, apparisce perciò, che m è la radice quadrata di questo termine; questa dunque si scrive da parte in un luogo, che si ha da assegnare alla radice, e poi si seguita la operazione così. Si multiplica in se stessa la prima radice trovata, e risulta mm, e questo risultato si leva dal primo termine della potenza data, e resta o, poi si raddoppia la medesima radice m, e produce $2m$, che serve per partire il secondo termine, che si trova nella potenza, ed il quoziente di questa divisione è il secondo termine, che appartiene alla radice da trovarsi, e però si scrive al luogo della radice con fare, che gli preceda quel segno medesimo, che precedeva il termine diviso nella somma della potenza data; sicchè partito per $2m$ il termine della somma $+ 2mn$, resta il quoziente n, che si pone accanto al m nel luogo della radice preceduto dal segno $+$, ora con questo secondo termine trovato di radice, si multiplica prima il partitore, e poi si multiplica in se stesso, e i due prodotti, cioè $2mn + nn$ si pongono sotto al secondo, e ultimo termine della potenza data, e si fa la sottrazione, la quale non lascia alcuno avanzo per corrisponde-

re

R. $m + n$ *Esempio I.*

$mm + 2mn + nn$
mm
$0 + 2mn + nn$
duplato $+ 2m$
$+ 2mn + nn$
$0 \quad 0$

re esattamente a i medesimi termini. Rimane dunque compita la operazione, e già si vede, che la radice, che si è levata da $mm + 2mn + nn$ dee essere $m + n$, come si può riscontrare, multiplicandola in se medesima.

XIII. Per operare adesso col secondo esempio, in cui si propone, che si estragga la radice quadrata da

$$mm - 2mn + nn + 2mp - 2np + pp$$

in primo luogo si prende la radice di mm, la quale è m, e multiplicata questa in se stessa dà mm, che levato dal primo termine della potenza, resta 0. Posta la radice trovata al suo luogo, questa si raddoppia, e risulta $+ 2m$, e questo duplato parte il secondo termine della potenza $- 2mn$, e il quoziente, che si trova è $- n$; questo qnoziente col suo segno si pone accanto al primo termine della radice trovata, e poi per esso si multiplica il divisore, e risulta $- 2mn$, e multiplica ancora se stesso, e risulta $+ nn$, e come nella operazione antecedente, essendo fin quì la medesima, che quella, si pongono questi due prodotti sotto i termini della potenza, che corrispondono ad essi, cioè sotto $- 2mn + nn$, e si fa la sottrazione, che non lascia avanzo alcuno. Per proseguire ora la operazione, si al[illegible] i tre ultimi termini della potenza $+ 2mp - 2np +$ [illegible]i si raddoppia tutta la radice fin quì trovata $m - n$, scrivendo $+ 2m - 2n$: con questo duplato, si parte $+ 2mp - 2np$, e si ha per quoziente $+ p$, e per questo si multiplica il divisore, e risulta $+ 2mp - 2np$, e poi si multiplica in se stesso, e risulta pp, i quali due risultati posti secondo il

R. $m - n + p$ *Esempio II.*

$mm - 2mn + nn + 2mp - 2np + pp$
mm
$0 - 2mn + nn$
I. *dupl.* $2m$
$2mn + nn$
$0 \quad 0 + 2mp - 2np + pp$
II. *dupl.* $+ 2m - 2n$
$+ 2mp - 2np + pp$
$0 \quad 0 \quad 0.$

do il ſolito ſotto i termini della potenza, perchè ſi faccia di eſſi la ſottrazione, ſi vede, che non rimane avanzo alcuno, e così ancora reſta finita queſta ſeconda operazione.

XIV. Per fuggire ogni imbarazzo, che potrebbe incontrarſi nell'eſtrarre la radice quadrata dall' ultimo dato eſempio, ſi può queſto rivoltare così

$$16pp + 56pq + 49qq + 96pn + 168qn + 144nn$$

per intraprendere la operazione dal numero quadrato 16 più facile, che ſi trova in tutta la ſerie data, che ne contiene due altri ſoli di più, cioè 49. e 144. Diſpoſti dunque ſecondo il predetto ordine i numeri, ſi leva prima la radice quadrata da $16pp$, e ſi trova $4p$, queſta poſta al luogo ſuo, ſi multiplica in ſe ſteſſa, e il riſultato ſi leva dal primo termine della data potenza, che per eſſergli uguale, rimane 0. Ciò fatto, ſi raddoppia queſto primo termine della radice trovata, e per queſto duplato ſi parte il ſecondo termine della potenza data, e perchè ſi trova il duplato eſſere $8p$, e che queſto entra in $+56pq$ per l'appunto $7q$, queſto col ſegno $+$ avanti ſi pone al luogo della radice, dipoi multiplicato per eſſo il duplato, e multiplicato in ſe ſteſſo, i prodotti $+56pq + 49qq$ ſi levano da $+56pq + 49qq$, parti della data potenza, e non avanza coſa alcuna. Si dee ora trovare la radice degli ultimi termini della potenza data $+96pn + 168qn + 144nn$ ſicchè per arrivare a queſto, ſi dee raddoppiare tutta la radice trovata, e queſto duplato $+8p + 14q$, dee partire i primi due termini della potenza, a cui corriſpondono, e trovandoſi, che $+8p$ entra 12 volte in $+96pn$, come 12 volte entra pure $+14q$ in $+168qn$, però queſto $12n$ preceduto dal ſegno $+$, ſi ha da porre nel luogo della radice, acciò multiplicando il duplato, e multiplicato in ſe ſteſſo produca i tre termini $+96pn + 168qn 144nn$ da ſottrarſi dalle ultime parti della data potenza; però fatta queſta ſottrazione, nulla rimane di avanzo, e ſi vede, che la radice, che ſi cercava dalla potenza eſpreſſa con lettere tutte precedute da cifre Aritmetiche, ha da eſſere $4p + 7q + 12n$, come ſi potrebbe provare colla multiplicazione della medeſima in ſe ſteſſa.

Esempio III.

R.$4p \dagger 7q \dagger 12n$

$16pp \dagger 56pq \dagger 49qq \dagger 96pn \dagger 168qn \dagger 144nn$

$16pp$

$o \dagger 56pq \dagger 49qq$

pr. duplato —— $8p$

$56pq \dagger 49qq$

$o \quad o \dagger 96pn \dagger 168qn \dagger 144nn$

sec. duplato ——— $8p \dagger 14q$

$96pn \dagger 168qn \dagger 144nn$

o o o

XV. Siccome col mezzo di tre esempj si è fatto vedere in che modo da una potenza complessa preceduta da i medesimi, o da differenti segni, o da i numeri, si debba operare per levare la radice quadrata, così ora torna in acconcio aggiugnere tre altri esempj, per dimostrare in che maniera si leverà la radice terza, o vogliamo dire cuba, da qualunque potenza complessa. Sia dunque dato perchè si estragga la radice cuba da $e^3 - 3eeg \dagger 3eef \dagger 3egg - 6egf \dagger 3eff - g^3 \dagger 3ggf - 3gff \dagger f^3$ dico, che la radice cuba dee essere $e - g \dagger f$, e la bontà della risposta la fa vedere la seguente operazione.

Prima di ogni altra cosa si trova la radice cuba del primo termine della potenza e^3, e si trova e; questo e si pone nel luogo separato delle radici, ed è la prima lettera della radice, che si vuol sapere; ciò fatto, si cuba questa radice e, ed il risultato e^3 si leva dal primo termine della potenza, sicchè per essergli uguale, fatta la sottrazione, rimane o. Per trovare la seconda figura, molto più vi è da operare, ed ecco tutti i capi delle operazioni, che si hanno da fare.

In primo luogo si fa il quadrato della radice trovata, e risulta ee, questo si tripla con fare $3ee$, ed un tale triplato è il divisore del secondo termine della data potenza, calato giù abbasso dal primo suo luogo con tutti gli altri seguenti. Fatta dunque la divisione, si trova, che g è il quoziente, che col proprio segno, cioè —, si pone al luogo della radice, e

per

per questo quoziente si multiplica il precedente triplato, e risulta $-3eeg$.

In secondo luogo si prende il triplo del primo termine della radice trovata, cioè e, facendosi $3e$, questo si multiplica pel quadrato gg della seconda radice trovata, e risulta $\dagger\, 3egg$.

In ultimo luogo si fa il cubo della seconda radice trovata, e risulta $-g^3$.

Questi tre risultati vanno levati da i corrispondenti termini, che sono nella potenza data $3eeg \dagger 3egg - g^3$, e per essere a questi uguali, non rimane avanzo. Sicchè si ha da continuare la operazione, come segue.

1. Si riquadra la radice trovata $e-g$, e risulta $ee-2eg \dagger gg$, e questo risultato si tripla, sicchè viene $\dagger\, 3ee-6eg \dagger 3gg$, per questo, triplato si parte il reliquato de i termini della potenza, cioè $\dagger\, 3eef - 6egf \dagger 3ggf$, &c. e si ritrova $\dagger f$ pel quoziente. Per questo quoziente si multiplica il fatto triplato, e si ha $\dagger\, 3eef - 6egf \dagger 3ggf$, il quale si leva da i tre predetti termini della potenza, e rimane o.

2. Si passa a triplare i due primi termini della radice trovata $e-g$, dalla quale operazione risulta $3e-3g$, il quale triplato, si multiplica pel quadrato ff della radice ultima trovata $\dagger f$, dalla quale multiplicazione nasce $\dagger\, 3ff - 3gff$, e questa somma si leva dagli altri termini, che si trovano nella potenza $\dagger\, 3ff - 3gff$, onde anche in questa sottrazione nulla rimane di avanzo.

In terzo luogo finalmente si fa il cubo dell'ultimo termine della radice trovata, $\dagger f$, e risulta f^3, che levato dal termine corrispondente della radice, rimane o, ed è finita la operazione, che quì tutta per disteso si pone.

Esempio I.

$e^3 - 3eeg \dagger 3eef \dagger 3egg - 6egf \dagger 3eff - g^3 \dagger 3ggf \dagger 3gff \dagger f^3$

e^3

o $- 3eeg \dagger 3eef \dagger 3egg - 6egf \dagger 3eff - g^3$

Divis. $3ee$

$-3eeg$ $\dagger\, 3egg$ $-g^3$

o o o

R. $e-g\dagger f$

ee quad. della rad.

$3ee$ triplo del quad.

sec. rad. $-g \times 3ee = -3eeg$

$3e$ trip. della pr. rad.

gg qua. della sec. ra.

$\dagger\, 3e \times gg = \dagger\, 3egg$

$-g^3$ cubo della se. ra.

†3eef — 6egf†3eff†3ggf†3gff†f^3
Divif.†3eef — 6eg †3gg
†3eef — 6egf †ggf

o o o

†3eff†3gff†f^3
†3eff†3gff

o o †f^3

†f^3

•

ee — 2eg†gg quad. della rad. e — g
† 3ee — 6eg†3gg triplo del quadrato.
†fX3ee— 6eg† 3gg =† 3eef — 6egf†3gf
3e — 3g triplo della radice e — g
†ff quad. dell' ult. term. della rad.
†ffX3e — 3g = †3eff†3gff

†f cubo dell' ult. radie e trovata.

XVI. Il ſecondo eſempio propone da eſtrarſi la radice cuba da una potenza eſpreſſa con lettere, alle quali ſono poſpoſti i numeri di diverſe potenze, come ſarebbe di dover eſtrarre la radice cuba da $m^3 n^3$ † 3 $m^2 n^2 p r$ † 3 $m n p^2 r^2$ † $p^3 r^3$.

Si leva prima la radice cuba dal primo termine della potenza data $m^3 n^3$, e ſi trova $m n$, che ſi pone nel luogo a parte per le radici. Di queſta radice trovata ſi fa il cubo, e ritorna $m^3 n^3$, che ſi leva dal primo termine della potenza, e laſcia o. Fatta la ſottrazione, la radice trovata ſi riquadra, e viene $m^2 n^2$, e queſto quadtato ſi tripla, e ſi fa 3 $m^2 n^2$, e queſto riſultato parte il ſecondo termine della potenza † 3 $m^2 n^2 p r$, e laſcia per quoziente † $p r$, che ſi pone accanto alla prima radice trovata, per eſſere il ſecondo termine di queſta radice. Ciò fatto, per queſta nuova radice ſi multiplica il triplo del quadrato 3 $m^2 n^2$, e riſulta † 3 $m^2 n^2 p r$, da ſottrarſi dal ſecondo termine della potenza, e perchè corriſponde al medeſimo, non rimane avanzo. Si tripla poi il primo termine della radice trovata $m n$, e viene 3 $m n$, ſi fa il quadrato del ſecondo termine della radice $p r$, e viene $p^2 r^2$, e per queſto quadrato ſi multiplica quel triplo, e riſulta † 3 $m n p^2 r^2$, che ſi ha da levare dal ſeguente termine della radice, a cui perchè pure ſi trova corriſpondere, rimane o. Finalmente ſi fa il cubo dell' ultimo termine della radice trovata, e queſto ſi trova † $p^3 r^3$, che ſottraendoſi dall' ultimo termine della potenza, non laſcia avanzo, e reſta compita la operazione trovata, che è la radice cuba $m n$ † $p r$.

Eſem-

Esempio II.

$m^3n^3 + 3m^2n^2pr + 3mnp^2r^2 + p^3r^3$ | $mn + pr$

cubo m^3n^3 | m^2n^2 quad. della rad.

$0 + 3m^2n^2$ | $3m^2n^2$ tr. del qu. della rad.

divis. $+ 3m^2n^2$ | $+ pr \times 3m^2n^2 = + 3m^2n^2pr$

$+ 3m^2n^2pr$ | $3mn$ tr. della pr. rad.

$0 \quad + 3mnp^2r^2$ | p^2r^2 qu. della sec. rad.

$+ 3mnp^2r^2$ | $3mn \times p^2r^2 = 3mnp^2r^2$

$0 \quad + p^3r^3$ | $+ p^3r^3$ cubo della sec. radice.

$+ p^3r^3$

0

XVII. L' esempio, che in ultimo luogo si propone, mostra una potenza espressa con lettere precedute da cifre Aritmetiche, perchè si estragga da essa la radice cuba. Non ha questa operazione niente di più delle precedenti, solo che anche in questo caso si osserva, che si possono tramutare i termini dal loro luogo per premettere quello, che ha la cifra più facile per la estrazione della radice cuba. Sia dunque data la seguente potenza, perchè si estragga dalla medesima la radice cuba

$$+ 108ppm + 240mmn + 360mnp + 300mnn + 225pnn$$
$$+ 135ppn + 125n^3 + 64m^3 + 144mmp + 27p^3.$$

Non tutti i numeri, che precedono le lettere di questa potenza sono numeri cubi; ve ne sono però in questa serie alcuni, de i quali è in nostro arbitrio la elezione di quello, che sembra a noi, che meglio possa contribuire al buono esito della operazione. Si vuole dunque prendere il $64m^3$, e scelto questo fra tutti come primo, gli altri di mano in mano si fanno succedere, ne i quali entrano per l' appunto i numeri, che hanno da partire. Cominciandosi per tanto a levare la radice cuba, si conosce, che $4m$ è la radice cuba di $64m^3$, questa dunque levata, si pone al luogo delle radici, e fatto con essa il cubo, ritorna intera la quantità, da cui si è levata, che però, se di questo risultato si fa la sottrazione da $64m^3$, nien-

niente rimane d' avanzo. Per trovare ora il ſecondo termine della radice, ſi riquadra la prima radice trovata, e ſi ha $16\,mm$, e queſto quadrato ſi tripla, e ſi ha $48\,mm$, e perchè il 48 ſi trova entrare per l' appunto tre volte nel 144, numero, che nella data potenza precede le lettere mmp, ſi ſceglie fra tutti gli altri il $144\,mmp$, e ſi parte per $48\,mm$, e il quoziente $3p$ preceduto dal ſuo ſegno † ſi pone nel luogo della radice, poi pel medeſimo ſi multiplica il diviſore $48\,mm$, e il riſultato † $144\,mmp$, ſi leva dal termine della potenza, che ſi è partita, a cui perchè è uguale, non rimane niente di avanzo. Ciò fatto, ſi tripla la prima radice trovata, e viene $12\,m$, e ſi fa il quadrato della ſeconda, e queſte due quantità ſi multiplicano fra loro, e riſulta $108\,mpp$, che ſi leva dal termine della potenza, dove ſi trova, e finalmente colla ſeconda radice trovata fatto il cubo $27p^3$, e levato dove ſi trova nella potenza, rimane compita queſta parte di operazione.

Per trovare ora l' ultimo termine della radice, che ſi cerca, ſi fa il quadrato delle due prime radici trovate $4m \dagger 3p$, multiplicandole fra loro, e riſulta $16mm \dagger 24mp \dagger 9pp$, che triplato viene ad eſſere $48mm \dagger 72mp \dagger 27pp$. Si dee ora cercare fra i termini, che ſono rimaſti nella potenza, quale è quello, che ſi può partire pel primo termine di queſto triplo $48mm$, e perchè ſi trova, che $240mmn$ è diviſo per l' appunto, mentre 5 volte 48 fa 240, il termine della potenza $\dagger 240mmn$ è quello, che ſi dee dividere per $\dagger 48mm$, ed il quoziente $\dagger 5n$ ſi ha da porre al luogo delle radici, e pel medeſimo ſi dee multiplicare l' intero diviſore $48mm \dagger 72mp \dagger 27pp$. Da queſta multiplicazione riſulta $240mmn \dagger 360mnp \dagger 135ppn$, che ſi leva dove ſi trova nella potenza, poi triplati i due primi termini della radice, i loro riſultati $12m \dagger 9p$ ſi multiplicano pel quadrato della terza radice $25n$, e ciò, che riſulta, ſi leva dove ſi trova nella potenza, cioè da $300mnn \dagger 225pnn$; finalmente fatto il cubo dell'ultimo termine della radice $\dagger 5n$, queſto cubo, che è $\dagger 125n^3$ ſi leva anche eſſo dalla data potenza, di cui perchè nulla rimane, per queſto ſi pone termine alla operazione, e ſi determina, che la radice cuba della potenza data è $4m \dagger 3p \dagger 5n$, come ſi potrebbe riſcontrare, ſe ſi voleſſe fare la riprova. Conſiſte la riprova in multiplicare prima in ſe ſteſſa queſta radice trovata, e poi con mul-

multiplicare il risultato per la radice medesima in quella stessa maniera, con cui al suo luogo si fece la prova della bontà della operazione, quando fu estratta la radice cuba da qualunque numerica quantità.

Esempio III.

$64m^3$
$64m^3$
$0 \quad +144mmp$
Divis. $+48mm$
$+144mmp$

Rad. cuba $[4m+3p+5n]$

$0 \quad +108mpp$
$+108mpp$
$0 \quad +27p^3$
$+27p^3$
0

$+240mmn+360mnp+135ppn$
Divis. $+240mm \; +72mp \; +27pp$
$+240mmn+360mnp+135ppn$
$0 \quad 0 \quad 0$

$+300mnn+225pnn$
$+300mnn+225pnn$
$0 \quad 0$

$+125n^3$
$+125n^3$
0

$64m^3$ cubo della pr. radice.

$16mm$ quadr. della pr. rad.
$48mm$ tr. del quad. e pr. divisore.

rad. sec. $+3p \times 48mm = +144mmp$

$+12m$ triplo della pr. radice.
$+9pp$ quad. della sec. radice.

$+12m \times +9pp = +108mpp$

$27p^3$ cubo della sec. radice.

$4m+3p \times 4m+3p = 16mm+24mp+9pp$ quadrato fatto dalla multiplic. delle due prime radici.
$48mm+72mp+27pp$ trip. del quad.

rad. 3ª. $+5n \times 48mm+72mp+27pp =$
$= +240mmn+360mnp+135ppn$ secondo divisore.

$12m+9p$ tripli delle due prime radici.
$+25n$ quadrato della terza radice.

$25n \times 12m+9p = +300mnn+225pnn$

$125n^3$ cubo della terza rad.

XVIII. Queste regole, che diffusamente quì si sono prescritte per la estrazione della radice quadrata, e cuba da potenze espresse con lettere, fanno vedere come si dovrebbe operare per estrarre la radice quadrata, e cuba per la via ordinaria; del resto vi è un metodo molto più corto, che rende agevolissima la estrazione di queste due radici, e questo metodo risolve la operazione, levando la radice o quadrata, o cuba da tutti quei termini della potenza, da i quali in una occhiata si vede, che si può levare, e poi multiplica le radici trovate, secondo la regola della riprova di queste due operazioni, e se la potenza data è tale, che da essa si possa le-

levare la radice o quadrata, o cuba, ſubito ſi conoſce, perchè il riſultato di queſte multiplicazioni dee produrre la intera data potenza; dunque ſe queſta non riſultaſſe tale, e quale, ſarebbe contraſſegno, che dalla data potenza non ſi potrebbe levare la dimandata radice. La eſtrazione della radice ſi può fare anche da tutte le altre potenze, come dalla quarta, quinta, ſeſta, &c. e le regole quì ſopra ſtabilite, ſervono all'effetto medeſimo. Si nota ſolo, che volendoſi in alcune di eſſe più ſpeditamente operare, come ſono le potenze pari, cioè la quarta, ſeſta, ottava, decima, &c. poſſono queſte abbaſſarſi alle potenze inferiori, prima di eſtrarre la radice dimandata, o con levare ſucceſſivamente più volte la radice quadrata, o pure levando la radice cuba, e poi la radice quadrata, ſecondochè la occaſione, o il caſo propoſto lo può comportare. Come che poi accade, che la radice, che ſi eſtrae può avere una figura, o due, o tre, o più altre, perciò ſu queſto particolare ſi avverte, che per eſtrarre la radice quadrata, che abbia un ſolo termine, un termine ſolo, che abbia la data potenza, ſerve a queſto effetto; ſe la radice dee avere due termini, la potenza è neceſſario, che ne abbia tre, come ne dee avere ſei, ſe la radice quadrata ha da avere tre termini. Perchè poi la radice cuba abbia due termini, la potenza ne dee avere quattro, e perchè ne abbia tre, la potenza non ne può avere meno di dieci.

XIX. Quella brevità, con cui ſi può operare in occaſione di levare la radice da una ſeconda, o terza potenza, cioè da una quantità, che ſia quadrato, o cubo, dee eſſere anche in veduta quando ſi abbia da levare la radice da una potenza più alta, o ſia quinta, o ſeſta, o decima, o duodecima, &c. Che però data una ſeſta potenza, perchè da eſſa ſi eſtragga la ſua radice, oſſerveremo quelle lettere, dopo le quali comparirà il ſegno di quella ſeſta potenza, e preſe queſte ſole, ſenza alcun carattere di potenza, precedute ſol tanto o dal più, o dal meno, come ſi è detto altrove, in queſte vedremo la radice dimandata da poterla riſcontrare colla multiplicazione, che di eſſa ſi dovrà fare, e ripetere tante volte, ſecondochè il caſo lo richiederà, e ſi dovrebbe ripetere cinque volte nell'eſempio propoſto, perchè la ſeſta potenza riſulta da cinque multiplicazioni, cioè dalla multiplicazione di una radice in ſe ſteſ-

ſteſſa, che è il quadrato, dalla multiplicazione di queſto quadrato per la ſua radice, che è il cubo, dalla multiplicazione di queſto cubo per la radice medeſima, che fa naſcere la quarta potenza, dalla multiplicazione di queſta quarta potenza per la ſteſſa radice, che naſcerà la quinta potenza, e finalmente dalla multiplicazione di queſta quinta potenza per la ſteſſa radice, che fa naſcere queſta ſeſta data potenza.

XX. Per ben diſporre i termini delle potenze date, per quando ſi ha da levare da eſſe la radice, ſi nota come alcuni di queſti termini hanno da eſſere preceduti dalle cifre Aritmetiche, e queſte cifre, ſecondochè le potenze preparate ſono differenti, hanno da eſſere anche loro diverſe, vale a dire, i termini, che compongono una ſeconda potenza, hanno da eſſere preceduti dal 2, quelli che formano la terza potenza hanno da eſſere preceduti dal 3, e così il 4, e il 6 precederà i termini della quarta potenza, il 5, e il 10 precederà quelli della quinta potenza, e quelli della ſeſta ſaranno preceduti dal 6, dal 15, dal 20, e così delle altre. Avvertendo pure, che nella ſeconda potenza il 2 non ſi trova, che una volta ſola, e nella terza potenza il numero 3 più volte è ripetuto; nella quarta potenza il 4 è ripetuto, ma il 6 ſolo una volta ſi trova; nella quinta potenza il 5, e il 10 è ripetuto due volte; nella ſeſta il 6, e il 15 ſi ripetono, ma il 20 non ſi ripete, e generalmente in tutte le potenze i numeri, che precedono i termini delle potenze, ſono ripetuti, ma quello, che ſi trova avanti a quel termine, che contiene le lettere, che ſi trovano nella radice ripetute egual numero di volte, non ſi repete punto. Queſta ſola differenza è fra la potenza pari, e diſpari, che uno de i numeri, che precede un termine della potenza. che è pari, non ſi ripete, al contrario tutti ſi ripetono nella potenza, che è diſpari, ſiccome ancora la potenza, che è pari contiene un termine di più della potenza impari, che la precede. Si riſcontra quanto quì ſi è avvertito negli eſempj ſeguenti.

Eſempio I.

$$a^4 + 3a^3b + 6aabb + 4ab^3 + b^4$$

Eſempio II.

$$a^5 + 5a^4b + 10a^3bb + 10aab^3 + 5ab^4 + b^5$$

O *Eſem-*

Eſempio III.

$$a^6 + 6a^5b + 15a^4bb + 20a^3b^3 + 15aab^4 + 6ab^5 + b^5.$$

XXI. Siccome ſi è veduto qual regola ſi ha da tenere nella diſpoſizione de i numeri, che hanno da precedere i termini delle potenze, così ſarà bene avvertire con quale ordine ſi dovranno ſegnare le lettere; le quali dovranno formare i termini delle ſteſse potenze. Queſto ſi potrà ſubito ſapere, toſto che ſi ſarà avvertito a quelle parti, che compongono il quadrato, il cubo, la quarta potenza, &c. Contiene la potenza quadrata primieramente il doppio di tutti i termini, che compongono la radice, vale a dire, ogni termine, che dee eſsere nella radice ſi ha da trovare raddoppiato nella potenza quadrata; per eſempio, ſe il $b + d$ ſono i termini della radice, dovrà trovarſi nella potenza quadrata ciaſcuno di eſſi raddoppiato così $bb + dd$. Contiene in ſecondo luogo la potenza quadrata due volte i termini della radice multiplicati fra loro, così per ſeguitare l' eſempio dato, oltre i termini della radice raddoppiati $bb + dd$, ſi hanno da trovare nella potenza quadrata ſcritti due volte i termini della radice multiplicati fra loro, e ſi eſprimono in tal modo $+ bd + bd$, oppure $2bd$, per la ſteſſa ragione, ſe i termini della radice doveſſero eſſere tre $b + c + d$, ſi preparerebbero ſubito i termini della potenza quadrata con ſcrivere raddoppiato ciaſcun termine della radice, e poi con ſcrivere le multiplicazioni di ciaſcun termine della radice per l' altro preſe due volte; che però la ſerie de i termini della potenza quadrata nello eſempio dato ſarebbe $bb + 2bd + 2dc + cc + 2cb + dd$. Nella ſteſſa maniera per diſporre la ſerie de i termini di una terza potenza, che ha per radice tre membri, ſuppoſto ciò, che di ſopra abbiamo detto, che ha da avere 10 termini, tre di queſti conterranno ciaſcuna delle lettere della radice ripetuta tre volte, e così, ſe la radice della terza potenza foſse $b + c + d$ nella ſerie de i 10 termini della potenza, ſi dovrebbero trovare queſti tre termini $bbb + ccc + ddd$, che in altro modo ſi ſcriverebbero così $b^3 + c^3 + d^3$, per fare la eſpreſſione più breve; ſi dovrebbero poi multiplicare tutte inſieme le lettere della radice, e il loro riſultato preſo ſei volte, ſi avrebbe per un altro termi-

ne

ne della potenza, e nello esempio dato si scriverebbe † *6bcd*, poi ogni lettera della radice riquadrata tre volte dovrebbe multiplicarsi per le seguenti lettere, e così nascerebbero 6 termini da registrarsi nella potenza in tal modo *3bbc* † *3bbd* † *3ccd* † *3ccb* † *ddb* † *ddc*, e in tutta questa serie di termini si osserverebbe la espressione perfetta di una terza potenza, che ha per radice tre membri. Se la potenza fosse quarta, per disporre in essa tutti i termini, si ha da avvertire, che ogni termine della radice di questa quarta potenza ha da ritrovarsi preso quattro volte. In secondo luogo, si ha da fare il cubo di ogni termine della radice, che si ha da prendere quattro volte, e questo risultato si ha da multiplicare per ciascun termine della radice medesima, ed ogni prodotto si prenderà come una parte della potenza, poi fatto il quadrato di ciascun termine della radice, si prenderà sei volte, e sarà formato l'ultimo termine di una quarta potenza, per estrarre da essa una radice, che abbia due lettere. Generalmente parlando in tutte le altre potenze, dopo di aver trovato il primo, e l'ultimo termine, in cui si vede la quantità della radice elevata al grado della dimandata potenza, si trovano tutti i termini di mezzo con questa regola. Si prende ciascuna quantità della radice assegnata, e si alza alla potenza, che precede la potenza dimandata, e si prende tante volte, secondo il grado della potenza, che ha da prepararsi, e si multiplica il risultato per ciascuna quantità, che si trova nella radice, a riserva di quella, sopra di cui si opera, e si notano i termini, che riescono, susseguentemente ciascuna quantità della radice si alza a quella potenza, che precede di due gradi la dimandata, e si prende tante volte, secondo il numero, che risulta dalla somma del numero, che esprime il grado della precedente potenza, sommato col numero, che stà avanti al terzo termine della stessa terza potenza [preso per regola l'uno, che è nel terzo rango de i termini della seconda potenza, e che vanno crescendo con questo ordine: per la terza potenza 2 † 1=3, per la quarta potenza 3 † 3=6, per la quinta potenza 4 † 6=10, per la sesta potenza 5 † 10=15, per la settima potenza 6 † 15=21, &c.] e multiplicata pel quadrato di ciascuna parte della radice, i termini, che risultano, saranno le altre parti della richiesta potenza; che se fosse la quinta,

 non

non ne dovrebbe avere di più per la estrazione di una radice di due quantità. Ma se fosse la sesta potenza, sarebbe necessario un termine di più, e per farlo, si dovrebbero prendere i cubi della quantità della radice, con prevenirgli dal coeficiente, che sommasse i due coeficienti de i termini di mezzo della potenza precedente, e se fosse la settima, dovrebbe avere due termini di più della quinta, che per trovarli, ogni parte della radice si dovrebbe alzare alla quarta, e alla terza potenza, e diviso il prodotto in due termini, dovrebbe prevenire ciascuno di essi il 35, numero derivato dalla somma de i due coeficienti di mezzo della sesta potenza. Quel termine di più, che ora dovrebbe prepararsi, in caso, che fosse richiesta la ottava potenza, si farebbe con alzare le quantità della radice alla quarta potenza, facendo prevenire il prodotto dalla somma de i conficienti de i termini di mezzo della potenza precedente; e così i termini di più della nona potenza nascerebbero dallo alzare le quantità della radice alla quarta, e quinta potenza, facendo precedere i risultati dalla somma de i conficienti assegnati a i termini di mezzo nell' antecedente potenza, e così sempre degli altri, tanto che, come ognuno può osservare, potrebbe benissimo ciascheduno coll' ordine di questa regola preparare una serie innumerabile di termini per la più alta potenza, che potesse essere dimandata.

XXII. Quello, che si è detto, rispetto ad una radice di due, o tre parti, proporzionalmente si può estendere ad una radice, che sia per avere qualunque numero di termini, come pure le predette regole, non solo hanno luogo quando le parti delle radici sono di pure lettere, ma ancora quando sono precedute da cifre Aritmetiche. Una cosa sola rimane, che si avverta sul particolare della estrazione di qualsisia radice delle potenze, ed è, che quando si trova un numero, che per l'appunto divide l' esponente di una potenza, si conosce la condizione di quella potenza dal numero delle parti, per le quali si può dividere l' esponente di quella potenza. Si nota ancora, che se nella potenza vi è qualche termine di più, e da essa non si possa levare la giusta radice, ma una radice con qualche avanzo, si dice, che questa radice è un termine irrazionale, che è una radice sorda. Onde in occorrenza di dovere di essa servirsene in qualche operazione, si opererà sopra di essa secondo, che quì appresso osserveremo. §.III.

§. III.

Operazioni ſopra le quantità irrazionali.

XXIII. LE operazioni, che quì ora ſi aggiungono, ſervono propriamente per far vedere come s' impiccoliſcono le quantità irrazionali, incommenſurabili, o ſorde, col ſottrarre le une dalle altre, e col dividere le une per le altre; in ordine a che è neceſſario di farci ſovvenire quanto altrove fu detto del modo di ridurre le grandezze incommenſurabili eſpreſſe con ſegni differenti alle medeſime eſpreſſioni, e ſotto il medeſimo ſegno; dovendoſi ſempre prevenire la operazione richieſta con queſta riduzione, quando lo permettono le date grandezze. Ciò avvertito, ecco quella regola, che ſi dee tenere per impiccolire colla ſottrazione le quantità irrazionali. Sia data la radice ſorda 96, perchè ſi levi dalla radice ſorda 216.

$$\sqrt{96} \qquad \sqrt{216}$$

Si ha da ridurre l' una, e l' altra alla più ſemplice eſpreſſione, ed operandoſi ſecondo la regola data altrove ſi trova

$$4\sqrt{6} \qquad 6\sqrt{6}$$

poi ſi leva il minor numero, che precede il ſegno radicale dal nnmero maggiore, che precede l' altro ſegno radicale, cioè il 4 ſi leva dal 6, e ſi pone il 2, che avanza alla mano ſiniſtra del ſegno radicale, e ſi laſcia alla deſtra la quantità, che vi ſi trova, però ciò, che rimane nello eſempio propoſto fatta la ſottrazione, è $2\sqrt{6}$; così pure, ſe ſi doveſſe levare $+4\sqrt{6}$ da $-6\sqrt{6}$, ſi dovrebbe avere per avanzo $-10\sqrt{6}$, e levandoſi $6\sqrt{6}$ da $+4\sqrt{6}$, rimarrebbe $+2\sqrt{6}$. In queſta maniera ſi opera, quando le quantità irrazionali ſi poſſono ridurre alla più ſemplice eſpreſſione; ma ſe il caſo portaſſe, che le quantità date non poteſſero eſſere ridotte al medeſimo ſegno, allora ſi potrebbe, ſecondo la regola generale della ſottrazione, operare ſopra le ſtabilite quantità, che conſiſte in raccogliere tutte inſieme le quantità irrazionali, interrotte con ſegni contrarj a i dati ſegni, onde ſi ſarebbe operato ſecondo queſta regola, ſe ſi foſſe ſcriato $4\sqrt{2}-6\sqrt{5}$ per riſultato della ſottrazione di $+4\sqrt{2}$ da $6\sqrt{5}$, come ſi dovrebbe ſcrivere $4\sqrt[3]{6}$

—7

$-7\sqrt[5]{5}$, ſe foſſe dato $\dagger\, 7\sqrt[5]{5}$ perchè ſi ſottraeſſe da $4\sqrt[5]{6}$. Si potrebbero uſare altre regole per impiccolire colla ſottrazione le grandezze irrazionali, ma queſte poſſono ſervire, e ſono le più facili, e le meno imbarazzate di tutte le altre, e più prolиſſe, e più oſcure. Può ſervire l'aggiugnere ſolo un eſempio per vedere, come ſi abbia da fare la ſottrazione delle quantità irrazionali compleſſe, e queſto eſempio è tale. Si abbia a levare da queſta ſerie di quantità irrazionali

$$5\sqrt{2} - 7\sqrt{3} \dagger 8\sqrt{10} \dagger 4\sqrt{3} - 4\sqrt{2} \dagger 5\sqrt{6}$$

queſt'altra $3\sqrt{2} \dagger 5\sqrt{3} - 9\sqrt{10} \dagger 2\sqrt{3} \dagger 2\sqrt{2} - 7\sqrt{6}$

rimane $2\sqrt{2} - 12\sqrt{3} \dagger 17\sqrt{10} \dagger 2\sqrt{3} - 6\sqrt{2} \dagger 12\sqrt{6}$

e in queſto reſto ſi vede come in qualunque altra occaſione ſi dovrebbe operare.

XXIV. Si dee ora intraprendere la diviſione della medeſima quantità, che è l'altro modo, che ſi può tenere per impiccolire le medeſime. Fra le coſe, che ſi hanno da avvertire per queſto effetto, non è la meno principale quella, che di ſopra ſi è accennata, cioè di ridurre le quantità, ſe hanno ſegno differente, ad avere il medeſimo ſegno, contribuendo queſta riduzione moltiſſimo al noſtro intento. Si può ancora di più avvertire, che in diverſi caſi una tale operazione avrà luogo, o in caſo di eſſere le quantità tutte incompleſſe, oppure qualche volta compleſſe, o in caſo di avere a dividerſi una quantità irrazionale per una razionale, o una quantità razionale per una irrazionale. Se ſi ſuppone in primo luogo, che le quantità date ſieno ridotte ſotto il medeſimo ſegno, è facile la diviſione, perchè dalla quantità maggiore, che precede il ſegno radicale ſi prende il quoziente della diviſione fatta dalla quantità minore, che pure precede il ſuo ſegno radicale, e lo ſteſſo ſi fa, ſe le quantità, che vengono dopo il ſegno radicale ſono diverſe, perchè, ſe foſſero comunicanti, cioè le medeſime, una di queſte ſola ſi ſcriverebbe dopo il ſegno radicale del quoziente. Si divida dunque $6\sqrt{4}$ per $3\sqrt{2}$, reſta il quoziente $2\sqrt{2}$, come ſe ſi ha da dividere $8\sqrt{3}$ per $4\sqrt{3}$, ciò che rimane per quoziente è $2\sqrt{3}$. Ma ſe accadeſſe, che le quantità date foſſero tali, che ſolo le grandezze, le quali o precedono il ſegno radicale, o gli vanno dopo,

po, non si potessero dividere, non si farebbe divisione di sorte alcuna, ma si scriverebbe una di quelle quantità tale, e quale sopra una linea, e la seconda dividente si porrebbe sotto la linea, l'una, e l'altra col proprio segno radicale; accadendo dunque questo caso nello esempio, che quì si dà, dovendosi dividere $5\sqrt{4}$ per $6\sqrt{2}$, si ha da scrivere come quoziente $\frac{5\sqrt{4}}{6\sqrt{2}}$, come pure si scriverebbe nella stessa maniera $\frac{6\sqrt{5}}{3\sqrt{6}}$ se si dovesse dividere $6\sqrt{5}$ per $3\sqrt{6}$, se non si volesse scrivere $\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$ per rendere la espressione più giusta, come meglio si vedrà, quando si tratterà della multiplicazione delle frazioni di questo genere.

XXV. Si nota, che mancando al segno radicale, che ha da dividere il termine, che lo dovrebbe precedere, si pone nel quoziente intero il termine, che precede il segno radicale della quantità divisa, e solo si fa la divisione de i secondi; per questo scriverò $10\sqrt{2}$, se avrò diviso $10\sqrt{12}$ per $\sqrt{6}$, e sarà un risultato 10 volte maggiore del divisore. Quello, che si dice dell' espressioni delle quantità irrazionali espresse in cifre Aritmetiche, si dice pure delle medesime quantità, quando si trovano manifestate con lettere, prendendosi per regola generale di questa divisione dividere il quadrato di una quantità pel quadrato dell' altra, e poi per la radice del quadrato del divisore dividere il quoziente della prima divisione. Si abbia da dividere $\sqrt{bbcc}$ per $\sqrt{cc}$. Si divide il primo quadrato pel secondo, e rimane per quoziente $\sqrt{bb}$. Si divide questo quoziente per la radice del quadrato $\sqrt{cc}$, cioè per c, e rimane $\frac{\sqrt{bb}}{c}$, che è il quoziente dimandato.

XXVI. Si suppone ora l'altro caso, che può seguire in questa operazione, quando le grandezze irrazionali sono date perchè dividano le razionali, o al contrario, e non si ha da fare altro per bene operare, se non che ridurre le grandezze razionali alla specie delle irrazionali, cosa che non incontra la minima difficoltà, perchè si fa con porre alla destra della grandezza razionale data, il segno della potenza, o del grado, a cui si dee elevare, che sarà il segno medesimo, che si troverà nelle date grandezze irrazionali; che però dovendosi

dosi dividere la grandezza b per la quantità irrazionale $\sqrt[4]{bc}$, alzata la grandezza b alla quarta potenza con scrivere $\sqrt[4]{b^4}$, ha da essere il quoziente $\frac{\sqrt[4]{bb}}{\sqrt[4]{c}}$, che si può ancora scrivere più brevemente senza raddoppiare il segno radicale, ma con porlo una volta sola, con appresso scrivere all' usanza delle frazioni il quoziente derivato dalla divisione, onde il quoziente dell' esempio dato si potrebbe scrivere in tal modo $\frac{\sqrt[4]{bb}}{c}$.

XXVII. L' ultimo caso propone, che si dividano le quantità composte radicali, come sarebbe la divisione di $54 + 27\sqrt{3} + 18\sqrt{5} + 9\sqrt{15}$ per $9 + 3\sqrt{5}$, oppure la divisione di 72 per $8 - 8\sqrt{4}$, ovvero la divisione di $ppqq - ppq$ per $\sqrt{pq} - p\sqrt{q}$, o la divisione di qualunque altra quantità espressa con maggiore, o minor numero di grandezze razionali, tanto in quella, che dee dividere, quanto in quella, che dee essere divisa; ma comecchè questa è un operazione, di cui l' uso è rarissimo, perciò nulla di più sul particolare della medesima si aggiugne, ma solo quì si pone il quoziente di tutti tre gli esempj proposti, derivato per mezzo di quella regola, che in altri simili casi dovrebbe poi avvertirsi, per risolvere le dimande con qualche metodo.

Esempio I.

Quoziente $6 + 3\sqrt{3}$

$$\begin{array}{l} 54 + 27\sqrt{3} + 18\sqrt{5} + 9\sqrt{15} : 9 + 3\sqrt{5} \\ 54 \qquad\qquad\qquad 18\sqrt{5} \\ \hline 0 \qquad\qquad\qquad\quad 0 \quad + 27\sqrt{3} + 9\sqrt{15} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\; 27\sqrt{3} + 9\sqrt{15} \\ \hline \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0 \qquad\quad 0 \end{array}$$

Esempio II.

$$-72 : 8 - 8\sqrt{4}$$

In questo secondo esempio, per facilitare la operazione, si cerca di ridurre il numero dato da dividersi -72 in altri due numeri, che combinati insieme arrivino a formare lo stesso numero dato, con avvertire, che il primo di questi due numeri,

$$\begin{array}{l} 24-96:8-8\sqrt{4} \\ \underline{24 + 24\sqrt{4}} \\ 0 + 24\sqrt{4} \qquad -96 \\ \text{Quoz. } 3+3\sqrt{4} \qquad \underline{24\sqrt{4}-24\sqrt{4}\times 4=-96} \\ \qquad 0 \qquad\qquad 0 \end{array}$$

meri, che si dee trovare, sia tale, che possa essere per l'appunto partito dal primo termine del divisore, onde nel caso proposto 24—96 può essere il numero uguale al —72; dunque servendoci di questo, così distendiamo la operazione

Esempio III.

$$\begin{array}{l} ppqq-ppq:pq+p\sqrt{q} \\ \text{Quoz. } pq-p\sqrt{q} \qquad \underline{ppqq+ppq\sqrt{q}} \\ 0 \quad -ppq\sqrt{q}-ppq \\ \quad \underline{-ppq\sqrt{q}-ppq} \\ \qquad 0 \qquad 0 \end{array}$$

perchè l'ultima multiplicazione del secondo quoziente $-p\sqrt{q}$ per la seconda parte del divisore $p\sqrt{q}$, non lasci della oscurità, non trovandosi nel prodotto ppq il segno radicale, si osservi, che questo segno è rimasto soppresso, perchè in fatti multiplicato $-p\sqrt{q}\times p\sqrt{q}$, come si disse altrove, fa lo stesso, che $-pp$ multiplicato per q, cioè $-ppqq$.

XXVII. La regola, di cui ora si ha da parlare, insegna la maniera di impiccolire le quantità irrazionali, con estrarre da queste, quando si possa, le differenti specie delle loro radici.

Può accadere il bisogno in termini irrazionali incomplessi, e può il caso trovarsi in quantità incommensurabili complesse, e composte. La estrazione della radice quadrata da radici sorde incomplesse, si fa quando pel numero, che accenna la radice, che si ricerca, si multiplica il numero, che esprime la radice sorda data, acciocchè da questa si estragga la radice quadrata, mentre il risultato da questa multiplicazione posto sopra il segno radicale, con lasciare alla destra del medesimo la quantità, che vi si vede, ci lascia la radice quadrata richiesta. Si opera la cosa stessa nella estrazione di qualunque altra radice dimandata da una stabilita quantità irrazionale, onde si conosce quanto riesca facile lo impiccolire con questa regola una determinata irrazionale quantità incomplessa.

$\sqrt[2]{b}$, $\sqrt[3]{b}$, $\sqrt[4]{b}$, $\sqrt[5]{b}$, $\sqrt[6]{b}$, sono radici seconde, terze, quar-

 te,

te, quinte, e seste di $\sqrt[3]{b}$, e queste altre $\sqrt[6]{b}$, $\sqrt[9]{b}$, $\sqrt[12]{\ }$, $\sqrt[15]{b}$, $\sqrt[n]{b}$, sono radici seconde, terze quarte, &c. di $\sqrt[3]{b}$. Ma quando le quantità irrazionali sono composte, cioè quando gli esempj proposti per fare la estrazione delle radici sono binomi, trinomi, quadrinomi, &c. si hanno le parti tutte di questi multinomi da distinguere fra loro con una linea posta al di sopra delle lettere, o numeri, che le compongono, onde si scriverà $\overline{396} \dagger 108\sqrt{5}$, per distinguere 396 primo termine del binome dato, e si noterà così $f \dagger g : i \dagger \overline{k} \dagger \sqrt{m}$, l'esempio del binome proposto in lettere, o l' esempio di qualunque altro multinome $\overline{ab} \dagger \overline{ce} \dagger \overline{df} \dagger \overline{g\sqrt{p}} \dagger \overline{h\sqrt{p}} \dagger \overline{m\sqrt{q}} \dagger \overline{n\sqrt{q}}$. Fatta la distinzione dei termini, si intraprenderà la estrazione della radice, o quadrata. o cuba, quale di queste due sia dimandata, con avvertire quelle regole, che a questo effetto ora si vogliono assegnare. E prima per la estrazione della radice quadrata, dalle quantità irrazionali, è d'uopo di notare, che ogni quantità irrazionale, da cui si abbia da levare la radice quadrata, dee avere qualche termine di quantità razionale, perchè o accada, che il quadrato si formi da due termini radicali, o da uno radicale, e l'altro razionale, sempre ha da nascere un multinome composto di qualche termine razionale. Si ha da notare in secondo luogo, che il termine razionale, o il suo quadrato dee sempre essere maggiore del termine radicale, che da esso si ha da sottrarre. Finalmente si nota, che la differenza de i quadrati fatti col termine razionale, e radicale dee essere un quadrato. Premesse tutte queste tre operazioni, ecco la maniera di estrarre la radice quadrata dal binome. Prima si riquadra la grandezza razionale. In secondo luogo si riquadra la grandezza irrazionale, e il risultato si leva dal primo quadrato, e dallo avanzo si estrae la radice quadrata. Questa radice quadrata, che si trova, prima si somma col termine razionale del binome, della somma si prende la metà, e la radice quadrata di questa metà è il primo termine della radice quadrata dello stesso binome. In secondo luogo si leva dallo stesso primo termine razionale con prendere la metà dello avanzo, e in questa metà posta alla destra del segno radicale, dopo di avere posto alla sinistra il segno †, se il secondo termine del binome sarà preceduto da questo segno, o il segno del meno, se è preceduto dal segno —, si è trovato l'ultimo ter-

termine della domandata radice quadrata, che si doveva levare dal binome proposto. Eccone due esempj.

Esempio I.

Si estragga la rad. quad. dal binome $\overline{12} + 6\sqrt{3}$

num. quadrato ———— 144   36 n°. quad. del term. che precede il segno

$\overline{108}$

avanzo ———— $\overline{36}$ $36 \times 3 = 108$.

6 rad. quad. del 36

12	12
6	6
18 som. del term. mag. del bin. colla radice quadrata	6 avanzo della sottraz. della rad. dal term. mag. del bin.
9 metà della detta somma.	3 metà di questo avanzo, e ultimo term. che si cercava per la rad.
3 radice di questa metà, e primo term. della rad.	$3 + \sqrt{3}$ radice quadrata ritrovata.

Esempio II.

Si estragga la rad. quad. dal bin. $bb + \overline{cd} + 2b\sqrt{cd}$

$bb + cd \times + bb + cd$

$b^4 + 2bbcd$

$+ bbcd + ccdd$

$2b\sqrt{cd} \times 2b\sqrt{cd}$

$4bbcd$ quad. della par. min. del bin.

$b^4 + bbcd + ccdd$ quad. della prima parte del bin.

$+ 4bbcd$

$b^4 - 2bbcd + ccdd$ avanzo della sottr. del quadr. della min. parte del bin. dal quad. della mag. perchè da esso si estragga la radice quadrata.

$bb^2 - 2bbcd\ ccdd$ riduz. della potenza superiore alla inferiore.

bb^2 quad. del primo term. della rad.

$0 - 2bbcd + ccdd$ avanzo

$+ 2bb$ dupl. e partit.

$- 2bbcd + ccdd$ somma composta dalla multip. del duplato per la sec. rad. trov. e dal quad. della med. sec. rad.

0   0

(bb pr. term. della rad. quadrata
($-cd$ secondo termine.

$bb + cd$ term. magg. del binome dato $bb + cd$

$bb - cd$ radice quadrata trovata $bb - cd$

$2bb - 2cd$ somma $0 - 2cd$ avanzo

$2bb$ differenza della quantità aggiunta, e sottratta dal pr. term. del bin.

cd metà dell' avanzo, e sec. term. della rad. quad. del bin.

$bb + \sqrt{cd}$ rad. quad. intera del binome dato.

XXVIII. Una maniera anche più corta per estrarre la radice quadrata da un binome, ce la somministra il Neuton, insegnando, che dato un binome, dee distinguersi l'una, e l'altra delle sue parti con una lettera, potendosi chiamare il primo termine del binome A, il secondo B. Fatto questo, esprime così il quadrato della parte maggiore $\frac{A+\sqrt{AABB}}{}$, e scrive il quadrato della parte minore $A\sqrt{AA-BB}$. Trova poi la differenza de i due quadrati, e da essa levata la radice quadrata, questa la pone alla destra del segno † nel quadrato della parte maggiore, e alla destra del segno — nel quadrato della parte minore, e alla sinistra di questi segni lascia stare il primo termine del binome, poi tirata al di sotto di questa quantità, così formata una linea, all'usanza di quando si ha da partire, scrive per partitore il 2, e tolta dal maggior quoziente della divisione la radice quadrata, e questa, e quello scrive dopo il segno radicale, con framezzare, secondochè di sopra si è detto, il segno del più, e del meno, e fa vedere quale dee essere la radice quadrata del dato binome.

Esempio.

Si levi la rad. quad. da questo binome $\underline{27+\sqrt{200}}$

$$\sqrt{AA-BB}=27+23$$

$$A+\sqrt{\frac{AA-BB}{2}}=\frac{27+23}{2}=25=\sqrt{5}$$

$$A-\sqrt{\frac{AA-BB}{2}}=\frac{27-23}{2}=2\sqrt{2}$$

$\sqrt{5}+\sqrt{2}$ *rad. quad. del dato bin.*

Di questa medesima regola ci serviremo, se occorrerà di levare la radice quadrata da qualche multinome, in ordine a cui osserviamo, che il multinome si dee dividere in binomi, e questi si hanno da prendere come termini della operazione da farsi, e ciascuno si ha da distinguere con una lettera particolare; quindi ciascuno di questi termini si ha da riquadrare, e il quadrato minore levato dal maggiore comparirà una differenza, prima da aggiugnersi al primo termine preparato per la operazione, acciò da tutta questa somma, levata la radice quadrata, si veggano in questa quali sono le prime grandezze per la radice, che si dimanda, in secondo luogo da levarsi dallo stesso primo termine, perchè poi fatta la sottrazione, si trovi colla estrazione

ne della redice quadrata dallo avanzo l'ultima grandezza, che ha da compire tutta la radice del multinome dato, per trovare la di lui radice quadrata.

Esempio.

Si levi la radice quad. da $6 \dagger \overline{2\sqrt{2}} \dagger \overline{\sqrt{12}} \dagger \overline{\sqrt{24}}$

Primo binome.	*Secondo binome.*
$6 \dagger 2\sqrt{2} = A$	$\sqrt{12} \dagger 24 = B$
$6 \dagger 2\sqrt{2}$	$\sqrt{12} \dagger \sqrt{24}$
$36 \dagger 12\sqrt{2}$	$12 \dagger \sqrt{288}$
$\dagger 12\sqrt{2} \dagger 8$	$\dagger \sqrt{288} \dagger 24$
pr. quad. $44 \dagger 24\sqrt{2}$	$36 \dagger 2\sqrt{288}$ *quad. se c.*

parte magg. $A \dagger \sqrt{AA - BB} = 44 \dagger 24\sqrt{2}$

quad. della parte min. $A - \sqrt{AA - BB} = 36 \dagger 2\sqrt{288}$

differenza de i due quad. $8 = 2\sqrt{2}$

Primo termine espresso colla differenza aggiunta

$$\frac{A \dagger \sqrt{AA - BB}}{2} = \frac{6 \dagger 4\sqrt{2}}{2} = 3 \dagger 2\sqrt{2}$$

Primo termine scemato della stessa differenza.

$$\frac{A - \sqrt{AA - BB}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Estrazione di radice.

da ——— $3 \dagger 2\sqrt{2}$ *primo binome*

$3 \dagger 2\sqrt{2}$

9

$8 \cdots\cdots$

1 *differenza*

$$\frac{A \dagger \sqrt{AA - BB}}{2} = \frac{3 \dagger 1}{2} = 2$$ *quad. della parte magg e pr. term. della rad. che si cerca*

$$\frac{A - \sqrt{AA - BB}}{2} = \frac{3 - 1}{2} = 1$$ *quad. della parte min. e sec. term. della rad. che si cerca.*

Estra-

Estrazione di radice.

da 3 *avanzo rimasto scemato il pr. term. del dato multinome*
$\sqrt{3}$ *quad. di questo avanzo, e terzo term. della radice dimandata*
$\sqrt{2} + \sqrt{1} + 3$ *radice del dato multinome, da poterfi riscontrare colla multiplicazione in se med. come si è altrove osservato.*

XXIX. Succede alla estrazione della radice quadrata dalle grandezze irrazionali composte, l' altra estrazione, che si chiama di radice cuba, di cui perciò ora dobbiamo parlare. Fra le varie cose, che si possono osservare per la estrazione di questa radice, le principali sono, il dovere avvertire prima, se la quantità data risulta tutta intera da i termini irrazionali, o se pure ha qualche termine, che sia razionale, quando gli altri sono irrazionali. In secondo luogo, se essendo la data quantità un binome, ed essendo riquadrate le due parti, tolto il minor quadrato dal maggiore, nello avanzo rimane un numero perfetto cubo, oppure un numero di qualunque altra denominazione, o se la prima parte del binome è un solo numero intero, oppure ha congiunta qualche frazione, e finalmente, se il segno radicale si trovi solo appresso la seconda parte del binome, ovvero, se tutte due le date parti portino seco il medesimo segno radicale. Fatta la riflessione sopra tutte queste circostanze per venire alla pratica, si supponga dato un binome, di cui la prima parte sia un termine razionale, e la seconda sia un termine irrazionale, come sarebbe $26 + 15\sqrt{3}$. Per levare la radice cuba da quella quantità, si fa vedere in primo luogo riquadrato tanto il termine razionale 26, quanto il termine irrazionale $+ 15\sqrt{3}$. Il quadrato del 26 è 676, il quadrato di $+ 15\sqrt{3}$ è 675.

Questo quadrato 675 levato da 676 lascia di avanzo 1, che è numero perfetto cubo, onde sopra la quantità data si può bene operare per avere la estrazione della radice cuba, che in questo modo si può trovare.

Si levi il numero, che è a destra del segno radicale, da quel-

quello, che gli stà a sinistra, cioè, si levi il 3 dal 15, l'avanzo è 12, si prenda di questo avanzo la terza parte, che è 4, e si prenda la sua radice quadrata 2. In questa radice quadrata si ha il primo termine della radice cuba richiesta, dopo la quale, posto il segno del più, poi il segno radicale $\sqrt{}$, finalmente alla destra di questo segno, lo stesso 3, che vi si trova nel dato esempio, si vede tutta intera quale dee essere la radice cuba di $26 \dagger 15\sqrt{3}$, che ha da essere $2 \dagger \sqrt{3}$, come lo fa vedere la riprova, che si fa, secondo le regole della multiplicazione altrove stabilite, e che quì per sicurezza della bontà della operazione seguita si aggiugne.

$2 \dagger \sqrt{3} \times 2 \dagger \sqrt{3}$

$4 \dagger 2\sqrt{3}$
$\dagger 2\sqrt{3} \dagger 3$

$7 \dagger 4\sqrt{3}$ *quadrato*
$\times 2 \dagger 3$

$14 \dagger 8\sqrt{3}$
$\dagger 7\sqrt{3} \dagger 12$

$26 \dagger 15\sqrt{3}$ *cubo, e binome dato, perchè da esso si estraesse la radice.*

XXX. Se questo modo di levare la radice cuba da i binomi potesse sempre praticarsi, riescirebbe, come ognuno vede, una operazione molto facile lo estrarre simili radici dalle quantità irrazionali. Accade però il più delle volte, che di questa regola non possiamo servirci, ed allora principalmente, quando fatta la sottrazione della quantità, posta alla destra del segno radicale dall' altra posta alla sinistra, non resta un avanzo, la di cui terza parte sia perfetto numero quadrato, come si osserva nel binome $25 \dagger 22\sqrt{2}$. Ecco dunque in questo caso qual regola si dee da noi tenere per riuscire nel nostro impegno di levare questa radice cuba.

1. Si dee avanti ad ogni altra cosa trovare la differenza de i quadrati delle due parti del binome, con riquadrare l'una, e l'altra, sottraendo la minore dalla maggiore.

2. Si dee in secondo luogo levare la radice cuba dalla differenza trovata, e si dee levare la radice quadrata dal quadrato della grandezza irrazionale del binome.

3. Questa radice quadrata si ha da sommare colla parte razionale del binome, e da una tal somma si ha da levare la più prossima radice cuba.

4. Per questa radice cuba prossima, presa come divisore, si ha da partire in quarto luogo la prima radice cuba, le-

levata dalla differenza de i quadrati delle parti del binome.

5. Il quoziente nato da una tal divisione, se il quadrato della parte razionale del binome è maggiore, si dee aggiugnere al divisore, se poi è minore, si dee levare.

6. Finalmente di un tale prodotto presa la metà, si vede in questa il primo termine della radice dimandata, e si ha quanto serve per trovare altresì l' ultimo termine, che è formato dalla somma del quadrato del primo termine trovato colla radice cuba, levata dalla differenza de i quadrati delle predette parti del dato binome, se la differenza contiene la parte irrazionale, o dallo avanzo del medesimo quadrato, dopo levata la radice cuba della differenza, se il quadrato della parte razionale del binome è maggiore del quadrato dell' altra parte irrazionale. Ecco tutte le accennate regole poste in veduta nel seguente Esempio.

Si ha da levare la radice cuba da questo binome $99 + 70\sqrt{2}$ Si osservino tutte le parti delle operazioni, quali quì sopra sono state avvertite.

Primieramente il quadrato del 99, che è la parte razionale, si trova 9801, ed il quadrato della parte irrazionale $+70\sqrt{2}$ è 9800, dunque la differenza de i due quadrati è 1.

In secondo luogo la radice cuba della differenza è 1, e la radice quadrata prossima della parte irrazionale è 98 coll'avanzo di 396 poco più di $\frac{1}{2}$.

In terzo luogo il 197 è una unione della parte razionale colla prossima radice quadrata trovata, ed il 5 è prossima radice cuba di questa somma, a cui, perchè avanza 72, cioè più della metà del prodotto della radice cuba trovata, si può aggiugnere $\frac{2}{3}$, e dire $5\frac{2}{3}$, che si prenderà per la presente radice cuba.

In quarto luogo i $\frac{17}{3}$ sono il quoziente della divisione della prima radice cuba 1 divisa per la seconda $5\frac{2}{3}$.

In quinto luogo il $5\frac{43}{51}$ sono la unione del quoziente della predetta divisione colla radice cuba levata dal 197, cioè $5\frac{2}{3}$, e perchè poco ci manca acciò $\frac{43}{51}$ formino un intero, lo prenderemo per un intero per uguagliare con questo ciò, che ebbe di meno la radice quadrata tolta dal quadrato della parte razionale; dunque diremo nascere da questa unione il 6.

In ultimo luogo prendendo noi di questo 6 la metà, prendia-

diamo quel numero, che ci moſtra la prima parte della radice cuba, che ſi leva dalla quantità razionale del binome, e ſcriviamo da parte queſto 3. Quì non reſta compita la operazione, ma ora ſi termina preſto, perchè riquadrato il primo termine trovato, riſulta 9. Si levi dal 9 il cubo levato dalla differenza de i quadrati, che è 1, rimane 8; ſi ſcriva dunque queſto 8 tale, e quale alla deſtra del ſegno radicale poſto alla ſiniſtra il ſegno $+$, e ſi divida in queſta forma $+ 2\sqrt{2}$, nell' uno, e nell' altro modo ſi avrà trovata l' ultima parte della radice cuba pel termine irrazionale del dato binome, che poſta tutta in veduta, eccola quale è $3 + 2\sqrt{2}$.

XXXI. Si dovrebbe ora aggiugnere il modo di eſtrarre la medeſima radice cuba dal binome eſpreſſo ſecondo gli altri due caſi accennati, per i quali o ha tutte le parti incommenſurabili, oppure ha le frazioni congiunte a i ſuoi termini, come ſarebbe queſto primo binome $26\sqrt{5} + 22\sqrt{7}$, ovvero queſto altro $1\frac{3}{8} + \frac{19}{27}\sqrt{2}$; di più ancora potrebbe volerſi eſporre la maniera di cavare qualunque altra radice da qualunque altra potenza; ma come che prima di intraprendere ſimili operazioni, è neceſſario di avere un franco maneggio nelle operazioni de i rotti, come è accaduto di averlo oſſervato nell' ultima eſtrazione della radice cuba, per tanto quì ſopraſſederemo di fare più lungo diſcorſo ſu queſta materia, che ſi potrà ripigliare dopo di aver trattato delle frazioni, e di tutti i loro algoriſmi. Vogliamo ſolo avvertire, che può aſſai facilitare qualunque delle precedenti operazioni, che ſi ſono fatte per eſtrarre le radici dalle quantità compoſte irrazionali, il prefigerſi un modello o in una radice, o in un multinome eſpreſſo in lettere corriſpondente al dato eſpreſſo in cifre Aritmetiche, perchè, mentre ſubito, che queſto ſia preparato, nella ſua prima parte razionale oſſerviamo il quadrato delle parti della radice, che ſi dee levare, e nelle parti irrazionali veggiamo le multiplicazioni de i quadrati delle parti di queſte iſteſſe radici. Nel ſeguente eſempio ſi riſcontra la verità di quanto ſi è avvertito, in caſo, che la radice abbia da eſſere quadrata quella, che ſi vuole levare dal binome, o dal multinome. Del binome $a^2 + \overline{b} + 2\overline{\sqrt{ab}}$, la radice quadrata è $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, come del multinome $a + b + c\,2\sqrt{ab} + 2\sqrt{ac} + 2\sqrt{bc}$, la radice quadrata è $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$.

Si riſcontra pure lo ſteſſo, ſe dee eſſere la radice cuba quella, che ſi ha da levare, perchè del binome $a^3 + 3ab + 3a\sqrt{b} + b\sqrt{b}$, la radice cuba ſi trova $a + \sqrt{b}$, e non ſolo ciò è vero quando qualche termine del binome è razionale, ma altresì quando tutti i termini ſono irrazionali, o incommenſurabili fra di loro, non eſſendo altra la radice cuba di queſto binome $a\sqrt{a} + 3b\sqrt{a} + b\sqrt{b} + 3a\sqrt{b}$, ſe non che queſta $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, come del trinome $a\sqrt{a} + 3b\sqrt{a} + 3c\sqrt{a} + b\sqrt{b} + 3a\sqrt{b} + 3c\sqrt{b} + c\sqrt{c}$. $+ 3a\sqrt{c} + 3b\sqrt{c} + 6\sqrt{abc}$, la radice cuba ſi moſtra $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$. Sicchè ſi eſtrarrà la radice di queſte potenze eſpreſſe con lettere in quantità compoſte irrazionali, con oſſervare tutte le differenti lettere, che le compongono, e tutti quei ſegni del più, e del meno, che congiungono inſieme i termini de i multinomi, e con prenderne una di ogni fatta, collegandole tutte inſieme con i medeſimi ſegni.

XXXII. Per intendere ora l'applicazione, che ſi ha da fare del multinome eſpreſſo con lettere al multinome eſpreſſo con cifre, torna bene portare un eſempio, che ſervirà per riſcontro della operazione fatta ſecondo il modo, che ſi conſiglia. Si cerchi dunque la radice del binome $12 + 2\sqrt{27}$.

La radice di queſto binome dee avere due termini; ſicchè poſſiamo figurarci, che la radice conſiſta in queſta quantità $a + \sqrt{b}$; ſtabilita la radice ne i termini ſuppoſti, ſi prepara con eſſa il binome corriſpondente al già determinato, e il binome, che ſi prepara col multiplicare la radice $a + \sqrt{b}$ in ſe ſteſſa è il ſeguente $a + b + 2\sqrt{ab}$.

La prima parte $a + b$ corriſponde alla prima parte 12, la ſeconda parte $+ 2\sqrt{ab}$ corriſponde alla ſeconda $+ 2\sqrt{27}$. Eſſendochè dunque la prima parte $a + b$ contiene i due quadrati della radice $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, ancora la prima parte 12 ſarà la ſomma de i due quadrati della radice da trovarſi, e ſiccome la ſeconda parte $+ \sqrt{ab}$ contiene il prodotto di due quadrati, così pure la ſeconda parte $+ \sqrt{108}$ dee contenere il prodotto di due quadrati, de i quali la ſomma è contenuta dalla prima parte.

Volendoſi ora determinare ciaſcheduna parte della radice, che ſi cerca, non ſi ha da fare altro, ſe non che dividere il 27 fino a tanto, che non ſieno trovati due numeri,

cioè

cioè un divisore, e un quoziente, che raccolti insieme contengano la somma de i due quadrati, cioè rilevino il primo termine del dato binome, e comecchè diviso il 27 per 3, dà per quoziente 9, e questo 9 insieme col 3 fanno 12, cioè tutto il primo termine del binome, perciò sarà $a = 3$, e $b = 9$, e $3 + \sqrt{9}$ sarà la radice del binome $12 + \sqrt{108}$.

XXXIII. Si mantiene la stessa regola, se il binome è dato, perchè da esso si levi la radice cuba (si suppone, che il binome sia tale, che faccia un cubo perfetto) mentre si osserva, che quando si supponga avere un simil binome per sua radice espressa con lettere la radice $a + b$, dovendo il cubo di questa radice essere $\overline{a\sqrt{a} + 3b\sqrt{a}} + \overline{b\sqrt{b} + 3a\sqrt{b}}$, questo cubo è quello, che può servire per modello del dato binome $72 + 32\sqrt{5}$, acciocchè s' intenda la condizione di quelle parti, che lo compongono; ma perchè l' una, e l' altra parte del binome dato si ha da riquadrare, si riquadrano le parti del modello preparato, multiplicando della prima parte del binome $a\sqrt{a} + 3b\sqrt{a}$, la quantità $a + 3b$ in se stessa, poi il risultato per a, e della seconda parte $+ b\sqrt{b} + 3a\sqrt{b}$, multiplicando la grandezza $b + 3a$ per se medesima, e poi il risultato per b, e si trova $\sqrt{a^3 + 6aab + 9abb}$ pel primo quadrato, e che $\sqrt{b^3 + 6bba + 9aab}$ è il quadrato secondo, e tutti due uniti insieme così $\sqrt{a^3 + 6aab + 9bba} + \sqrt{b^3 + 6abb + 9aab}$, formano quello esemplare, alla vista di cui, si scuopre quale abbia da essere ciascun termine della radice cuba richiesta. Nascendo dunque il primo quadrato da queste tre quantità multiplicate fra loro a, $a + 3b$, $a + 3b$, e derivando il secondo quadrato similmente da queste tre grandezze b, $b + 3a$, $b + 3a$, cioè da due uguali, e da una disuguale, però fatti i quadrati delle parti del dato binome $72 + 32\sqrt{5}$, che sono $\sqrt{5184} + \sqrt{5120}$, si dividerà l'uno, e l'altro di essi con tre numeri, de i quali, due saranno uguali, e il terzo disuguale, con questa riflessione, che multiplicati uno per l' altro, rilevino gli stessi quadrati. I tre numeri, che dividono il primo quadrato sono 9. 24. 24. I tre numeri, che dividono il secondo quadrato sono 5. 32. 32. perciò presi di questi il 9, ed il 5 legati insieme colli proprj segni così $\sqrt{9} + \sqrt{5}$ si farà in essi trovata la cuba radice corrispondente alla radice $\sqrt{a} + b$,

dunque $3 + \sqrt{5}$ ſarà la radice cuba preparata pel binome. Quello, che ſi è detto per la eſtrazione della radice cuba dal binome, fatto lo eſemplare in lettere, ſi dice di qualunque altro multinome, ſopra di cui non vi è da avvertire ad altro particolare, ſe non al ſapere quanti termini dee avere la radice cuba, ſia il multinome quale eſser ſi voglia; al quale effetto però ſi aggiugnerà più a baſso la regola per ritrovarlo, accennando quì unicamente, che ſe il multinome dato è eſpreſso in modo, che alla deſtra, e alla ſiniſtra del ſegno radicale abbia le cifre Aritmetiche, per avere di queſto multinome la radice cuba, baſta di queſte prenderne tante quante hanno da eſsere collocate alla deſtra de i ſegni radicali, legate inſieme co i proprj ſegni, ed in un tale operato ſpeditamente è ſcoperta la vera cuba radice del multinome, quale appunto nel ſeguente eſempio ſi dice eſsere $\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{6}$, la radice cuba del multinome $42\sqrt{3} + 44\sqrt{2} + 38\sqrt{5} + 36\sqrt{6} + 6\sqrt{30} + 6\sqrt{36} + 6\sqrt{90} + 6\sqrt{60}$; come può riſcontrare chi brama di aſſicurarſi della verità, con intraprenderne la riprova. Qualche differenza ſi oſserva nella operazione di cui ſi è parlato, ſe ſi proponga la eſtrazione della radice cuba da una quantità, compoſta di termini tutti irrazionali, e che ha il termine radicale eſpreſso come quì ſi vede nella quantità $\sqrt[3]{12} + 3\sqrt[3]{175} + 3\sqrt[3]{245}$, e la differenza di queſta operazione conſiſte nella multiplicazione, che ſi ha da fare delle grandezze poſte alla deſtra del ſegno radicale, ſecondo che le parti della radice hanno da riſultare o più, o meno, atteſa la quantità di quel multinome, che può eſſere dato; ſe i termini del multinome ſono tre (come ſi oſservano nel multinome preſo per eſempio) dovendo eſſere due le parti della radice, queſte ſi trovano con multiplicare fra loro i numeri, che ſono alla deſtra de i ſegni $\sqrt[3]{}$, cioè 175×245, e con levare dal riſultato 42874 la radice cuba 35, e con partire per queſta cuba radice trovata ciaſcheduno dei numeri, che ſi ſono multiplicati fra loro; e perchè nel 175 ſi vede, che il 35 entra 5 volte, come 7 volte ſi vede entrare nel 245, perciò queſti due numeri 5, 7 ſono le parti della radice richieſta, che va manifeſtata in tal guiſa $\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{7}$, ſcoprendoci, che la operazione è ben fatta, non ſolo la operazione ordinaria fatta colle multiplicazione, ma di più il riſultato dalla ſomma de i termi-

ni

ni della radice trovata, che appunto conguaglia col primo termine del dato multinome, di cui, ſe più foſsero ſtati i termini, ſi ſarebbe operato col metodo medeſimo, preſi di quelli due per volta, cioè il ſecondo col quarto; il terzo col ſeſto; il quarto coll'ottavo &c. con rinnovare ſempre ſopra ciaſcuno dei due la operazione già fatta ſopra lo eſempio aſsegnato.

XXXIV. Perchè dunque in un tale eſercizio di operare giova aſſaiſſimo il ſapere in un tratto quante parti deve avere la radice, che ſi cerca, o quadrata, o cuba, però ſi aggiugne la tavoletta ſeguente, in cui ſi veggono le parti, che hanno da avere le radici di qualunque aſſegnato multinome. La prima fila di numeri eſprime la ſerie delle parti del dato multinome, la ſeconda il numero delle parti corriſpondenti di qualunqne radice, sì quando le quantità alcune ſono razionali, altre irrazionali, oppure quando tutte ſono irrazionali.

Serie I. quando le quantità ſono notate col ſegno radicale $\sqrt{}$.

Numero de i termini de i cubi dati	2.	4.	8.	15.	26.	42.	64.	93.	&c.
Numero de i termini delle radici	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	&c.

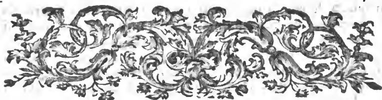
Serie II. quando il ſegno radicale è contraſſegnato così $\sqrt[3]{}$.

Num. de i termini de i cubi	1.	3.	8.	17.	31.	51.	78.	113.	157.	&c.
Num. de termini delle radici	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	&c.

Dove poi ſi tratta di determinare il numero de i termini, che deve avere la radice quadrata, queſto ſi deve variare, perchè un quadrinome talvolta ha tre termini di radice quadra, ed alle volte quattro. In queſto eſempio $10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}$ ſi trovano per la radice quadrata tre termini, cioè $\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{5}$. In queſto altro $27 + 2\sqrt{54} + 2\sqrt{128} + 2\sqrt{108}$ ſi trovano per la radice quadrata quattro termini, cioè $1 + \sqrt{6} + \sqrt{8} + \sqrt{12}$. Il binome ha ſempre per radice il binome. Il trinome ha il quadrinome, che pure lo ha per radice il ſettinome, e queſto quadrinome ſi trova con prendere i quozienti di quei diviſori, che dividono i termini irrazionali trovati tali, che tutti raccolti inſieme formino per l'appunto il primo termine del ſettinome, e che ſieno ſcritti tutti co i proprii ſegni del più, e del meno, ſecondo che loro convengono; avvertendoſi per conto di porre al ſuo luogo il ſegno del meno quando il ſettinome dato aveſse qualche termine eſpreſso con queſto ſegno, che queſto ſegno ſi pre-

premette a quel quoziente de i trovati, che divide il termine del settinome, che porta il medesimo segno. Del rimanente se si renda impossibile trovare le parti della radice, o quadrata, o cuba, perchè le quantità date non lo permettano, si premetterà a tutti i termini del dato multinome il segno radicale, con distendergli al disopra una linea, che copra tutti i suoi termini in tal modo $\overline{\sqrt{3} \dagger \sqrt{5}}$ $\overline{\sqrt{2} \dagger \sqrt{1} \dagger \sqrt{3}}$ $\overline{\sqrt[3]{3} \dagger \sqrt{2} \dagger \sqrt{5} \dagger \sqrt[3]{6}}$ riflettendo dopo ciò di considerare tutti questi termini, sopra i quali si vede tirata la linea non come tante radici distinte, ma come un termine solo, o una sola quantità contradistinta con questo nome di *radice universale*, sotto qual voce non solo vengono comprese le quantità, dalle quali non si può levare alcuna radice, ma ancora le radici tutte, che si sono levate da tutte le quantità composte o di termini tutti irrazionali, o di termini razionali congiunti con altri irrazionali, e convengono ad esse le operazioni, che convengono alle altre, perchè o rimanghino ingrandite, o sempre più si veggano impiccolite. Non essendo però sì facile, che il bisogno richiegga il dovere praticare tali operazioni su questa quantità, però, mentre si tace di esse, si passa a notare un altra sorte di radici, che sono chiamate *radici imaginarie*, e sono quelle, nelle quali si vede prima il segno radicale, e dopo di esso una quantità negativa notata così $\sqrt{-18} \dagger \sqrt{-8}$. Si ingrandiscono queste, e si impiccoliscono come quelle, e si osserva nell' ingrandimento loro, che talvolta risulta un prodotto reale negativo, e qualche volta un prodotto reale positivo, e dà causa a questa differenza quel segno, che si pone alla sinistra del segno radicale di queste quantità da multiplicarsi fra le notate colle medesime lettere. Risulta il prodotto reale negativo, se tutte due le quantità sono prevenute dal medesimo segno † o —. Risulta il prodotto reale positivo, se una ha il segno †, e l' altra il segno —. Se si multiplica $\dagger\sqrt{-b} \times \dagger\sqrt{-b}$, ovvero $-\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a}$ di queste due multiplicazioni i prodotti sono $-b$, $-a$; ma se si multiplica $\dagger\sqrt{-b} \times -\sqrt{b}$, ovvero $-\sqrt{-a} \times \dagger\sqrt{-a}$ il prodotto delle due multiplicazioni ha da essere $\dagger b$, $\dagger a$. Le altre particolarità, che si potrebbero osservare nelle operazioni di queste radici imaginarie non sono molto in uso, e però queste ancora, non meno che quelle delle radici universali, opportunamente le tralasciamo.

LA



LA SCIENZA DELLE GRANDEZZE

Trattato Primo Parte II.

C A P I T O L O I.

Delle Frazioni, loro origine, e maniere di prepararle per operare con eſſe.

I. SE ciò, che fino ad ora abbiamo oſſervato intorno al modo d' ingrandire, o d' impiccolire una quantità eſpreſſa in qualunque delle due maniere, nelle quali ſi può eſprimere, o con cifre, o con lettere, foſſe quel ſolo, che può accadere a chiunque intraprende ad operare ſu queſta materia, ſarebbe giunto al ſuo termine tutto queſto Trattato, e non occorrerebbe preparare noi ſteſſi ad apprendere altre regole di operazioni nuove, mentre le ſomminiſtrate più che a ſufficienza, ci guiderebbero a ſcoprire quanto occorreſſe di conoſcere nella diſcreta quantità; Ma come che l' eſperienza ci ha fatto toccar con mano più di una volta, che non ſempre là addentro ſi penetra, dove le difficoltà ſono maggiori, e che queſte difficoltà in quei caſi appunto, maggiori, e più forti s' incontrano, dove non ſi può operare colle quantità, che ſiano intere, per queſto effetto ci troviamo ora impegnati a ſuperare queſto oſtacolo, e a far vedere a chi vuole, come queſto non ha, o da impedire, o almeno da ritardare l' acquiſto di una cognizione, che ſi vuol dare intera, piena, e compiuta ſu qualunque genere di operazione, che colle regole, eſattamente ſpiegate fin quì, ſi debba intrprendere in ordine a i numeri.

Dunque l' intento noſtro principaliſſimo egli è di parlare

in

in questo luogo di quelle quantità, che intere non sono, cercando perciò da che derivi la loro origine, e come queste si formino, e come ancora si preparino per aver così in pronto quello, che senz'altro ha da essere presupposto a quanto può occorrere per dovere operare con esse, considerate da sole a sole, o con esse osservate congiunte vicendevolmente alle intere.

II. La Frazione, per parlare con proprietà, altro non è, che una, o più parti della unità, o di cosa intera, che sia rimasta divisa, sicchè numero rotto dee dirsi quello, che viene riferito all'unità, come parte al suo tutto. Pare certamente a prima vista, che l' unità sia quella, che il volgo degli uomini la suol giudicare cosa indivisibile, per questa ragione, perchè o è principio di un numero, o è principio di tutto altro, che è soggetto del numero, e ogni principio ha questo di proprio di non amettere divisione: ma perchè altresì l'uso ordinario di ogni gente ha applicato questo nome, ad ogni, e ciascuno ente, o reale, o vero, che sia, o imaginario, o possibile; perciò la divisione, che senza alcun dubbio si fa di tutto quello, che per differenziarlo da molti si proferisce con questa voce uno, si è trovato, che possa aver luogo su l' unità, e non di una fatta sola, ma si è trovato, che la divisione si possa esprimere con tutte quelle infinite maniere, colle quali si possono in infiniti modi separare, e distinguere fra di loro le parti di qualche cosa, come quando si prende di esa una metà, una terza parte, una quinta, una decima, una milionesima, o qualunque altra. La frazione deve avere due termini, manifesta il primo il numero delle parti rimaste della intera quantità. Il secondo contiene quella grandezza, che dividendo un altra ha cagionata la frazione, che è rimasta; dal che s' intende quale sia quella operazione, che suol lasciare la frazione, che è quella nella quale una quantità data divide un altra, e subito, che l' abbia divisa, lascia di lei una tal porzione, intorno a cui non si può sapere, che cosa sia, se prima non si paragoni con quella, che nel dividere l' intera, lasciò di esa una tal parte, o minuzia, e questo è, perchè poi vi fu chi disse le frazioni, o numeri rotti non esere altre cose, che certe maniere di esprimere le ragioni, che hanno due, o più numeri fra di loro.

III. Il primo termine della frazione si chiama numeratore,

re, e questo è quello, che sta notato sopra la linea. Denominatore è l'altro, che è posto al di sotto della medesima linea, in tal modo $\frac{1}{7}$. Numeratore il primo, perchè numera le parti rimaste del numero intero, denominatore il secondo, perchè dà il nome alle stesse parti; che dal due sino al 10 si leggono un mezzo, un terzo, un quarto, un quinto, un sesto, un settimo, un ottavo, un nono, un decimo, esprimendosi le seguenti tutte con aggiugnere all' espressione di quel numero, di cui sono parti, questa voce finale *esimo*, e si dice un undicesimo, un trentesimo, un centesimo, un millesimo &c. Se sono tali le frazioni, che si hanno da rilevare colla propria espressione. Il denominatore non può mai essere minore del numeratore, perchè allora il numeratore conterrebbe un intero, non può essere uguale per la stessa ragione, ma deve essere sempre maggiore, e se pure ha da accadere tal volta, che il denominatore sia superato dal numeratore, sarà l'espressione impropria per essere di frazione, e la frazione in questo accidente dovrà aversi per spuria.

IV. Riflettendo ora alla qualità delle frazioni non tutte sono ad un modo, se si paragonino fra di loro, e non solo la differenza consiste nell' essere l' una rispetto all' altra, o maggiore, o minore, o uguale, ma ancora nel potersi riferire a differenti specie, quali sono quelle, che sono chiamate, o frazioni decimali, o frazioni sessagesimali. Sono uguali le frazioni paragonate fra loro, se i loro numeratori, e denominatori sono uguali, e se i loro numeratori sono parti uguali de i loro denominatori, condizione questa ultima di tale importanza, che ogni qual volta manca rende le frazioni disuguali, e in questo caso, se una è maggiore, l'altra per necessità deve essere la minore.

V. Siccome poi, non perchè i denominatori sono uguali, si può inferire, che uguali sono le frazioni, se anche i numeratori non sono uguali, così neppure, perchè e questi, e quelli sono disuguali, si deve dire, che disuguali sono le frazioni, potendo spessissimo accadere, che con disuguali numeratori, e denominatori si trovino frazioni uguali, ma non già se i denominatori sono i medesimi, e i numeratori sono diversi. Si conoscerà dunque l' uguaglianza delle frazioni da i risultati dalle loro multiplicazioni, che dovranno essere i medesimi, se sono uguali, e riesciranno diversi, se saranno disuguali, e la regola

gola per la multiplicazione è tale. Si multiplica il numeratore della prima frazione per il denominatore della seconda, e il risultato si pone da banda, poi si multiplica il numeratore della seconda per il denominatore della prima, e corrispondendo questo risultato al primo, si è scoperta l'uguaglianza delle due date frazioni, come si scopre nell'esempio, che quì si pone, e che esprime due frazioni uguali fra loro per questa precisa ragione.

$$\frac{6}{9} \cdots \frac{12}{18}$$

$$108 \quad 108$$

Non sono già uguali queste altre frazioni $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{5}$; $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{7}$. $\frac{7}{11}$, $\frac{7}{9}$, perchè in nessuno di questi casi, fatta la prova quale si deve, non compariscono uguali i prodotti delle loro multiplicazioni; ma tutti disuguali, e così nel primo esempio sono maggiori $\frac{5}{7}$ di $\frac{3}{5}$, nel secondo $\frac{5}{7}$ di $\frac{3}{7}$, nel terzo $\frac{7}{11}$ di $\frac{7}{9}$, ma meglio questo si intenderà, dopo che si sarà parlato del modo di ridurre più rotti di diversa denominazione alla medesima denominazione. Per proseguire ora nell'accennare le differenze, che si trovano alle frazioni, considerate nelle loro specie, diversissime sono le frazioni ordinarie (delle quali sempre si parla quando null'altro si aggiugne) da quelle frazioni, che sono dette frazioni decimali. Sono le frazioni decimali quelle, che nascono dalla divisione dell'intero in dieci parti, dividendosi in oltre ciascuna di queste decime parti in altre dieci, e ciascuna di queste in altre dieci; e così all'infinito. Come se le parti nell'intero si distinguono 60, e ciascheduna di queste si divida in altre 60, e successivamente qualunque di queste in 60. altre &c. tali frazioni sono quelle, che sono chiamate sessagesimali, distinte le prime dalle seconde dalla proporzione differente, con cui queste parti si fanno crescere fra di loro.

VI. Si danno ancora certe frazioni, che sono chiamate frazioni di frazioni, e tali sono le parti delle frazioni, che risultano dal dividere una frazione semplice, e nascono dalla divisione di qualche parte di unità in più altre parti minori. Se fosse data questa frazione $\frac{2}{3}$, perchè da essa si prendessero $\frac{3}{4}$. In questo esempio si avrebbe quella specie di frazione, che è chiamata frazione di frazione, e queste sono le differenti maniere, secondo le quali possono considerarsi le frazioni. Sopra tutto si avverte, che non sempre le frazioni si trovano, quando

do

do le operazioni ſi fanno nella quantità diſcreta, eſpreſſa con cifre, ma naſcono altresì, quando l' operazione ſi intrapren-da colle lettere dell' Alfabeto, e nell' uno, e nell' altro modo, che ſi faccia la frazione, arriva queſta a farci ſempre cono-ſcere, per qual mezzo ſia rimaſta impiccolita una qualunque quantità, ſcoprendoſi ciò nel denominatore della nota fra-zione, che è ſempre una quantità intera, non mai mancante di parte alcuna. Si avverte di più, che nello ſcrivere, tanto la frazione eſpreſſa con cifre, che l' altra eſpreſſa con lettere, la maniera ordinaria è quella, di cui già abbiamo parlato, cioè di porre i termini della frazione, uno ſotto l' altro, con una li-nea a traverſo fra di loro, ſcrivendoſi $\frac{15}{35}$, $\frac{a}{b}$, $\frac{5}{13}$, $\frac{af}{bc}$, $\frac{m}{1}$, $\frac{5}{7}bb$, e ſi rifletta all' ultimo di queſti eſempj, che eſprime cin-que ſettime parti della quantità chiamata *bb*, mentre che una quantità eſpreſſa con lettere, non può dividerſi come un al-tra eſpreſſa con cifre, e però ſi notano tali quali ſi veggono le lettere eſprimenti la quantità, ſolo con porre al loro lato ſiniſtro il numero delle parti, che ha da comporre di eſſe la fra-zione.

VII. Sebbene però queſto ſia il metodo ordinario di ſcri-vere le frazioni, ſi trovano preſſo alcuni ſcrittori uſate altre maniere, che quì ſi riportano per la loro intelligenza, in ca-ſo, che ſi trovaſſero mai nel riſcontro di qualche operazione neceſſaria per qualche motivo alla noſtra intelligenza. Que-ſte differenze nel metodo di ſcrivere le frazioni, ſono le ſe-guenti a^{-1}, ba^{-1}, ba^{-2}, a^{+2}, b^3a^{-5}, b^{-2}, e dove queſte ſi trovano, ſignificano, o la diviſione, o la multiplicazione di una frazione, ovvero quale nelle frazioni ſia il numeratore, e quale il denominatore. Vuol dire il primo eſempio l' unità di-viſa per *a*, che per la via ordinaria ſi manifeſterebbe con ſcri-vere $\frac{1}{a}$. Vuol dire il ſecondo eſempio la quantità *b*, diviſa per la quantità *a*, e la forma ſolita per queſta eſpreſſione ſarebbe $\frac{b}{a}$. Vuol dire il terzo eſempio una frazione multiplicata per un altra, e queſte frazioni multiplicate fra loro, ſe foſſero ſcritte, ſecondo il conſueto, ſi vedrebbero tali $\frac{1}{a} \times \frac{b}{a} = \frac{b}{aa}$. Vuol di-re il quarto eſempio a^{+2} una quantità, cioè $\underline{aa}$, che deve con-ſiderarſi come numeratore di una frazione, e la ſua con-

traria, che si vede nel sesto esempio b^{-2}. Vol dire una quantità espressa così *bb*, che deve considerarsi come un denominatore; però quanto si vede nel quinto esempio rileva tutte le parti di una frazione, cioè il numeratore, e il denominatore: essendo il numeratore b^3, e il denominatore a^5, da scriversi in questa guisa $\frac{b^3}{a^5}$; onde generalmente si osserva, che il segno † si adopra in questa maniera straordinaria di scrivere le frazioni, per dichiarare qual parte di una frazione, così preparata, sia il numeratore, come serve il segno contrario — a manifestare, quale nella stessa frazione sia la parte, che deve considerarsi, come denominatore della frazione. L' uso di scrivere le frazioni decimali è tale. Si scrive l' intera frazione senza il denominatore, solo che all'ultima cifra del numeratore si pone uno di questi segni I. II. III. IV. V. VI. &c. secondo che la frazione lo richiede.

Si può dunque trovare la frazione decimale in questo modo espressa $7 \cdot 56043^{\text{v}}$, oppure espressa così $0 \cdot 34567^{\text{vi}}$ nella prima espressione si vuol dire, che il numero dato contiene sette interi, e che poi tutte l'altre parti sono 56 mila 43 milionesimi, e la seconda maniera di scrivere esprime, che mancano gli interi, e soli si trovano 34 mila 567 milionesimi. Ecco dunque quale è il significato di quelle note, che si pongono sopra l' ultima figura della frazione decimale, e questo segno I., dove si trova vuol dire 10, dove è quest' altro II. vuol dire 100, dove si vede questo III. vuol significare 1000, come significa 10000 questa nota IV., e 100000 quest' altra V., è un milione questa VI., e così dell' altre, e si supplisce in tal modo al difetto dei denominatori nella frazione decimale.

VIII. Le note medesime servono per contrassegni delle frazioni sessagesimali, solo che si può avvertire una differenza fra queste, e quelle, che consiste nel modo di notare quelle cifre, colle quali hanno da essere congiunte, perchè dove ogni cifra di frazione decimale deve avere sopra di se la sua nota, o espressa, o tacita, non ogni cifra delle frazioni sessagesimali richiede di avere sopra di se qualcuna di queste note, potendosi benissimo queste note distribuire fra due, e due cifre della frazione, come in questo esempio si vede, in cui il primo numero esprime la quantità intera, e tutti gli altri mostrano

no le frazioni ſeſsageſimali $35.^{\circ}\ 58.^{I}\ 36^{II}\ 59^{III}\ 24.^{IV}$ &c. e ſe l' intera mancaſse ſi ſcriverebbe $0 \cdot 58.^{I}\ 36^{II}$ &c. Li ſpartimenti però delle frazioni ſeſsageſimali non poſsono comprendere più di due cifre, e anche queſte due cifre hanno da rilevare meno di 60, perchè ſe foſsero 60 appunto, o più di 60 conterrebbero o un intero, ſe foſse la frazione notata col ſegno I., o una parte intera della frazione precedente, ſe le eſponente della medeſima foſse qualunque altra delle note ſeguenti II. III. IV. VII. &c.

IX. Quanto fin quì abbiamo avvertito non ſerve generalmente, che per renderci famigliari le maniere di eſprimere le frazioni, e per informarci delle diverſità loro, ſecondo le differenti ſpecie, nelle quali poſsono conſiderarſi. Quello, che è più importante, deve ora manifeſtarſi coll' aggiugnere alcune regole neceſsariſſime da ben ſaperſi, prima di impegnarſi in qualſiſia di quelle operazioni, che riſguardano le maniere tutte di ingrandire, e di impiccolire le frazioni, oſservando ſu queſto particolare quanto ſi può avvertire, e nel dovere operare con cifre, e nel dovere operare con lettere. Otto ſono le regole, che ſi hanno da preſupporre a qualunque operazione ſu rotti, e di queſte ſcegliamo per prima quella, che da il modo di trovare un denominatore commune a molte frazioni, che poſsono eſsere date con denominatore diverſo. La regola può conſiderare quel modo, che ſi deve tenere per ottenere quanto ſi dimanda, o ſopra due ſole frazioni, o ſopra molte più. L' operazione per il primo modo è tale. Si multiplica il numeratore della prima frazione per il denominatore della ſeconda, e ciò, che riſulta da queſta multiplicazione ſi pone al lato della prima frazione. Poi ſi multiplica il numeratore della ſeconda per il denominatore della prima, e il riſultato deve notarſi appreſso alla ſeconda frazione. Finalmente ſi multiplicano i denominatori fra loro, e nel prodotto da queſta multiplicazione ſi ha il denominatore commune alle due frazioni.

Eſempio I.

$$\frac{63}{117} \quad \frac{7}{13} \cdots \frac{8}{9} \quad \frac{104}{117}$$

117 *denominatore commune* 117

Eſempio II.

$$\frac{21}{35} \quad \frac{3}{5} \cdots \frac{4}{7} \quad \frac{20}{35}$$

35 *denominatore commune* 35

Il mo-

Il modo da tenerſi nel caſo di più frazioni è il ſeguente. Si multiplicano primieramente tutti i denominatori delle frazioni date uno per l'altro, e queſto prodotto ſi guarda, come denominatore commune. Per trovare il numeratore a ciaſcheduna frazione ſi multiplica il denominatore trovato per ciaſcun numeratore delle frazioni date, e ciaſcuno dei riſultati ſi parte per il denominatore di ogni frazione, ed ogni quantità, che naſce ſerve per numeratore delle frazioni così ridotte ad avere il denominatore commune. Eſſendo dunque date queſte frazioni $\frac{5}{7}\ \frac{3}{5}\ \frac{4}{9}$ ecco in queſto eſempio la pratica della riduzione.

35 — 315. *denominatore commune*.

I.	II.
denom. comm. 315 *multipl. per* 5	*denom. comm.* 315 *multipl. per* 3
riſul. primo-- 1575 *diviſo per* 7	*riſul. ſecondo* - 945 *diviſo per* 5
quoz. primo-- 225 *primo numeratore*	*quoz. ſecondo* - 189 *ſecondo numer.*

III.	*diviſione intera.*
denom. comm. 315 *multipl. per* 4	
riſult. terzo--1260 *diviſo per* 9	$\frac{225}{315} : \frac{189}{315} : \frac{140}{315}$
quoz. terzo -- 140 *numerat. terzo*	

La bontà dell'operazione appariſce a baſtanza dal vedere, che le nuove frazioni prodotte, corriſpondono tutte, e ciaſcheduna a ciaſcuna delle date frazioni, perchè ſiccome il 5 manca di due quinti per arrivare al 7, così il 225 manca di due quinti, cioè di 90 per uguagliare 315, e quel difetto, che ſi vede nelle altre due per giugnere a formare i loro denominatori, ſi oſſerva medeſimamente nelle corriſpondenti, ridotte ſotto lo ſteſſo denominatore, ed è di due terzi nella ſeconda, e di cinque quarti, o un intero, e un quarto nell'ultima; onde queſta regola ſarà quella pure, a cui ricorreremo per vedere quale delle date frazioni ſia la maggiore, e quale la minore, quando aveſſero denominatore differente le date frazioni. A queſta maniera di operare è conforme quella, per cui le frazioni eſpreſſe con lettere, ſe hanno denominatori diverſi, ſi riducono ad averli i medeſimi, multiplicandoſi anche in congiuntura di queſto caſo i termini, che fanno figura di numeratori per gli altri, che tengono il luogo dei denominatori fra loro: così dovendoſi applicare una tal regola a que-

ſte

ste due frazioni $\frac{a}{b}$ $\frac{c}{d}$ si troverà, che $\frac{ad}{bd}$, $\frac{bc}{bd}$ saranno le frazioni ridotte alla medesima denominazione.

Quello, che si fa in occorrenza di doverne ridurre due, si opera ancorchè fossero più di due, avvertendo solo di legare i denominatori a due a due per multiplicare con essi i numeratori. Onde se fossero date queste frazioni $\frac{e}{f}$ $\frac{g}{h}$ $\frac{i}{l}$, perchè con esse si facesse vedere l' esempio di operare in un tal caso, multiplicati insieme i due denominatori hl per il loro prodotto si multiplicherebbe il primo numeratore, e risulterebbe ehl. Poi si multiplicherebbero fra loro gli altri due denominatori lf, e col loro risultato si multiplicherebbe il secondo numeratore g, e si produrrebbe gfl. Finalmente multiplicati fra loro i denominatori fh col loro risultato fatta la multiplicazione dell' ultimo numeratore i nascerebbe fhi, e si sarebbero preparati tutti i numeratori per le tre nuove frazioni, alle quali si darebbe il denominatore commune fhl nato dalla multiplicazione di tutti i denominatori l' uno per l' altro. Sicchè la riduzione sarebbe compita, e si vedrebbe in queste tre nove frazioni $\frac{ehl}{fhl}$ $\frac{gfl}{fhl}$ $\frac{fhi}{fhl}$ la maniera di ridurre tutte l'altre.

X. Dalla riduzione delle frazioni ad avere la medesima denominazione, si può passare a proporre la regola, che serve per l' ingrandimento delle medesime, potendo una tale operazione servire, come d' una prova alla precedente, per assicurarsi, che non è mutato il valore della frazione, sebbene sia essa cresciuta nella estensione de' proprj termini. Si prende per riuscire in questo affare un numero, e con questo si multiplica tanto il numeratore, quanto il denominatore della frazione data, e risulta in questa multiplicazione l' ingrandimento, che si pretende. Se per il 7 si voglia multiplicare il 6, che è il numeratore di questa frazione $\frac{6}{15}$, e si voglia multiplicare il denominatore 15 si avrà la nuova frazione $\frac{42}{105}$ certamente maggiore sette volte più della prima, però in questo nuovo ingrandimento sempre si manterrà con un nume-

meratore, due volte e mezzo contenuto dal suo denominatore, cioè una volta, e mezzo minore di lui, ancorchè qualunque altro numero sia per prendersi, o più basso, o più alto, che il 7. Similmente la frazione $\frac{bc}{cd}$ esprime l' ingrandimento fatto della frazione $\frac{b}{d}$ per la grandezza c, e pure tuttavia rimane la frazione $\frac{bc}{cd} = \frac{b}{d}$ come apparisce dalla riprova, che se ne può fare colla divisione, mentre, se si divida $\frac{bc}{cd}$ per c resta precisamente $\frac{b}{d}$ nella stessa guisa, che divisi $\frac{42}{105}$ per il 7 rimangono $\frac{6}{15}$. Se mai il termine multipliante della frazione fosse il suo denominatore, si osserva adesso per allora quando questo caso accadesse nelle frazioni espresse con lettere, che servirebbe serbare il puro numeratore, senza notare il denominatore, e si scriverebbe bc per mostrare il risultato della multiplicazione della frazione $\frac{bc}{d}$ per il denominatore d, non meno, che si scriverebbe 7 per esprimere il risultato dalla multiplicazione di $\frac{7}{9}$ per il denominatore 9, a cagione di questa regola generale, che non si muta il valore di un rotto per qualunque multiplicazione, che si possa mai fare.

XI. E' totalmente opposta all' ingrandimento delle frazioni quella operazione, che si intraprende per impiccolirle, quando ciò occorra, l' artificio consiste in trovare un numero, che per l'appunto entri tanto nel numeratore, che nel denominatore della frazione, osservandosi, che sia maggiore della unità, perchè se fosse l'unità, la frazione rimarrebbe la medesima. Si trova il numero per cui si ha da impiccolire la frazione, con partire il denominatore della data frazione per il suo numeratore, e con partire di mano in mano per gli avanzi i primi partitori fino a tanto, che si trovi un quoziente, che divida esattamente, cioè senza avanzo, l' ultimo partitore, e in questo quoziente trovato che sia, si ha quel numero, per cui diviso il numeratore, e denominatore della frazione, si è impiccolita la frazione quanto potevasi. Si impic-

piccolisca dunque $\frac{108}{144}$. Si parte il denominatore 144 per il numeratore 108, e si vede, che il 108 entra una volta nel 144 coll'avenzo 36. Si prende questo avanzo 36, e si parte con esso il primo partitore 108, e si vede, che il 36 nel 108 vi stà tre volte per l'appunto, senza avanzo. Dunque si dice, che il 36 è quel numero, che dovrà impiccolire la frazione data, come in realtà la impiccolisce, se si parte per esso, tanto il numeratore 108, quanto il denominatore 144. Entra il 36 nel numeratore 108 tre volte, entra nel denominatore 144 quattro volte, dunque $\frac{3}{4}$ è la frazione, a cui si è potuta ridurre la data, non essendo possibile il poter trovare un altro numero, che con dividere la data frazione, ci abbia da lasciare una frazione minore di questa. Colla stessa regola si impiccolirà la seguente frazione $\frac{1088}{6592}$, e si ridurrà a quest'altra la più piccola, a cui si possa ridurre $\frac{17}{103}$ trovandosi, che il 64 avanzo della prima divisione, entra appunto 17 volte nel numeratore, e 103 volte nel denominatore.

Impiccolita in questo modo la frazione, non occorre esperimentarsi a volere nuovamente impiccolire la nuova frazione risultata, perchè è cosa affatto impossibile; siccome sarebbe stato impossibile formare la piccola frazione, che si è formata $\frac{17}{103}$, se o nel numeratore, o nel denominatore ci fosse stata una unità di più, cioè fosse stato il numeratore 1089, oppure il denominatore 6592, perchè fatta la divisione sarebbe rimasto uno, e per l'unità non si può impiccolire numero alcuno. Facilissima è la pratica di questa operazione, se l'esempio sia dato in una frazione espressa per lettere, servendo in questa levare le lettere corrispondenti nel numeratore, e denominatore, per dover vedere in quelle che rimangono la frazione ridotta ad una espressione minore; $\frac{a}{bn}$ è l'espressione più piccola, a cui si è potuta ridurre la frazione $\frac{acm}{bcmn}$, e quest' altra frazione $\frac{4ad}{3}$, ovvero $\frac{3c}{4ad}$, sono l'espressioni minori della frazione $\frac{48a^3b^5dc}{36aab^5c}$, oppure della frazione $\frac{48aab^5c^3}{64a^3b^5ccd}$. Questa maniera di operare nella riduzione delle frazioni alla minore espressione, qualche poco si varia, se l'operazione si ab-

abbia da fare ſopra quelle frazioni, che già ſono ſtate ridotte alla medeſima denominazione, e queſta varietà ſuccede affine di laſciare le frazioni collo ſteſſo denominatore, che però ſe ſia data la frazione $\frac{npop}{ddoop}$, e la frazione $\frac{do^5}{ddoop}$ ſi leverà e dall' una, e dall' altra frazione quella lettera ſola, che ſi trova tanto nel numeratore, quanto nel denominatore commune, e perchè queſta lettera è la lettera *o*, perciò levata queſta, rimarranno le frazioni $\frac{npp}{ddop}$ $\frac{d^5}{ddop}$ ridotte alla minore eſpreſſione.

Una oſſervazione è da farſi per ſcemare le frazioni compoſte, quali ſono $\frac{ppq + ppx}{cq + cx}$, $\frac{ppq - ppx}{qx - xx}$, $\frac{ppq + pqx}{pp - xx}$, ed è di trovare il diviſore commune tanto al numeratore, che al denominatore prima di ſcemare tali frazioni. Si trova queſto diviſore con dividere il numeratore, e il denominatore per ciaſcheduna delle ſue lettere, nel primo eſempio, dividendo il numeratore per p, e l' avanzo $pq + px$, di nuovo dividendolo per la commune lettera p, tanto che rimaſto $q + x$, che corriſponde al diviſore $q + x$, che nella ſteſſa maniera ſi trova per il denominatore, per queſto ſi divida l' intera prima frazione, e rimanga $\frac{pp}{c}$ per l' eſpreſſione minore, ſimile all' altra della ſeconda frazione, come rimane nella terza queſta frazione $\frac{pq}{p-x}$ per la più breve eſpreſſione.

XII. Un altra riduzione di frazioni ad una ſemplice frazione è quella, che ſi coſtuma, quando l' operazione ſi fa ſopra le frazioni di frazioni, e la regola che ſi tiene è tale: ſi hanno da multiplicare i numeratori fra loro, e i denominatori fra loro; nella frazione che da queſta riduzione riſulta, ſi conoſce ſubito il valore giuſto delle date frazioni, cioè a dire quante parti eſſa contenga della unità, e ſi è ridotta la frazione di frazione ad una frazione d' intero. $\frac{6}{12}$ ſono conſiderati come frazione d' intero, cioè come la metà di un intero, e a queſto ſteſſo valore ſi riducono queſte due frazioni $\frac{2}{3}$ di $\frac{3}{4}$ fatta l' operazione ſecondo la regola data. Egli è vero, che ogni intero ſi divide in quattro parti, ed è altresì vero, che

ogni

ogni quarto può essere diviso in tre terzi; dunque lo stesso è dire due terzi di tre quarti, che dire due terzi di dodici terzi, e perchè due terzi sono la sesta parte di dodici, però si vede benissimo che $\frac{2}{3}$ di $\frac{3}{4}$ equivale a $\frac{6}{12}$, cioè alla metà di uno intero. Si supponga ora, che le frazioni date abbiano una serie maggiore, e si vedrà risultare un prodotto corrispondente ad un altra determinata porzione di un intero. Sono queste le frazioni date $\frac{1}{2}$ di $\frac{2}{3}$ e di $\frac{3}{4}$ la riduzione loro è tale $\frac{6}{24}$, e perchè $\frac{6}{24}$ è $\frac{1}{4}$ di intero, il valore di tutte le date frazioni esprime per l'appunto la porzione di un quarto d'intero, nè può esser di meno, mentre se già abbiamo veduto $\frac{2}{3}$ di $\frac{3}{4}$ = a $\frac{6}{12}$, la metà che si prende di $\frac{2}{3}$ di $\frac{3}{4}$ deve essere per necessità uguale a $\frac{3}{12}$, o a $\frac{6}{24}$, ovvero ad $\frac{1}{4}$ d'intero. Si opera nello stesso modo se il caso sia proposto in lettere, e si dice, che $\frac{de}{fg}$ è il valore di questa frazione di frazione $\frac{d}{f}$ di $\frac{e}{g}$.

XIII. Quel metodo, che si è tenuto per conoscere il valore di una frazione di frazione, si può tenere per conoscere il valore di qualunque frazione desiderandosi di sapere individualmente il numero delle parti dell' intero, che essa contiene. Se uno proponga questa frazione $\frac{5}{9}$, intendo certo subito, che questa frazione esprime l'avanzo prodotto dalla divisione di un numero intero per 9: ma poi, se vuole determinare il numero giusto delle sue parti, cioè a che cosa equivalgono questi $\frac{5}{9}$ non lo può fare senza servirsi della regola, che per un tale effetto opportunamente si aggiungne. Bisogna in primo luogo stabilire la qualità di quel numero, che diviso per 9 lasciò la predetta frazione, vale a dire, se era un numero, che rappresentasse scudi, rappresentasse esapede, o qualunque altra misura. Fissata in tal guisa la specie della data quantità, di cui è rimasta la frazione, si risolve questa nelle sue prime parti, e frazioni in tal modo, se sono scudi si risolvono nelle parti delle loro specie; doppo ciò si multiplica il numeratore della frazione per la specie delle parti nelle quali si è risoluto l'intero, ed il prodotto si divide per il denominatore della frazione, e il quoziente se viene senza avanzo lascia il valore, che si cerca nella frazione, onde se si suppone, ehe $\frac{5}{7}$ siano una frazione di scudo, perchè nello scudo vi sono 7 lire. si multiplica il numeratore della frazione

 per

per 7, e il 35, che risulta si parte per il denominatore 9, e dà per quoziente il 3, che significa contenere $\frac{5}{9}$, di scudo lire 3; ma perchè molte volte accade quello, che appunto accade in questa frazione, cioè, che il 3 primo quoziente trovato lascia un avanzo, che contiene $\frac{8}{9}$ di lira, per tanto in questo caso, e in qualunque altro simile, che potesse accadere il numeratore della nuova frazione, si ha da multiplicare per 20 numero de i soldi, che appartengono alla lira, e il risultato 160 si ha da partire per 9, acciocchè nel secondo quoziente 17; si abbia la seconda parte, a cui si estende il valore della data frazione; ma comecchè anche questo quoziente risulta con lasciare per avanzo $\frac{7}{9}$ di soldo, si ha da ripigliare nuovamente l' operazione con multiplicare questo ultimo numeratore 7 per 12 numero dei danari, che competono al soldo, e il prodotto 84 partito per 9, darà il terzo, e ultimo quoziente $9 \dagger 3 = \frac{1}{3}$ cioè darà quelle ultime parti, alle quali si ha da estendere tutto l' intero valore della data frazione, sicchè compita l' operazione secondo la regola, si vede, che $\frac{5}{9}$ di scudo equivagliono a lire 3 soldi 17 denari $9 \dagger \frac{1}{3}$ di denaro, che per essere parte minore è poco da considerarsi. Eccone quì appresso proposto nella misura delle esapede un nuovo esempio, in cui si dimanda a qual porzione di esapede equivagliano $\frac{7}{13}$.

Operazione I.

$$\frac{7}{13} \times 6 \text{ piedi} = 42 : 13 \quad \text{Quoziente } 3 \dagger \frac{3}{13}$$

Operazione II.

$$\text{avanzo } \frac{3}{13} \times 12 \text{ pollici} = 36 : 13 \quad \text{Quoziente } 2 \dagger \frac{10}{13}$$

Operazione III.

$$\text{avanzo } \frac{10}{13} \times 12 \text{ linee} = 120 : 13 \quad \text{Quoziente } 9 \dagger \frac{3}{13}$$

Ecco il quoziente, che letto insieme esprime la misura del valore della frazione, su cui si è operato.

Piedi	*Pollici*	*Linee*
3	2	$9 \dagger \frac{3}{13}$ *di linee*

XIV.

XIV. In tutte le precedenti regole si è sempre operato con sole frazioni: queste che ora si aggiungono per compimento di questa materia comprendono quantità intere, e frazioni, potendo occorrere qualche volta di dover praticare una qualche riduzione anche sopra di esse. Nella prima di queste regole si vuol ridurre l' intera quantità ad una frazione. Nella seconda si vole dalla frazione levare la quantità, che sia intera. Nell'ultima si prescrive come una quantità in tera accompagnata da una frazione, possa ridursi alla denominazione di questa frazione. Per rapporto alla prima regola si dice, che si riduce la quantità intera alla frazione, prendendo qualsivoglia denominatore, e multiplicandosi per questo la intera quantità, è in tal modo multiplicandosi il 18 quantità intera data per 8, preso come denominatore, il 144 che risulta, deve essere il numeratore della prodotta frazione $\frac{144}{8}$.

Nella stessa maniera l' intera quantità ab si può ridurre alla frazione, che abbia per denominatore d, multiplicando $ab \times d$, e scrivendo il risultato all' uso di frazione $\frac{abd}{d}$, come ancora questa quantità $d + r$, si ridurrà ad una frazione, se multiplicata per il denominatore, che si prende f si farà $\frac{fd + fr}{f}$, e così qualunque altra. Quanto si stabilisce nella seconda regola, come ognuno conosce, suppone una frazione, che impropriamente è tale, non essendo mai possibile, che la frazione abbia da avere il denominatore, che sia una quantità minore del numeratore. Tuttavia, perchè tal volta in una qualche operazione può accadere questo caso, a questo effetto quì si avverte il modo di ridurre la frazione all' intero, che consiste nel partire il numeratore per il denominatore: così se la frazione $\frac{144}{8}$, si dovesse ridurre all' intero, partendo il 144 per l' 8, nel risultato 18, si vedrebbe sodisfatto alla richiesta. Può servire questa regola di prova alla prima, se per questa ritorna l' intero, che si era mutato in una frazione. Ha luogo la prima regola, non solo quando l' intera quantità è una sola, ma ancora quando sono molte, osservandosi solo in questo caso di prima sommarle tutte avanti di fare alcuna multiplicazione per il supposto denominatore. Quello, che nell' ultima

tima regola ſi ha da ſtabilire equivale a ciò, che ſi è inſegnato nella prima di queſte tre, non vi eſsendo altra differenza, ſe non che doppo multiplicata l'intera quantità per il denominatore della frazione aggiunta, ſi deve al riſultato aggiugnere il numeratore di detta frazione, però ſia dato 15 $\frac{4}{5}$, perchè ſi riduca in una ſola frazione, multiplicato il 15 per il 5, al prodotto 75, baſterà aggiugnere il 4 numeratore, che nel riſultato 79 ſi avrà il numeratore della nuova frazione a cui ſervirà di denominatore il medeſimo 5, e ſi ſcriverà $\frac{79}{5}$, per la riduzione dell'intero, e rotto ad una frazione, che ha il 5 medeſimo per ſuo denominatore. Ed eccoci arrivati al termine, a cui ſi voleva arrivare per facilitare qualunque delle operazioni, alle quali ora ci applicheremo, per dimoſtrare la maniera d'ingrandire, e d'impicciolire qualunque data frazione.

C A P. II.

Dell' ingrandimento della quantità diſcreta fatto colle Frazioni.

I. NOn ſi ha da variare quell'ordine, con cui fino dal bel principio ſi cominciò a diſcorrere della quantità diſcreta; onde ſe l'ingrandimento di una tale quantità ci applicò alle operazioni, che a quel luogo ſi addusſero, anche di preſente diſcorreremo del modo d'ingrandire la medeſima quantità conſiderata come frazione, o come derivata dalle frazioni, che non ſono altro, come già abbiamo detto, che parti, o minuzie della ſteſsa diſcreta quantità. Il ſommare, ed il multiplicare promove queſto ingrandimento; onde dell'una, e dell'altra operazione in queſto capitolo ci ſerviremo, unendo inſieme ambedue quei modi, coi quali ſiamo ſoliti ad eſprimere le frazioni, cioè con cifre, e con lettere. Cominciando ad operare l'ingrandimento delle frazioni, eſpreſſe con cifre, proponghiamo tutti quei caſi, che poſſono accadere. Due ſono queſti caſi. O ſi tratta di dovere operare con ſole frazioni, o occorre di dover operare con frazioni inſieme, e con intere grandezze.

Se ſono ſole frazioni quelle, ſulle quali ſi ha da operare, di nuovo poſſono intervenire due caſi, perchè o i denominatori

tori loro sono li stessi, o i denominatori loro sono differenti. Se poi sono insieme frazioni, ed intere quantità, anche a due casi ci obbligheranno le loro combinazioni, cioè di dovere con intere quantità, e frazioni operare sopra frazioni, e intere quantità, o sole intere quantità opereranno sopra intere quantità, e frazioni; dunque di tutti questi casi ci occorrerà presentemente discorrere.

II. Facendosi per tanto dal primo per dovere operare con sole frazioni, vogliamo, che queste sieno tali, che abbiano li medesimi denominatori, e non si fa altro per ingrandirle col mezzo dell'addizione, se non che raccogliere insieme tutti i numeratori loro per formarne un solo, con dare ad esso il denominatore, che già era commune a tutte. Sono le frazioni date $\frac{5}{7}$ $\frac{2}{7}$ $\frac{3}{7}$ $\frac{6}{7}$ &c. di tutte queste se ne farà una sola, dopo che raccolti tutti i numeratori, si scriverà $\frac{16}{7}$. Ma perchè $\frac{16}{7}$ non sono che una spuria frazione, però si ridurrà al suo giusto valore l'ingrandimento, che è fatto, colla regola della riduzione della frazione all'intero, e leggendosi due interi, e due settimi, si avrà quello, che è il vero risultato di questa prima operazione.

III. Si suppongano ora i denominatori delle frazioni differenti; per bene operare in questo caso, vi è precisa necessità di ridurre tutte le frazioni date sotto il medesimo denominatore, dopo di che coll'operazione precedente si potrà venire in chiaro del vero risultato dalla addizione delle date frazioni, come si riscontra nel seguente esempio.

$\frac{5}{7}$ $\frac{12}{13}$ $\frac{6}{17}$ $\frac{4}{5}$

91
637
1547

5 X 7735 *Denominatore commune*
7: 38675 *Risultato del denominatore multiplicato per* 5
5525 *Quoziente nato dalla divisione per* 7, *e I. numerat.*

12 X 7735
15470
13: 92820 *Risultato del denominatore multiplicato per* 12
7140 *Quoz nato dalla divisione per* 13, *e II. numeratore*

6 X 7735
17: 46410 *Risultato del denominatore multiplicato per* 6
2730 *Quoz. nato dalla divisione per* 17, *e III. numeratore*

4 X

4 X 7735

5 : 30940 *Risultato del denominatore multiplicato per* 4

6188 *Quoz. nato dalla divisione per* 5 , *e IV. numeratore*

5525

7140

2730

6188

21583 *somma dei numeratori*

$\frac{21583}{7735}$ *nuova frazione* $= 2\frac{6113}{7735}$

IV. Se poi le frazioni date fossero tali, che in alcune di loro si trovassero li stessi denominatori, ed in altre diversi, prima si unirebbero insieme tutte quelle frazioni, che avessero li denominatori uguali, e successivamente si procederebbe secondo che si è praticato nell'antecedente esempio: per tanto se sono queste le frazioni $\frac{3}{5}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{9}$ $\frac{2}{9}$, come si vede, sono sei frazioni, ma perchè i denominatori in alcune di esse sono ripetuti, si riducono a tre, dopo che si sono uniti in una sola frazione i numeratori, che hanno lo stesso denominatore, e però le frazioni, sopra le quali si dovrà proseguire l'operazione nel modo predetto, rimarranno $\frac{4}{5}$ $\frac{5}{4}$ $\frac{7}{9}$ uguali a $2\frac{59}{180}$ prodotto di un ingrandimento fatto nella quantità col mezzo della addizione di sole frazioni.

V. Se colle frazioni si trovassero congiunte le intere quantità, ciò che appartiene al secondo caso proposto, riuscirebbe poco diversa l'operazione dalla precedente; perchè solo occorrerebbe di aggiugnere al risultato dell'addizione delle frazioni le quantità intere rimaste, e con questo si sarebbe sodisfatto al dovere. Si hanno da sommare $10\frac{3}{5}$ con $12\frac{5}{7}$, fatta la somma di $\frac{3}{5}$ con $\frac{5}{7}$, che risulta un intero, e $\frac{11}{35}$, a questo prodotto si aggiugnerà il 10 † 12, quantità intera, e si avranno 23 interi con più $\frac{11}{35}$ per il proprio ingrandimento di questa quantità, e si osserva la cosa stessa, se in una sola delle quantità date si trovasse la frazione accompagnata dall'intera, essendo $22\frac{3}{5}$ adequata somma delle due date 12, † $10\frac{3}{5}$.

VI. Segue l'ingrandimento della quantità, fatto per l'addizione, l'altro, che si fa ordinariamente per mezzo della multiplicazione, multiplicandosi cioè i numeratori fra loro, e i denominatori fra loro per far nascere una frazione dalle date differente tanto nel numeratore, quanto nel denominatore.

L'in-

L' ingrandimento della quantità con questa operazione si vede dal risultato delle multiplicazioni, quando l' intere quantità multiplicano le minuzie accompagnate con l' intera quantità, e quando le quantità intere, e le minuzie sono multiplicate per altre quantità intere, insieme date colle minuzie. Ecco gli esempj per tutti due questi casi. Sono dati da multiplicarsi $10\frac{3}{5}$ per 6 interi; oppure 10 braccia, e $\frac{3}{5}$ per 12 braccia, e $\frac{5}{7}$. Il risultato della prima multiplicazione si trova $63\frac{3}{5}$, come il risultato della seconda si ha $134\frac{27}{35}$. Il modo di ritrovare questi prodotti è tale; prima si multiplica nel primo esempio la frazione per l'intero multiplicante, riducendosi così questo intero alla denominazione della frazione, in secondo luogo si prende il vero valore del risultato, finalmente per l'intero multiplicante si multiplica l'intera quantità data insieme colla frazione, e questo risultato aggiunto al primo, lascia il prodotto, che si è assegnato al primo esempio. Se il risultato si ha da trovare per il secondo esempio, ciascuna delle quantità date, deve ridursi alla frazione di quella denominazione, che nell'una, e nell'altra si vede; secondariamente i nuovi numeratori si hanno da multiplicare fra loro, e fra loro si hanno da multiplicare i denominatori, e per ultimo il prodotto della multiplicazione de i numeratori deve partirsi per il prodotto della multiplicazione de i denominatori, e nel quoziente apparisce il risultato, stabilito nel secondo esempio già dato. Quì sotto si vede come da ciascheduna di queste regole date nasce veramente il numero, che si è assegnato, come proprio a qualunque esempio.

Esempio I.

10 † $\frac{3}{5}$ X 6

$\frac{3}{5}$ X 6 = $\frac{18}{5}$ = 3 $\frac{3}{5}$

10 X 6 = ... 60

somma —— 63 † $\frac{3}{5}$

Esempio II.

10 † $\frac{3}{5}$ X 12 † $\frac{5}{7}$

10 † $\frac{3}{5}$ = $\frac{53}{5}$ 12 † $\frac{5}{7}$ = $\frac{89}{7}$

$\frac{53 \times 89}{5 \times 7} = \frac{4717}{35} = 134\frac{27}{35}$

VII. Sebbene la multiplicazione assegnata a questa regola ingrandisca la quantità intera, accompagnata dalla frazione, non si può però prendere su ciò un sistema universale, per cui sia sempre lecito affermare, che qualche volta per la multiplicazione si impiccolisca la data quantità da multiplicarsi, o questa sia

T in-

intera, e si abbia da multiplicare per una minuzia, o sia minuzia accompagnata da una intera, da multiplicarsi per una minuzia di quantità, o sia finalmente una frazione, che dovesse essere multiplicata per un altra frazione. Si avrebbe ciascuno di questi casi, se fosse dato da multiplicarsi il 10 per $\frac{3}{4}$ ovvero il $10 \dagger \frac{3}{5} \times \frac{5}{7}$ oppure $\frac{3}{5} \times \frac{5}{7}$ essendo il prodotto del primo dato $7 \dagger \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, essendo il risultato del secondo $\frac{265}{35} = 7 \dagger \frac{20}{35} = \frac{4}{7}$, essendo finalmente quello, che nasce dalla multiplicazione dell' ultimo dato $\frac{15}{35} = \frac{3}{7}$, e non può seguire altrimenti, perchè, se bene si osserva questa operazione, non si multiplica mai una frazione per l' altra, senza che nel tempo stesso si faccia la divisione del loro risultato, per il risultato dalla multiplicazione de i denominatori; ma dovendo essere il divisore sempre maggiore del multiplicante, deve ancora risultare dalla multiplicazione di tale frazione un prodotto minore della data frazione. Nel primo esempio il multiplicante è 3, il divisore è 4, nel secondo esempio il multiplicante è 5, il divisore è 7, nell' ultimo esempio il multiplicante è 3, il divisore è 4, si vede dunque, che quanto risulta da queste multiplicazioni non può a meno di non riuscire una quantità più piccola di quella, che fu presa, perchè rimanesse multiplicata. Accaderebbe l' effetto medesimo, quando pure le frazioni date avessero il denominatore medesimo, come se si dovessero multiplicare $\frac{4}{5}$ per $\frac{3}{5}$, vedendosi nel risultato $\frac{12}{25}$, una frazione minore di quella, che è stata multiplicata.

VIII. Ripigliando ora le stesse operazioni sopra le quantità di questa fatta, quando sono manifestate con lettere, si dimostra con quale via facile possono tutte compirsi, tanto per l'addizione, quanto per la multiplicazione, seguitando i medesimi casi. Si aggiungono insieme frazioni espresse con lettere, quando hanno il denominatore medesimo, con raccogliere insieme i numeratori, e porre sotto di essi uno de i denominatori communi, oppure, se i denominatori fossero diversi, con ridurre prima le frazioni alla medesima denominazione, e poi con operare come quando i denominatori sono li stessi. In caso poi, che alle frazioni fossero congiunte le intere quantità, si sommerebbero insieme prima le quantità intere, e poi si aggiugnerebbe la somma delle frazioni, se non si volessero prima ridurre le intere quantità a frazioni della

me-

medesima denominazione, e poi così ridotte sommarle insieme; gli esempj per tutti questi casi sono i seguenti.

Esempj per l' Addizione,

$\frac{a}{b}\quad\frac{c}{b}$	$\frac{ab}{d}\quad\frac{er}{g}$	$ab + \frac{cd}{e}\quad fg + \frac{b}{m}$	$ab + \frac{cd}{e}\quad fg - \frac{b}{m}$
$\frac{a+c}{b}$	$\frac{abg+der}{dg}$	$ab + fg + \frac{cdm+eb}{em}$	$ab + fg + \frac{cdm-eb}{em}$
riduz. del III. esemp.		$\frac{abe+cd}{e}\quad\frac{fgm+b}{m}$	$\frac{abe+cd}{e}\quad\frac{fgm-b}{m}$
somme		$\frac{abem+cdm+efgm+eb}{em}$	$\frac{abem+cdm+efgm-eb}{em}$

IX. Anche colla multiplicazione riesce facile l' operare sulle frazioni, e sopra ciascheduno de i loro casi, praticando in far ciò le stesse maniere, che si adoprano per la multiplicazione ordinaria, tanto sopra i numeratori, quanto sopra i denominatori, ridotte pure anche in questa occasione [se fossero unite quantità intere a frazioni] le intere quantità a frazioni, o divisi, se è possibile secondo le regole della divisione, i numeratori per le parti corrispondenti ne i loro denominatori. Si può notare una particolarità su questa multiplicazione per quando si vuol multiplicare una frazione per una quantità, e consiste in avvertire, che è fatta questa operazione, se alla destra della frazione al pari della linea, che sta fra mezzo al numeratore, e denominatore, si scriva l'intera quantità multiplicante. Si aggiungono gli esempj di questa regola, e sono i seguenti.

Esempio I.

$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$	$\frac{a-b}{c} \times \frac{d+e}{g}$	$\frac{a+c}{m} \times \frac{d+e}{n}$
$\frac{ac}{bd}$	$\frac{ad-bd+ae-be}{cg}$	$\frac{ad+dc+ae+ec}{mn}$

Esempio II.

$\frac{b - a \dagger c}{no} \times n$	$\frac{b \dagger a - c}{o} \times n$	$\frac{b - a - c}{no} \times n$
$\frac{bn - an \dagger cn}{no}$	$\frac{b \dagger a - c}{o} n$	$\frac{b - a - c}{o} n$

Esempio III.

$$\overline{a \dagger \frac{bc}{de}} \times \overline{f \dagger \frac{gb}{i}} \qquad \overline{a \dagger \frac{bc}{de}} \times \overline{f \dagger \frac{gb}{i}}$$

Prima multiplicazione fatta colla riduzione	Seconda multiplicazione fatta senza riduzione.
$\frac{ade \dagger bc}{de} \times \frac{fi \dagger gb}{i}$	$a \times f = af$ $\frac{bc}{de} \times f = \frac{bcf}{de}$
$adefi \dagger bcfi$ $\dagger aedgb \dagger bcgb$	$\frac{bc}{de} \times \frac{gb}{i} = \frac{bcgb}{dei}$
$\overline{adefi \dagger bcfi \dagger aedgb \dagger bcgb}$	$a \times \frac{gb}{i} = \frac{agb}{i}$
dei $= af \dagger \frac{bcf}{de} \dagger \frac{agb}{i} \dagger \frac{bcgb}{dei}$	somm. $af \dagger \frac{bcf}{de} \dagger \frac{agb}{i} \dagger \frac{bcgb}{dei}$

Esempio IV.

$-\frac{3}{5} b \dagger x \times d - 6r$	$\frac{2}{5} \times \frac{b^4 f \dagger b^5}{5f4} \times \frac{b^4 f \dagger b^5}{f5}$
$-\frac{3}{5} bd \dagger dx$ $\dagger \frac{18br - 6rx}{5}$	$\frac{2b^4 f \dagger 2b^5}{25f^4} \times \frac{b^4 f \dagger b^5}{f5}$
$-\frac{3}{5} bd \dagger dx \dagger \frac{18br - 6rx}{5}$	$2b^8 f^2 \dagger 2b^9 f \dagger b^5$ $\dagger 2b^9 f \dagger 2b^5$
$\frac{1}{4} b \times \frac{ebb}{6d}$ = $\frac{eb^3}{24d}$; $\frac{ebb}{6d} - f \times \frac{1}{4} b$ = $\frac{eb^3}{24bd} - \frac{1}{4} bf$	$\frac{2b^8 f^2 \dagger 4b^9 f \dagger b^{10}}{25f^9}$

X.

X. In tutti questi esempj di multiplicazione rispetto a i loro prodotti si osservi, che questi prodotti sono o grandi, o piccoli in ordine alla frazione multiplicata, secondo, che la frazione multiplicante è grande, o piccola, paragonata all' unità, fatto però il confronto dell' unità, tanto col numeratore della frazione, quanto col suo denominatore, mentre per ciascheduno di questi due termini, come si vede, resta multiplicata la frazione. Se si supporrà dunque, che il numeratore della frazione multiplicante equivaglia alla unità, e che il numeratore della frazione multiplicata equivaglia anch' esso alla unità, tutta la differenza della frazione multiplicata dal suo prodotto dipenderà dalla differenza de i denominatori di queste frazioni, la qual differenza si appoggierà alla differenza del denominatore della frazione multiplicante alla unità; per tanto quanto cresce il denominatore della frazione multiplicante sopra l' unità, deve altrettanto crescere il denominatore della frazione prodotta dalla multiplicazione sopra il denominatore della frazione multiplicata; perciò si vede, che a parlare con proprietà, neppure alla multiplicazione di sole frazioni espresse con lettere, conviene il potere assolutamente ingrandire tali frazioni, ma che più tosto una tale operazione deve valutarsi, come una specie di divisione, che si adopra, come quì appresso osserveremo, per impiccolire maggiormente le minuzie di una data quantità, o per far vedere a quante parti di una intera quantità equivalgono le due date minuzie, e questa ultima cosa allora si osserva principalmente, quando le frazioni di frazioni per mezzo della multiplicazione si riducono ad una sola frazione: per esempio si riducono $\frac{2}{3}$ di $\frac{3}{4}$ ad una sola frazione, il quoziente $\frac{6}{12}$, che risulta, fa vedere la ragione della parte della parte, all' intera grandezza, cioè a qual parte equivalgono della intera quantità le due formate frazioni, mentre la mostra corrispondente alla metà della intera grandezza.

XI. Non meno ci fa vedere la multiplicazione delle frazioni di frazioni intrapresa per ridurle ad una sola frazione, il valore della quantità intera, a cui corrispondono le date frazioni, di quello che ci scuopra la multiplicazione ordinaria delle frazioni il valore della frazione di frazione, perchè, se bene si consideri la natura di questa operazione, si trova, che

lo

lo stesso è multiplicare fra loro queste due frazioni $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{5}$, che voler trovare una frazione, che vaglia $\frac{5}{7}$ di $\frac{3}{5}$, essendo che il risultato $\frac{15}{35}$, oppure $\frac{3}{7}$, che produce la multiplicazione di $\frac{5}{7}$ per $\frac{3}{5}$, dà il preciso valore della frazione di frazione $\frac{5}{7}$ di $\frac{3}{5}$ ridotta ad una sola frazione.

XII. Ci scuopre ancora la medesima multiplicazione il modo d' ingrandire una frazione di frazione con qualche cosa, che se gli aggiunga, se questa cosa non è un intero, nè un altra frazione, ma sibbene una porzione di questa medesima frazione, come sarebbe per esempio se a $\frac{2}{3}$ di $\frac{3}{4}$ si volessero aggiugnere li $\frac{3}{4}$, mentre per far questa addizione si deve trovare il giusto valore della data frazione $\frac{3}{4}$ di $\frac{2}{3}$ secondo la regola prodotta, poi col segno del † si deve scrivere appresso al medesimo la principale frazione data $\frac{2}{3}$, e finalmente praticando la regola dell' addizione, si osservi a che cosa ascende per l'appunto tutto il suo valore. Perchè dunque nel proposto caso $\frac{3}{4}$ di $\frac{2}{3}$ sono uguali ad $\frac{1}{2}$, si ha da scrivere questa frazione da parte, e framezzato il segno †, alla destra di questo segno si ha da porre questa frazione data $\frac{2}{3}$, scrittosi pertanto così $\frac{1}{2}$ † $\frac{2}{3}$, e multiplicate in croce le due frazioni si farà la somma de i risultati $\frac{3 † 4}{6}$, cioè $\frac{7}{6}$ per il valore delle due aggiunte frazioni.

C A P. III.

Del modo di impiccolire le Frazioni.

§. I.
Della sottrazione, e divisione delle Frazioni.

I. QUantunque qualche cosa sia stata accennata sul particolare dell' impiccolire le frazioni, che si multiplicano fra di loro, è niente di meno il luogo proprio quello, che ora quì si determina, dove non di passaggio, ma di proposito si vuole proporre ognuna di quelle operazioni, che sono solite destinarsi per impiccolire le frazioni. Quando si fa la sottrazione di una minuzia dall'altra, e si dividono queste scambievolmente fra di loro, deve da questi due modi rimanere un

avan-

avanzo, e un quoziente minore della data frazione. Per tanto ſi parlerà prima di queſti due modi d' impiccolire le minuzie, e poi ſi farà paſſaggio a qualunque altro, che opportunamente ſi ſcuoprirà, come materia capace di eſſere trattata in queſto luogo. Ed eccoci ſul bel principio ad avvertire tutti i medeſimi caſi, che furono preſuppoſti per le operazioni, delle qnali ſi parlò nel precedente Capitolo, cioè quando le operazioni ſono in ſole minuzie, ovvero quando inſieme colle minuzie ſi trovano annoverate le intere quantità; perchè queſti caſi egualmente poſſono accadere in occorrenza di dovere impiccolire le frazioni. Seguitando dunque l' ordine ſteſſo, ſi propone in primo luogo l' impiccolimeuto della frazione, che ſuol derivare dal ſottrarre una minuzia dall' altra.

II. Nel riſolvere queſta operazione ſi ha da vedere, ſe la frazione, che ſi vuole ſottrarre, ha il denominatore commune a quella frazione, da cui ſi deve ſottrarre, o ſeppure i denominatori ſono diverſi: in caſo di egualità ne i denominatori, per fare la ſottrazione, ſerve togliere il minore numeratore dal maggiore, che nell' avanzo ſi avrà il compimento di queſta operazione. Così dovendoſi ſottrarre $\frac{3}{5}$ da $\frac{4}{5}$, fatta la ſottrazione del 3 primo numeratore del 4 numeratore ſecondo, in queſto avanzo $\frac{1}{5}$ ſi ha il giuſto, che ſi deve avere da una tale operazione. Quando i denominatori non ſono uguali, due coſe ſi hanno da praticare per farſi ſtrada a riſolvere le operazioni, e ſono di oſſervare prima ſe la frazione data per ſottrarla dall' altra, ſi poſſa ſottrarre, coſa che non potrebbe accadere, ſe la frazione da ſottrarſi foſſe maggiore dell' altra; in ſecondo luogo ſi hanno da ridurre le due date frazioni con denominatori differenti a due altre frazioni di uguale denominatore, ed in ciò fare ſi ſcorga quello, che antecedentemente ſi è detto doverſi oſſervare, cioè qual ſia la maggiore frazione, e perchè del modo di fare queſta riduzione altrove ſi è parlato, però un eſempio, che ſi proponga, ſerve per renderci avvertiti del modo di operare in queſta circoſtanza di caſo. La ſottrazione che ſi vuol fare è di $\frac{3}{7}$ da $\frac{5}{6}$, fatta la riduzione naſcono queſte due frazioni $\frac{18}{42}$, $\frac{35}{42}$. Si vede dunque, che l' eſempio è ben dato, perchè $\frac{3}{7}$ ſono minori di $\frac{5}{6}$, e ſi vede anche di più, che levato ſecondo le regole della ſottrazione ordinaria il 18 dal 35, rimane 17, acciocchè ſcritto, come ſi de-

ſi deve, vale a dire in queſto modo $\frac{2}{8}$, dimoſtri quale è l'avanzo, che laſcia l'operazione.

III. Il ſecondo caſo, che occorre è, quando le frazioni ſono unite agl'interi, o l'intera quantità accompagni poi tutte due le frazioni, o ſi trovi ſolo con una. Ecco gli eſempj, ne i quali ciaſcheduno di queſti due caſi può eſſere avvertito.

Eſempio I. $5\frac{2}{7}$ da $9\frac{3}{5}$

Eſempio II. $\frac{6}{7}$ da $6\frac{3}{4}$

Per operare in queſti due eſempj è neceſſario ricorrere a quella regola, che riduce gl'interi a i rotti; Poi dopo queſta riſoluzione ſi ha da trovare il denominatore commune a tutte due le frazioni. In ultimo luogo ſecondo il ſolito, ſi leva il minore numeratore dal maggiore, e ſi ſcrive la frazione, che avanza; e perchè un tale avanzo ha da moſtrare una frazione ſpuria, a fine di renderla quale ha da eſſere, ſi ricorre alla regola, che inſegna il modo di ridurre la frazione all'intero, e rieſce con eſattezza compiuta l'operazione. Si applichi dunque la regola preſente a due dati eſempj.

Riſoluzione del I. Eſempio.

$5\frac{2}{7}=\frac{37}{7}$ *Riduzione degli interi tutti a i rotti* $\frac{48}{5}=9\frac{3}{5}$

$\frac{185}{35}$ *Riduzione fatta ſotto lo ſteſſo denomin.* $\frac{336}{35}$

Numeratore maggiore 336
Numeratore minore 185

Avanzo dopo la ſottraz. e frazione ſpuria. $\frac{151}{35}=4\frac{11}{35}$

Riſoluzione del II. Eſempio.

Rotto rimaſto lo ſteſſo $\frac{6}{7}$ | $\frac{27}{4}$ *Frazione nata dalla riduzione dell'intero al rotto*

$\frac{24}{28}$ *Rotti ridotti allo ſteſſo denominatore* $\frac{189}{28}$

Numeratore maggiore 189
Numeratore minore 24

Avanzo dopo la ſottraz. e frazione ſpuria. $\frac{165}{28}=5\frac{25}{28}$

IV.

IV. La divisione è la seconda regola, di cui ci serviamo per impiccolire le frazioni, e si adopra questa ne medesimi casi, ne quali si adopra la sottrazione. Tutto l'importante di questa regola consiste nel trovare un quoziente, ed allora si può trovare, quando la frazione che parte, è minore della frazione, che resta partita; importerà dunque assaissimo sul principio della operazione osservare, se la dimanda fatta sia giusta, e per tale sarà giudicata, quando nel modo avanti accennato avremo trovato, che la frazione data da partire è minore di quella, che si deve partire. Poi passando alla pratica della operazione si vedrà, secondo la regola ordinaria del partire, quante volte il numeratore della minore frazione possa entrare nel numeratore della seconda, e notato questo numero di volte, se gli scriverà appresso l'avanzo, se vi sarà rimasto a usanza di frazione, con darli per denominatore lo stesso numero partitore. Si abbiano da partire $\frac{3}{8}$ per $\frac{2}{7}$, giacchè due settimi si trovano minori di $\frac{3}{8}$, con ridurre le due frazioni ad avere la stessa denominazione, come si osserva in queste due frazioni $\frac{16}{56}$ $\frac{21}{56}$, si partirà il 21 per il 16, e il quoziente sarà 1 † $\frac{5}{16}$. Se poi la divisione dovesse intraprendersi sopra frazioni unite agl' interi, potrebbe ciò occorrere ne i medesimi casi, ne i quali si è detto, che può dimandarsi la sottrazione, e che pure si manifestano ne i predetti due esempj.

Esempio I.

$5\frac{2}{7}$. $9\frac{3}{5}$

Esempio II.

$\frac{6}{7}$. $6\frac{3}{4}$

Fatte dunque le precedenti operazioni colle riduzioni necessarie, dove nel caso della sottrazione si deve levare il numeratore minore dal maggiore, in questo caso della divisione deve il minore numeratore partire il maggiore, e si ha da preparare il quoziente secondo il modo, quì sopra stabilito. Per tanto essendo nel primo esempio i numeratori 336, 185; si vede, che il 185 entra nel 336 una volta, coll'avanzo di $\frac{151}{185}$, perciò il quoziente della divisione fatta nel primo esempio ha da essere 1 † $\frac{151}{185}$. E perchè i numeratori del secondo esempio sono 189, e 24; giacchè il 24 nel 189 entra 7 volte, coll'avanzo di $\frac{21}{24}$ oppure $\frac{7}{8}$, per questo il quoziente del suddetto esempio ha da essere 7 † $\frac{7}{8}$.

V. Dopo di aver mostrato, in che modo si posano im-

piccolire le frazioni, che ſono eſpreſse con cifre Aritmetiche, non è fuor di propoſito il ricercare col mezzo medeſimo l' impiccolimento delle ſteſse minuzie, quando ſieno eſpreſse con lettere. Torna per tanto bene queſto impiccolimento, ſe eſſendo le frazioni date con differenti denominatori, prima di operare ſopra di eſse ſi riducano ad avere il medeſimo denominatore, o ſe, avendo a loro ſteſse unite altre quantità intere, ſi riducano prima queſte intere quantità alla condizione di frazioni. Ecco in una ſol veduta la ſerie eſpreſsa di molti di quei caſi, che poſsono occorrere per impiccolire le minuzie, operando ſopra di eſse colla ſottrazione.

$\frac{e}{f}$ da $\frac{g}{f}$	$\frac{e}{f}$ da $-\frac{g}{b}$	$\frac{e}{f}$ da $\frac{g}{b}+\frac{g}{i}$	e da $\frac{f}{b}$
$\frac{g}{b}$ da f	$f\,\frac{g}{b}$ da e	$f\,\frac{g}{b}$ da $\frac{e}{i}$	$f\,\frac{g}{b}$ da $z\,\frac{d}{b}$
$f\frac{g}{b}$ da $z\frac{g}{b}$	$\frac{gg-gl}{g-l}$ da f	$g+\frac{b}{f+i}$ da $m+n$	$e-f$ da $\frac{a+b}{c+g}$

1. Il primo di tutti queſti eſempj è faciliſſimo a ſcioglierſi, perchè, avendo le frazioni il denominatore commune, ſerve legare inſieme i numeratori col ſegno — all'uſanza della ſottrazione ordinaria, e porre ſotto la linea il commune denominatore, che ſubito reſta compita la ſottrazione, e ſi può ſcrivere l'avanzo così $\frac{e-g}{f}$

2. Nel ſecondo eſempio ſi deve cercare il denominatore commune alle due frazioni, ſecondo la regola altrove determinata, e poi, come nel primo eſempio, fatta la ſottrazione, ſi trova l' avanzo $\frac{be-gf}{f\,b}$.

3. Nel terzo eſempio, in cui una frazione ſi deve ſottrarre da due, baſta, come nel ſecondo eſempio, trovare il denominatore commune, che ſubito compariſce, la differenza delle frazioni date eſsere la ſeguente $\frac{ebi-gfi-gfb}{fbi}$.

4. Nel quarto eſempio è neceſsario, che l'intera quantità e ſi riduca in frazione, il che fatto, la ſottrazione s'intraprende al

al ſolito del primo eſempio, rimanendo la differenza $\frac{f-eb}{b}$

5. In maniera poco diverſa dalla precedente ſi fa la ſottrazione, che ſi dimanda nel quinto eſempio, conſiſtendo anche l' operazione per queſto caſo in ridurre l' intera quantità ad una frazione, che abbia il denominatore ſteſso dell' altra, perchè, ciò fatto, ſi trova ſpeditamente la differenza, che ſi eſprime così $\frac{fb-g}{b}$.

6. La ſottrazione nel ſeſto eſempio ſi fa con ridurre prima le quantità intere a frazioni della data denominazione; perciò queſta riduzione ſarà $\frac{fb+g}{b}$, $\frac{eb}{b}$, e fatta la riduzione per la ſolita regola della ſottrazione ordinaria, ſi compirà la ſottrazione, e ſi ſcriverà la differenza $\frac{eb-fb-g}{b}$.

7. Praticheremo lo ſteſso artificio nella ſottrazione per il ſettimo eſempio, in cui prima occorrerà ridurre ad una frazione del dato denominatore la quantità da ſottrarſi $f+\frac{g}{b}$, e in ſecondo luogo biſognerà ridurre le due frazioni, nelle quali ſi ha da operare, alla medeſima denominazione. e poi ſi farà vedere la loro differenza colla ſottrazione.

Dalla prima operazione riſulta $\frac{fb+g}{b}$.

Dalla ſeconda operazione naſcono queſte due frazioni $\frac{ifb+ig}{bi}$, $\frac{be}{bi}$.

Dalla terza operazione ecco la differenza, che riſulta $\frac{be+ifb-ig}{bi}$.

8. L'ottavo eſempio richiede ſolo, che ſi premetta alla ſottrazione la riduzione delle quantità intere, che ſono unite alle frazioni, alla denominazione di queſte frazioni, ſicchè, perchè la riduzione è tale, quale quì ſi vede $\frac{fb+g}{b}$, $\frac{zb+d}{b}$, però anche la differenza, che deve rimanere, conſiſte in queſta frazione $\frac{zb+d-fb-g}{b}$.

9. La ſottrazione nel nono eſempio ſerve il farla fra le ſole quantità intere, giacchè le frazioni corriſpondono fra loro. Sottratto dunque $f + \frac{g}{b}$ da $z + \frac{g}{b}$ rimarrà l'avanzo $z - f$.

10. Nel decimo eſempio ſi opera come nel quinto, ſe non che l'operazione è più compoſta, e ci laſcia per differenza queſta frazione $\frac{fg - fb - gg + gl}{g - l}$.

11. Ancora nell'undecimo eſempio ſi opera, come nel ſeſto, e ſolo l'operazione riſulta più compoſta, perchè eſprime tutta queſta differenza $\frac{mf + mi + nf + ni - gf - gi - b}{f + i}$.

12. Finalmente nel duodecimo eſempio s'intraprende la ſottrazione, come nel quarto, e ſi trova eſſere queſta la differenza, che ſi cerca $\frac{a + b - ec - eg + fc + fg}{c + g}$.

VI. Paſſando ora all'altro modo d'impiccolire le frazioni eſpreſſe con lettere per mezzo della diviſione, avvertiamo quì in ſuccinto le regole, da oſſervarſi, per poi aggiugnere l'applicazione delle medeſime a i proprj eſempj.

1. La prima regola, che ſi deve oſſervare, ha da eſſere di cambiare i termini della frazione, che deve dividere, traſportando il denominatore di queſta frazione nel luogo del numeratore, e il numeratore calandolo al luogo del denominatore.

2. La ſeconda regola è d'intraprendere la diviſione con multiplicare i numeratori fra loro, e i denominatori fra loro.

3. La terza regola appartiene a quella diviſione, che ſi fa della frazione per l'intero, o viceverſa, e determina, che ſe il numeratore della frazione è diviſibile dall'intero, ſi ha da fare la diviſione, e in ciò, che rimane, ſi vede il quoziente della operazione; ma ſe il numeratore non è diviſibile dall'intero, il denominatore ſolo della data frazione deve multiplicarſi per il diviſore, con dare il riſultato per denominatore della frazione diviſa, laſciato ſtare intatto il ſuo numeratore; che ſe la diviſione deve farſi ſopra l'intera quantità dal rotto, che non ha nulla di commune colla ſteſſa intera quantità, ſerve, che ſi traſformi il rotto diviſore, perchè poi s'intraprenda la diviſione, ſecondo la regola precedente.

4. La

4. La quarta, ed ultima regola finalmente prescrive, che essendo frazioni congiunte agl'interi quelle, che si hanno da dividere per divisori composti d'interi, e frazioni, prima d'intraprendere la divisione, si riducano le quantità intere a quelle frazioni, alle quali sono congiunte, e che poi secondo la prima, e seconda regola, si dividano. Tutte queste quattro regole, opportunamente avvertite, si possono far vedere applicate a qualche esempio, che quì s'inserisce per norma di tutti gli altri, che possono accadere sul particolare di questa materia.

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$	$\frac{x}{m} : bd$	$cd : \frac{x}{m}$	$bd\,\frac{m}{u} : ep$	$bd\,\frac{m}{u} : \frac{x}{n}$
$bd\,\frac{m}{u} : ap\,\frac{r}{t}$		$\frac{rt}{u} : t$	$\frac{rt - qs}{u - x} : r - s$	$\frac{rt - qs}{u - x} : u + x$

1. La frazione, che nel primo esempio deve dividere l'altra, è $\frac{c}{d}$. Trasformatasi dunque secondo la prima regola, diventa $\frac{d}{c}$, dunque per questa multiplicandosi l'altra a tenore della seconda regola, risulterà $\frac{ad}{bc}$ per quoziente di questa divisione.

2. Divide nel secondo esempio la frazione $\frac{x}{m}$ una intera quantità bd, la quale, perchè non ha niente di commune col numeratore della frazione, però per la terza regola si farà questa divisione così $\frac{x}{bdm}$.

3. Il caso è contrario nel terzo esempio: però posto in pratica l'ultimo insegnamento della terza regola si farà la divisione in tal modo $\frac{cdm}{x}$.

4. Ridotta nel quarto esempio la quantità da dividersi in una sola frazione, s'intraprende la divisione, come nel secondo esempio, e si troverà che risulta questa quantità $\frac{bdu + m}{epu}$.

5. An-

5. Anche nel quinto esempio si deve fare la riduzione, e poi operandosi, come si è operato nel primo, si troverà per quoziente della operazione $\frac{bdnu + nx}{ux}$.

6. Nel sesto esempio sono necessarie le riduzioni di tutte due le quantità, assegnate alle frazioni loro corrispondenti, e però fatte queste riduzioni alla maniera del primo esempio, si trova il risultato della divisione domandata $\frac{bdtu + mt}{aptu + ur}$.

7. Il settimo esempio propone il caso, che osserva la prima parte dalla terza regola, e però si trova, che il quoziente di questa divisione deve essere $\frac{r}{u}$.

8. La stessa cosa si osserva nell' ottavo esempio, e però si determina per quoziente della divisione questa frazione $\frac{t-q}{u-x}$.

9. Nel nono, ed ultimo esempio proposto si vede, che la quantità, che divide, non ha parte, che corrisponda al numeratore della divisione; per tanto operandosi secondo l' insegnamento della terza regola, risulta $\frac{rt-qs}{uu-xx}$.

VII. In tutti i predetti esempj si riscontrano quei casi, che sono più frequenti ad accadere, quando si tratta di dividere, o le sole frazioni, o le quantità intere, accompagnate dalle frazioni. Negli esempj seguenti si vogliono proporre alcuni casi particolari, che forse sono i più rari a succedere, ma che pure possono accadere, per avvertire, come in questi uno si abbia a regolare. Ecco dunque il primo caso.

Si abbia a dividere questa quantità $a + \frac{b + \frac{c}{d}}{e} \times f - g\,\frac{\frac{b}{i}}{l + \frac{m}{n}}$

Prima di venire a questa divisione è necessario, che si riduca, tanto la quantità, da dividersi, quanto quella, che deve dividere, ad una sola frazione, che abbia il dato denominatore. Intraprendendosi dunque l'operazione nella prima quantità, si multiplica l' intera grandezza a per il denominatore principale della frazione, cioè per e, il risultato deve essere ae. Si multiplica poi la prima parte della frazione b per d, deno-

nominatore della ſeconda parte della frazione $\frac{c}{d}$, e il riſultato bd ſi pone accanto al primo riſultato ae, framezzato ad eſſi il ſegno † così $ae \dagger bd$. Si aggiugne a queſto prodotto il numeratore, avanzato nella ſeconda parte della frazione, col ſuo proprio ſegno † c, e ſi rileva tutto intero il numeratore nuovo della frazione, che ſi vuol formare così $ae \dagger bd \dagger c$, e ſe gli danno tutti due i denominatori, ciaſcuno ſotto la propria linea, e ſi vede intera la prima fatta riduzione, quale è

$$\frac{\frac{ae \dagger bd \dagger c}{d}}{e}$$

Dopo di aver fatta la prima riduzione, ſi fa la ſeconda, e queſta conſiſte in dare alla prima parte del numeratore già formato, il denominatore meno principale d, poi tirata la ſolita linea, ſotto tutti i termini del numeratore, ſi ſcrive la ſeconda riduzione poco variata nel numeratore dal numeratore della prima, e con i medeſimi denominatori così $\frac{\frac{aed \dagger bd \dagger c}{d}}{e}$

Preparata la ſeconda riduzione, ſi prepara la terza, e ultima, e queſta ſi prepara con partire il numeratore della ſeconda per il denominatore principale e, la qual diviſione preſto ſi fa, ſe ſi aggiunga queſto denominatore e all' altro d, ſcrivendoſi de ſotto il preparato numeratore in tal modo $\frac{aed \dagger bd \dagger c}{de}$, e con ciò reſta finita la riduzione della quantità data da dividerſi.

Per intraprendere la riduzione della quantità, che ha da dividere, ci vogliono quattro operazioni. Conſiſte la prima nel ridurre il denominatore della frazione $l \dagger \frac{m}{n}$ ad una ſola frazione, e la riduzione è tale $\frac{ln \dagger m}{n}$. Opera la ſeconda la riduzione del denominatore in quella parte, in cui è la frazione, ad una ſola frazione, e queſta parte è ridotta ſcrivendoſi $\frac{gi - b}{i}$. Si compiſce in terzo luogo la riduzione del numera-

tore

rore della frazione, con ridurre l' intera quantità f, a questa stessa frazione, e si fa la riduzione in questa forma $\frac{fi-gi-b}{i}$ dunque mettendosi insieme al suo luogo il numeratore, e denominatore di questa nuova frazione ridotta, si trova, che è la seguente
$$\frac{\frac{fi-gi-b}{i}}{\frac{ln+m}{n}}$$

Per compire ora la riduzione, si parte il numeratore di questa frazione ridotta pel denominatore principale, cioè per $\frac{ln+m}{n}$, e questa si fa con multiplicare in croce il numeratore della frazione pel suo denominatore, e si trova per risultato $\frac{fin-gin-bn}{iln+im}$, che è il compimento della riduzione di quella quantità, che è stata data, perchè divida l'altra già ridotta. La serie di tutte queste operazioni, si pone quì distesamente.

Partire.

$$a+b+\frac{\frac{c}{d}}{e} \quad per \quad \frac{f-g\frac{b}{i}}{l+\frac{m}{n}}$$

Operazioni.

I. $\frac{ae+\frac{bd+c}{d}}{e}$

II. $\frac{\frac{aed+bd+c}{d}}{e}\times\frac{e}{i}$

III. $\frac{aed+bd+c}{de}$

I. $\frac{ln+m}{n}$ *denomin. principale*

II. $\frac{gi-b}{i}$ *parte del numeratore*

III. $\frac{fi-gi-b}{i}$ *nu. intero part. per* $\frac{ln+m}{n}$.

IV. $\frac{fin-gin-bn}{iln+im}$ *risultato, per cui si parte* $\frac{aed+bd+c}{de}$

Com-

Compite tutte le riduzioni, ora per la via ordinaria si dà compimento alla divisione dimandata, cioè con trasformare la frazione, che dee dividere, ovvero con multiplicare in croce le due date frazioni, e risulterà questo quoziente

$$\frac{aediln \dagger bdiln \dagger ciln \dagger aedim \dagger bdim \dagger cim}{defin - degin - debin}$$

VIII. Scendendo ora al secondo caso, in cui si tratta di voler dividere la seguente frazione

$$\frac{b^4}{12d} - \frac{ebbb}{24d} \dagger \frac{bbb}{3f} - \frac{ebb}{bf} \dagger \frac{1}{4}bf \dagger d \quad \text{per} \quad \frac{bbb}{3d} - \frac{ebb}{6d} \dagger f$$

le regole, che si hanno da praticare sono le seguenti. Primieramente si dee dividere il primo termine della frazione $\frac{b^4}{12d}$ pel primo termine della frazione dividente $\frac{bbb}{3d}$, e perchè diviso $\frac{bbbb}{12d} : \frac{bbb}{3d}$ lascia il quoziente $\frac{1}{4}b$, si nota da parte questo quoziente primo trovato, e sotto il primo termine della frazione divisa si pone uno zero, e resta compita la prima operazione; dovendosi ora cominciare la seconda, si fa questa con multiplicare il quoziente primo trovato per gli ultimi due termini della frazione dividente $-\frac{ebb}{6d}$, $\dagger f$, multiplicandosi dunque $-\frac{ebb}{6d} \times \frac{1}{4}b$, il risultato, che viene è $-\frac{ebbb}{24d}$ come multiplicandosi $\dagger f \times \frac{1}{4}b$, il risultato si trova $\dagger \frac{1}{4}bf$. Sicchè il risultato intero di questa multiplicazione è $-\frac{ebbb}{24d}$ $\dagger \frac{1}{4}bf$, che si dee levare dalle frazioni della quantità data da dividersi, con porre sotto alle loro corrispondenti uno zero, e ciò fatto, si passa alla terza operazione. Consiste questa terza operazione in trovare il secondo termine della frazione del quoziente, e questo si trova con dividere i ter-

mini rimasti della frazione pel dato divisore; si dee dunque dividere $\dagger \frac{bbb}{3f} \times \frac{bbb}{3d}$, e si trova il quoziente $\dagger \frac{d}{f}$, che dee unirsi coll' altro termine del quoziente già ritrovato, e si dee porre sotto il termine della frazione divisa lo zero, per passare alla ultima operazione. In questa ultima operazione si fa la multiplicazione degli ultimi due termini del divisore per l' ultimo termine del quoziente trovato, cioè si dee multiplicare $-\frac{ebb}{6d} \dagger f$ per $\dagger \frac{d}{f}$; la multiplicazione di $-\frac{ebb}{6d} \times \dagger \frac{d}{f}$ dà per risultato $-\frac{debb}{6d}$, cioè $-\frac{ebb}{6d}$, la multiplicazione di $\dagger f \times \dagger \frac{d}{f}$ produce $\dagger \frac{fd}{f}$, ovvero $\dagger\, d$, dunque l' intero risultato della multiplicazione si trova $-\frac{ebb}{6d} \dagger d$, e perchè questo risultato conviene con i termini, che sono rimasti nella frazione divisa, perciò posto lo zero sotto questi termini, si è arrivato al compimento della operazione, in cui si è trovato per quoziente della divisione la frazione $\frac{1}{4}b \dagger \frac{d}{f}$. Si pone quì appresso il disteso della operazione ora fatta.

Partire.

$$\begin{array}{ccccccccc} \frac{b^4}{12d} & - \frac{ebbb}{24d} & \dagger \frac{bbb}{3f} & - \frac{ebb}{6f} & \dagger \frac{1}{4} & bf \dagger d & \text{per} & \frac{bbb}{3d} - \frac{ebb}{6d} \dagger f \\ & & & & & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \end{array}$$

Operazioni.

quoz. intero $\frac{1}{4}b \dagger \frac{df}{f}$

I. $\frac{b^4}{12d} \times \frac{bbb}{3d}$ *quoziente* $\frac{1}{4}b$

II. $-\frac{ebb}{6d} \dagger f$ *multiplicato per* $\frac{1}{4}b$. *risulta* $-\frac{ebbb}{24d} \dagger \frac{1}{4}bf$

III.

III. $\dagger\ \frac{bbb}{3f}$ *diviso per* $\frac{bbb}{3d}$ *quoziente* $\dagger\ \frac{d}{f}$

IV. $-ebb \dagger f$ *multiplicato per* $\dagger\ \frac{d}{f}$ *risulta* $\frac{ebb}{6f} \dagger d$

IX. Il terzo caso propone il modo di dividere una quantità, di cui tutti i termini sono prevenuti dalla frazione, e questa operazione conviene colla precedente, mentre tutto ciò, che è accaduto di doversi praticare in quella, dee essere ripetuto anche in questa. L' esempio, in cui si può proporre questo caso è il seguente.

si parta $\frac{1}{6}bll \dagger \frac{10}{27}ill - \frac{2}{3}mn \dagger \frac{1}{16}bbl \dagger \frac{5}{36}bil - \frac{1}{4}bmn$ per $\frac{1}{4}bl \dagger \frac{5}{9}il - mn$

E' necessario prima dividere $\frac{1}{6}bll$ per $\frac{1}{4}bl$, e si trova per quoziente $\frac{4}{6}l$, cioè $\frac{2}{3}l$, questo quoziente posto da parte, si adopra ancora per multiplicare con esso $\dagger\ \frac{5}{9}$, $il - mn$ ultima parte del divisore dato; multiplicando dunque $\frac{2}{3}l$ per $\frac{5}{9}il$, risulta $\dagger\ \frac{10}{27}ill$; multiplicando similmente $\frac{2}{3}l$ per $-mn$, risulta $-\frac{2}{3}mn$, cioè il risultato dalla multiplicazione di $\dagger\ \frac{5}{9}il - mn$ per $\frac{2}{3}l$, si trova $\dagger\ \frac{10}{27}ill - \frac{2}{3}mn$, questo si leva dal divisore, con porre sotto i termini corrispondenti lo zero, e si passa a trovare l'altro termine, che dee avere il quoziente. Si parte dunque pel primo termine del divisore $\frac{1}{4}bl$, il primo termine rimasto nella quantità da dividersi $\dagger\ \frac{1}{16}bbl$, e si trova il quoziente $\dagger\ \frac{4}{16}b$, cioè $\dagger\ \frac{1}{4}b$; si aggiugne questo secondo termine del quoziente al primo trovato, e per esso medesimamente si multiplicano i rimanenti termini del divisore; dunque multiplicando $\dagger\ \frac{1}{4}b$. $\dagger\ \frac{5}{9}il$ risulta $\frac{5}{36}bil$; multiplicandosi similmente $-mn \times \dagger\ \frac{1}{4}b$, si produce $-\frac{1}{4}bmn$, e tutta la multiplicazione dà questo risultato $\dagger\ \frac{5}{36}bil - bmn$, cioè dà per l' appunto i termini rimasti nella quantità, che si è divisa, che però posti i zeri sotto questi termini, resta compita l' operazione, e trovato anche in questo ultimo caso il quoziente $\frac{2}{3}l \dagger \frac{1}{4}b$, che si riporta quì sotto colla serie di tutte le operazioni.

Operazione.

I. $\frac{1}{6}bll$ diviso per $\frac{1}{4}bl = \frac{2}{3}l$

II. $\frac{2}{3}l \times +\frac{5}{9}il = +\frac{10}{27}ill$

$\frac{2}{3}l \times -mn = -\frac{2}{9}mn$ quoz. $\frac{2}{3}l + \frac{1}{4}b$

III. $\frac{1}{4}bl : +\frac{1}{12}bbl = +\frac{3}{4}b$

IV. $+\frac{5}{9}il \times +\frac{1}{4}b = +\frac{5}{36}bil$

$-mn \times +\frac{1}{4}b = -\frac{1}{4}bmn$

§. II.

Della estrazione delle radici dalle frazioni, e come queste si possono impiccolire fino allo infinito.

X. TUtti i precedenti casi servono per far conoscere la maniera diversa di impiccolire le frazioni, secondo le operazioni più ordinarie, e secondo l'arbitrio di chi propone i medesimi casi; si avvertiranno ora quei modi, che convengono alle stesse grandezze relativamente a quelle potenze, alle quali sono elevate, cercando lo impiccolimento loro col farle scendere fino all'infimo grado, che le dee competere, se non pure anche più giù, conducendole ad un abbassamento fino nello infinito. L'estrazioni delle radici dalle potenze, sono le operazioni molto bene adattate per il loro impiccolimento. Sicchè di queste ora si parlerà prima di fare altro discorso, scorrendo per quei gradi, che possono essere i più frequenti a poter venire in acconcio alla soluzione de i problemi.

XI. La prima estrazione di radice dalle frazioni appartiene a quel caso, in cui si può fare l'operazione sopra quelle frazioni, delle quali i termini, che le compongono, sono perfette potenze, ma questo caso nulla seco porta di difficoltà, operandosi in esso secondo le solite regole delle estrazioni delle radici, nè ha altro di particolare, a riserva di doversi estrarre la radice, tanto dal numeratore, quanto dal denominatore della frazione, così se la frazione fosse $\frac{64}{100}$, e si dovesse levare la radice quadrata, in quest' altra frazione $\frac{8}{10}$ si vedrebbero ritrovate le radici della precedente; come in questa frazione $\frac{4}{5}$, si averebbe la radice cuba di $\frac{64}{125}$, e in quest' altra $\frac{3}{4}$ si vedrebbe la radice di una quarta potenza $\frac{81}{256}$.

XII. La difficoltà dunque nello intraprendere l'estrazione delle radici dalle frazioni, non risguarda alcuno di questi

casi

casi, ne i quali si ha da estrarre la radice da perfette potenze, esposte in frazioni; ma solo, quando le frazioni sono tali che non sono perfette potenze, onde non è possibile, che da esse si levi qualunque dimandata radice, che sia la giusta, ma solo si leverà una qualunque radice, che sarà prossima, e anche con tale approssimazione, che il mancamento al giusto si vedrà risolvere in una infinitamente piccola differenza.

La regola, che si suol dare per questa funzione, consiste in multiplicare il numeratore pel denominatore della frazione, poi il denominatore in se stesso, e questi risultati si alzano, con accrescere tanto il numeratore, che il denominatore della nuova minuzia, con quanti zeri si vuole, avvertendo in far ciò, che sempre sia pari il numero degli zeri, che si aggiugne, potendosene aggiugnere o due, o quattro, o sei, o dieci, &c. ma non mai uno, tre, cinque, &c. quando si ha da levare la radice quadrata. Fatto questo accrescimento della frazione, si leva al solito la radice dimandata dalle due parti della frazione, e nella nuova frazione, che si forma da' numeri delle due radici estratte, si ha la più prossima radice, che si può avere per la frazione di questa fatta. Supponghiamo, che $\frac{32}{40}$ sia la frazione data per estrarre da essa la radice quadrata. Se senza intraprendere alcuna operazione da questa minuzia, si volesse levare la radice quadrata, questa sarebbe $\frac{5}{6}$, ma come conosce chi vuole, questa radice è molto lontana dallo esprimere il vero valore della data frazione, dunque si trovi quella radice, che più se gli approssimi. Si multiplichi prima il 32 pel denominatore 40, e da questa multiplicazione risulta 1280. Si multiplichi il denominatore in se stesso, ed ecco il prodotto 1600; l' uno, e l' altro prodotto si accresca con due zeri, e si faccia la nuova frazione $\frac{128000}{160000}$, e sopra questa si operi per l' estrazione della radice quadrata. La radice del numeratore si trova 357, quella del denominatore è 400, dunque $\frac{357}{400}$ è la radice più prossima di $\frac{32}{40}$, che non è $\frac{5}{6}$, e la prova per riscontrarlo è facilissima, praticandosi quella regola, che fa conoscere quale delle due date frazioni è la maggiore, mentre questa regola mostra, che $\frac{5}{6}$ equivale a $\frac{2000}{2400}$, dove $\frac{357}{400}$ equivale a $\frac{2142}{2400}$. Se si voglia vedere una approssimazione anche maggiore, si aggiungano altri sei zeri al numeratore, e denominatore della nuo-

va

va frazione, e si seguiti la estrazione della radice quadrata, e nel risultato $\frac{357770}{400000}$, ecco una radice più prossima, che non è la precedente, e la dimostra tale la prova, che quì si aggiugne, che consiste in ridurre le due frazioni, che esprimono le radici trovate ad altre due frazioni, le quali abbiano la denominazione medesima.

Prima rad. trovata $\frac{5}{6}$ $\qquad$ $\frac{357}{400}$ *Seconda rad. trovata*

$$\frac{2000}{2400} \times \frac{2142}{2400}$$

Seconda radice trovata $\frac{357}{400} \times \frac{357770}{400000}$ *Terza rad. trov.*

$$\frac{142800:000}{160000:000} \qquad \frac{143108:000}{160000:000}$$

XIII. L' operazione, che si dee intraprendere per l' estrazione della radice cuba dalle frazioni, osserva le regole della precedente, se non che vi è qualche variazione nel modo di multiplicare i termini della data frazione, dovendosi due volte multiplicare pel denominatore della frazione; laonde, se la frazione data, perchè si estragga la radice cuba è $\frac{7}{9}$. prima si dee multiplicare il 7 pel 9, e il 9 in se stesso, e poi di nuovo questi prodotti si hanno da multiplicare pel 9 medesimo. Multiplicandosi dunque $\frac{7}{9}$ per 9, risulta $\frac{63}{81}$, e questa frazione di nuovo multiplicata per 9, produce $\frac{567}{729}$, ora tale è quella frazione, da cui si dee estrarre la radice cuba, secondo la propria regola, spiegata già al suo luogo. Quantunque però la radice cuba, levata dalla frazione, nel predetto modo preparata, si accosti più al dovere, che quella, che si può levare puramente dalla frazione $\frac{7}{9}$, tuttavia l' approssimazione si renderà sempre maggiore dallo aggiugnere al numeratore, e denominatore della nuova frazione tre zeri, e la radice cercata sarà altrettanto più giusta, quanto noi avremo aggiunti più volte questi tre zeri. Si può riscontrare colla regola precedente la verità di quanto si dice, confrontando insieme le seguenti frazioni, che esprimeranno le radici cube trovate per la data frazione.

Fra-

Frazione data $\frac{7}{9}$ *ſua radice cuba* $\frac{1}{2}$

Frazione preparata $\frac{567}{729}$ *ſua radice cuba* $\frac{8}{9}$

la ſteſſa fraz. accreſc. di 3 *zeri* $\frac{567000}{729000}$ *rad. cuba* $\frac{82}{90}$

accreſc. di 9 *zeri* $\frac{567000000000}{729000000000}$ *rad. cuba* $\frac{8276}{9000}$

Riſtretto di tutta la operazione.

$\frac{1}{2}, \frac{8}{9}, \frac{82}{90}, \frac{8276}{9000}$ *ſerie di tutte le radici cube trovate*

Riduz. di queſte frazioni alla ſteſſa denominaz. perchè ſi conoſca la maggiore di eſſe

$\frac{7290:0000}{1458:0000}$ $\frac{1296:0000}{1458:0000}$ $\frac{13284:000}{14580:000}$ $\frac{1340712:0}{1458000:0}$

XIV. Per l' eſtrazione delle medeſime radici da frazioni, che ſono congiunte alle intere quantità, ſi oſſerva la regola di ridurre prima le intere quantità a frazioni, acciocchè operandoſi poi ſopra di queſte come ſi è aſſerito quì ſopra intorno al modo di dovere preparare tali frazioni; ſi eſtragga finalmente quella radice, che è dimandata, dopo la quale eſtrazione occorrerà di partire il numeratore della minuzia formata dalle due eſtratte radici, pel ſuo denominatore, acciocchè ſi abbia nel quoziente di una tale diviſione quella quantità, che ſi è trovata, o la giuſta, o alla giuſta più proſſima, per eſprimere con eſſa la radice richieſta. Si può ridurre a queſta regola quel caſo, in cui ſi propone un numero, che non è quadrato perfetto, perchè dal medeſimo ſi levi la radice quadrata, mentre l' uſo degli Aritmetici in queſta operazione è di formare del numero intero dato, per eſempio 34, una frazione in queſta guiſa $\frac{34}{1}$, e poi di alzarla in ciaſcheduno de i termini con molti zeri al ſolito delle frazioni ordinarie, per intraprendere poi l' eſtrazione della radice nel modo già ſta-

ſtabilito. E però più nobile quella regola, che per queſto ſteſſo effetto propone l' Algebra; ma prima, che queſta ſi proponga, è neceſſario di produrre le altre, delle quali queſta ſcienza ſi ſerve, per riuſcire nello impiccolimento delle frazioni, quando appunto le vuole ridurre alla prima loro potenza.

XV. Di qualunque ſpecie ſieno le frazioni o di quantità ſemplici, o di grandezze compoſte, ſempre l' eſtrazione della radice ſi fa, ſe tanto il numeratore, che il denominatore di queſte frazioni ſia una perfetta potenza; e la regola da oſſervarſi ſu queſto particolare è la medeſima, ſpiegata altrove, parlando noi delle intere quantità; per queſto $\frac{a + b}{c - d}$ ſi dice radice ſeconda della frazione $\frac{a^2 + 2ab + bb}{c^2 - 2cd + dd}$, e ſarebbe radice terza, ſe queſta foſſe la data frazione, $\frac{a^3 + 3aab + 3abb + b^3}{c^3 - 3ccd + 3cdd - d}$ nella ſteſſa maniera, che queſta radice $\frac{m}{\sqrt{no}}$ è radice ſeconda di $\frac{mm}{no}$, ed è radice cuba di $\frac{m^3}{n^3 r^3}$ la radice $\frac{m}{\sqrt[3]{nr}}$, ovvero $\frac{m}{nr}$ della frazione $\frac{m^3}{nr}$. Queſta dunque è la maniera di levare la radice da quelle frazioni, che ſono perfette potenze, e niente a queſta è differente l' altra di levare la radice da grandezze compoſte di quantità intere, e di frazioni, ſe non che, prima di fare l' eſtrazione, ſi ha da avvertire di ridurre la intera quantità allo ſtato di quella frazione, a cui è data congiunta, come ſi riſcontra nell' eſempio ſeguente, che propone di trovare la radice cuba da $\frac{m^3 - 6mm + 12mm}{8} + 1$

Sua riduzione ad una intera frazione.

$$\frac{m^3 - 6mm + 12mm + 8}{8}$$

Radice cuba, che ſi trova $\frac{m - 2}{2}$

XVI.

XVI. Un altro caſo di eſtrazione di radice cuba potrebbe figurarſi in quelle quantità compoſte di termini razionali, ed irrazionali eſpreſsi con alcune frazioni, come ſarebbe $1\frac{2}{3} + \frac{29}{27}\sqrt{2}$; ſicchè, prima di venire alla eſtrazione di una tale radice, tutto il primo termine ha da eſſere ridotto ad una frazione; dopo ciò, ſi cerca di dare alla nuova frazione un denominatore uguale al denominatore della ſeconda; e finalmente multiplicati di nuovo i numeratori delle due frazioni pel denominatore comune, ſi cerca di annullare la frazione, e di avere una nuova quantità, per intraprendere ſopra di eſſa la eſtrazione della radice cuba dimandata.

Se ſi applicano per tanto queſte regole all' eſempio propoſto, ecco, che ſcrivendoſi $\frac{5}{3}$ ſi è ridotto il primo termine della quantità data ad una ſola frazione, e multiplicandoſi tanto il numeratore 5, che il denominatore 3 per 9, riſulta $\frac{45}{27}$, cioè una frazione con denominatore, uguale al denominatore della ſeconda frazione $\frac{29}{27}$. I numeratori di queſte due frazioni multiplicati pel loro denominatore, producono 1215, 783, che ſono due termini equivalenti a 45, e 29, dunque ſi è preparata in queſta operazione la quantità, da cui ſi dovrà eſtrarre la radice cuba, ſecondo le regole, al ſuo luogo ſtabilite, quando il binome riſulta da i termini razionali, e irrazionali, quale appunto è queſto binome $45 + 29\sqrt{2}$.

XVII. Non ſuole di ordinario incontrarſi altra neceſſità di dovere eſtrarre altre radici da altre potenze; ma, ſe pure queſte occorreſſero, le regole ſtabilite per le due precedenti, accomodate ſecondo la condizione del caſo, che foſſe propoſto, ci guiderebbero al buon termine della operazione per qualunque eſtrazione di radice dalle frazioni, acciocchè per mezzo di queſta poteſſe rimanere qualunque frazione impiccolita, fino al più baſſo grado di ogni ſua potenza. Con tutto queſto però non poſſiamo chiamarci ſodisfatti della ſcelta delle regole fino ad ora addotte, ſe ancora può naſcere un caſo, che ci coſtringe ad impiccolire o una quantità intera, o una minuzia, fino allo infinito; laonde prima di porre termine a queſto Capitolo, torna bene quì aggiugnere qual modo ſi abbia a tenere, occorrendo di doverſi applicare con buono eſito ad una tale operazione.

1. E quì è neceſſario prima di ogni altra coſa oſſerva-

 re,

re, che una maniera di operare l' impiccolimento di una quantità nell' infinito, richiede, che si faccia una piccola riflessione sopra la natura di certe lettere, delle quali comunemente si servono i Matematici in questo contingente, e sono m, n, r, s, t, &c. chiamate da essi esponenti di potenze indeterminate, perchè possono applicarsi a significare qualunque potenza seconda, terza, quarta, &c. e perchè di fatti col mezzo loro si scuopre il valore di una quantità incognita, o sia intera, ovvero sia parte d'intera, come di una frazione. Quello, che dunque in primo luogo si osserva sul particolare di queste lettere è, che ammettono queste esponenti di potenze indeterminate, tutte le operazioni delle esponenti determinate, potendosi sommarle, sottrarle, multiplicarle, e partirle, cioè ingrandirle, ed impiccolirle, all' usanza di quelle, ed ancora elevarle a qualunque altra potenza, come quì si vede negli esempj, che si portano per tutte queste operazioni, intraprese sopra queste due diverse potenze d^m, g^n.

I. $d^m + g^n$, II. $d^m - g^n$, III. $d^m g^n$, IV. $\frac{d^m}{g^n}$, V. d^{mn}, VI. $\overline{d+g}^{mn}$, VII. d^{2m}, VIII. d^{1m}, IX. $\overline{d-g}^m \times \overline{d-g}^n = \overline{d-g}^{m+n}$, X. $\overline{d+g}^m : = \overline{d+g}^n = \overline{d+g}^m = \overline{d+g}^{m-n}$

I primi quattro esempj appartengono alle quattro operazioni ordinarie del sommare, sottrarre, &c. nel quinto, e sesto compariscono le potenze incompleßa, e compleßa a^m, $\overline{d+g}^m$ elevate alla potenza n, m; nel VII, e nell' VIII si vede una potenza indeterminata, elevata alla seconda, e terza potenza; nel IX si vede, come due potestà della medesima quantità si multiplicano, e nel X si mostra, come si partono.

2. Ciò avvertito in ordine alle operazioni generali su queste potenze indeterminate, si dee in secondo luogo notare, qualmente è necessario di preparare con esse una formula, o canone, o regola, da osservarsi nell' atto d' intraprendere una qualche divisione, o estrazione di radice. Diverse sono quelle regole, che per un tale effetto sono state preparate, ma osservandosi in molte di queste una serie prolissa di termini, e di frazioni, che piuttosto confondono, di quello, che facilitano l' operazione, perciò, lasciate tutte le altre, si è fat-

è fatta scelta di quella preparata dal Neuton, come la meno prolissa, e la più chiara per un simile esercizio, e questa è tale, quale quì appresso si vede.

$$P\frac{m}{n} \dagger \frac{m}{n} AQ \dagger \frac{m-n}{2n} BQ \dagger \frac{m-2n}{3n} CQ \dagger \frac{m-3n}{4n} DQ \dagger \frac{m-4n}{5n} EQ \dagger \frac{m-5n}{6n} FQ \dagger \frac{m-6n}{7n} GQ \&c.$$

Per intelligenza di questa formula, si notino le lettere maiuscole, che in essa sono descritte, per averne i loro significati; la prima lettera P esprime il primo termine della quantità, che si dee dividere, o la prima parte della radice prossima di quella potenza, da cui si dee levare. La lettera Q esprime gli altri termini, che sono rimasti per operare in essi la divisione. L' ordine naturale delle altre lettere A, B, C, D, E, F esprimono tutti i quozienti trovati nella divisione. Le lettere minuscole m, n, che sono l' esponento della dignità, o contrassegni della divisione, hanno anche loro il proprio distintivo caratterizzato da cifre Aritmetiche, e la lettera m significa — 1 nella divisione, ed equivale sempre all' 1 nella estrazione delle radici, come la lettera n, quando si divide significa 1, e quando si leva la radice quadrata equivale a 2, quando si estrae la radice terza, equivale a 3, e così sempre cresce, secondo che cresce il valore di quella dignità, sopra della quale si opera.

XVIII. Presupposte queste cose, ora si dee manifestare quella regola, che si ha da tenere per avere l' abbassamento di una quantità, fino allo infinito, tanto con intraprendere la divisione della medesima, quanto colla estrazione della radice dalle sue potenze. Ecco come si dee operare volendosi fare la divisione sopra la quantità b per l' altra quantità $a \dagger c$, il quoziente ordinario di questa divisione risulterebbe $\frac{b}{a \dagger c}$; ma dovendosi dividere una tale quantità con questa nuova regola, si divide la frazione $\frac{b}{a \dagger c}$ in due parti, ciascuna si assegna al suo proprio carattere, secondo che si è quì sopra avver-

tito. Dunque farà $P = -\frac{b}{a}$, $eQ = + \frac{c}{a}$, come si prenderà la lettera $m = -1$, e si prenderà la lettera $n = 1$. Ordinata la formula generale in questa maniera, si comincia la divisione con un tal metodo. Si prende la prima lettera maiuscola A, e appresso ad essa si pone il carattere della egualità, dopo del quale succede il primo termine del canone $P\frac{m}{2}$, e poi di nuovo il segno $=$; appresso si scrive il primo termine della quantità, che si divide col suo divisore, scritto come una frazione così $a \frac{-b}{1}$, e rilevato di questa quantità il suo giusto valore $-\frac{b}{a}$, questo si pone nella stessa linea, preceduto dal solito segno $=$, e rimane trovato il primo quoziente, che quì si riporta, perchè serva di esemplare agli altri, che hanno da succedere $A = P\frac{m}{n} = a - \frac{b}{1} = \frac{b}{a}$.

Si seguita ora la operazione, e la lettera maiuscola B, che la precede, esprime il secondo termine, che si vuole trovare con questa divisione; dopo la lettera B si scrivono nella solita maniera i termini già indicati nel canone generale così $B = m$, $AQ = -1$, quindi fatto seguire il segno $\times$, il quoziente primo trovato $\frac{b}{a}$ si scrive dopo, e poi di nuovo si pone il segno $\times$ coll' avanzo rimasto nella quantità data da dividersi $\frac{c}{a}$, e per via della multiplicazione, si trova questo secondo quoziente, che è uguale $a - \frac{bc}{a^2}$. Trovato il secondo quoziente, si cerca il terzo, il quarto, il quinto, e qualunque altro, che si voglia, con premettere le solite formule del canone generale, e sempre dopo di esse il segno $\times$ col quoziente ultimo trovato, e con ripetere susseguentemente in infinito l' avanzo solito $+\frac{c}{a}$, preceduto anch' esso dal se-

gno

gno X, e in tal modo si arriva, se si vuole, ad impiccolire in infinito con questo mezzo una data quantità. Servirà riscontrare la regola data nell'esempio, acciocchè apparisca tutto artificio di questa operazione.

a † c. quantità, che dee dividere
b. termine da dividersi

Formula generale.

$$P=\frac{b}{a},\ Q=\dagger\frac{c}{a},\ m=-1,\ n=1$$

Termini della divisione.

$$A=P\frac{m}{n}=a-\frac{b}{1}=\frac{b}{a}$$

$$B=\frac{m}{n}AQ=-1.\times\frac{b}{a}\times\dagger\frac{c}{a}=-\frac{bc}{a^2}$$

$$C=\frac{m-n}{2n}BQ=-1\times-\frac{bc}{a^2}\times\dagger\frac{c}{a}=\dagger\frac{bcc}{a^3}$$

$$D=\frac{m-2n}{3n}CQ=-1\times\dagger\frac{bcc}{a^3}\times\dagger\frac{c}{a}=-\frac{bc^3}{a^4}$$

$$E=\frac{m-3n}{4n}DQ=-1.\times-\frac{bc^3}{a^4}\times\dagger\frac{c}{a}=\dagger\frac{bc^4}{a^5}$$

$$F=\frac{m-4n}{5n}EQ=-1\times\dagger\frac{bc^4}{a^5}\times\dagger\frac{c}{a}=\frac{bc^5}{a^6}\ \&c.$$

Quoziemte ordinato.

$$\frac{b}{a}-\frac{bc}{a^2}\dagger\frac{bcc}{a^3}-\frac{bc^3}{a^4}\dagger\frac{bc^4}{a^5}-\frac{bc^5}{a^5}\&c.$$

Questo esempio, che è stato proposto in lettere, può servire per il caso ancora, se fosse proposto in numeri, cioè, se queste lettere fossero applicate ad esprimere un qualche nume-

me-

mero, come l'uno la lettera b, il 2 la lettera a, e l' 1 la lettera c, che però il valore della frazione $\frac{b}{a \dagger c}$ ſarebbe lo steſſo, che il valore di queſt' altra $\frac{1}{2 \dagger 1}$, ſicchè diſtinte le ſue parti con i ſoliti contraſsegni generali, come ſi è fatto nella prima frazione, ſi promoverebbe la diviſione in infinito di queſta frazione numerica in una ſerie di quozienti, che tanto più ſi accoſterebbero al vero, quanto più i ſuoi termini ſi vedeſſero ſminuire; al contrario di quello, che accaderebbe, quando creſceſſero, ed ecco da che deriva, che una ſerie di frazioni, ſi dice avere i termini convergenti, ed un altra avergli divergenti, cioè per queſto, perchè o ſi accoſtano, o ſi diſcoſtano dal vero valore di quella quantità, ſopra di cui è intrapreſa la diviſione.

XIX. La ſeconda maniera d' impiccolire fino all' infinito la quantità, che non è perfetta potenza, ſi dimoſtra colla eſtrazione della radice, e ſtando ſulla formula già ſtabilita, ecco il modo, che ſi dee tenere per queſto effetto. Data la quantità, da cui ſi ha da eſtrarre la radice per eſempio quadrata, ſi dee queſta ſpartire per le ſue lettere, che la hanno da indicare P, Q, eſprimendo il P della quantità data la proſſima radice, e ciò, che vi è di avanzo laſciandolo, che ſi eſprima dalla lettera Q, con prendere poi la lettera m, e n, che è eſponente della dignità, con quel valore, che gli compete, facendo cioè $m = 1$. $n = 2$. Figuriamoci per tanto, che ſia data queſta quantità $f^2 \dagger b$, per eſtrarre dalla medeſima la radice quadrata; dovendoſi operare in eſſa quanto ora ſi è avvertito, ecco tutta la preparazione, quale ha da eſſere fatta, prima di intraprendere la operazione andantemente.

$$P = f^2,\ Q = \dagger \frac{b^2}{f^2},\ m = 1,\ n = 2.$$

Venendo ora alla operazione, ſi trova primieramente la radice quadrata di f^2, e trovata queſta, ſi comincia la diviſione degli avanzi con queſto ordine. Premeſſa quella parte del canone generale, che dà regola al termine, che ſi dee trovare, ſempre ſe gli fanno ſuccedere tre altri termini, preceduti da i loro ſegni o poſitivi, o negativi, con framezzare a i medeſimi il ſegno della multiplicazione $\times$, il primo di queſti

ſti

sti tre termini mostra il valore di quella parte del canone generale premesso alla operazione, per secondo termine sempre si pone quello, che è stato trovato nella operazione precedente, come il terzo termine esso ancora è sempre il medesimo, che nella formula fu scritto sotto la lettera Q, si multiplicano poi questi tre termini fra di loro, e nel risultato si vede il secondo quoziente, che dee risultare da una tale operazione. Nulla di più si opera per ritrovare il terzo, il quarto, il quinto, e qualunque altro. Dunque con questa regola costantissimamente avvertita, riesce di trovare la radice quadrata, sì dalle quantità intere, che dalle frazioni, che non sono perfette potenze, che infinitamente si accosti alla vera radice, o che dalla vera differisca con una differenza sempre minore, e finalmente ancora infinitamente piccola. Il contenuto di questa regola si può riscontrare esattamente, osservato negli esempj, che quì si aggiungono, per far vedere la maniera di operare con essa, qualunque sia la quantità data, per estrarre da essa la radice quadrata, o la radice cuba, o qualunque altra radice.

Esempio I.

Si levi la radice prossima quadrata da $f^2 \dagger b^2$.

Formula generale.

$$P = f^2 . \; Q = \dagger \frac{b^2}{f^2} . \; m = 1, n = 2$$

Operazione.

$$A = P\frac{m}{n} = f^2 \times \frac{1}{2} = f$$

$$B = \frac{m}{n} A Q = \dagger \frac{1}{2} f \times \dagger \frac{b^2}{f^2} = \dagger \frac{b^2}{2f}$$

$$C = \frac{m-n}{2n} B Q = -\frac{1}{4} \times \frac{b^2}{2f} \times \dagger \frac{b^2}{f^2} = -\frac{b^4}{8f^3}$$

$$D = \frac{m-2n}{3n} C Q = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2} \times -\frac{b^4}{8f^3} \times \dagger \frac{b^2}{f^2} = \dagger \frac{b^6}{16f^5}$$

E =

$$E = \frac{m-3n}{4n} DQ = -\frac{5}{8} \times \dagger \frac{b^6}{16f^5} \times \dagger \frac{b^2}{f^2} = -\frac{5b^8}{128f}$$

$$F = \frac{m-4n}{5n} - \frac{7}{10} \times - \frac{5b^8}{128f^7} \times \dagger \frac{b^2}{f^2} = \dagger \frac{35b^{10}}{1280f^9} \text{ \&c.}$$

e così in infinito; dunque la radice proſſima quadrata della data quantità ſarà

$$f \dagger \frac{b^2}{2f} - \frac{b^4}{8f^3} \dagger \frac{b^6}{16f^5} - \frac{5b^8}{128f^7} \dagger \frac{35b^{10}}{1280f^9} \text{ \&c.}$$

XX. Quanto ſi è avvertito per l' eſtrazione della radice ſeconda, ſi può facilmente applicare alla eſtrazione della radice cuba, non occorrendo per queſta operazione fare altro, a riſerva di mutare nella formula il valore della eſponente n, equivalendo queſta lettera al 3. Si oſſervi la ſoſtanza di queſta regola nel ſeguente.

Eſempio II.

Dalla $\sqrt{f^3 - b^3}$ *ſi levi la radice terza, o cuba.*

Formula generale.

$$P = f^3, \quad Q = -b^3, \quad \dagger = 1, \quad n = 3$$

Operazione.

$$A = P^{\frac{m}{n}} = f^3 \times \frac{1}{3} = f^2$$

$$B = \frac{m}{n} AQ = -\frac{1}{3} f \times - \frac{b^3}{f^3} = \dagger \frac{b^3}{3f^2}$$

$$C = \frac{m-n}{2n} BQ = -\frac{1}{3} \times \dagger \frac{b^3}{3f^6} \times \dagger \frac{b^3}{f^3} = -\frac{b^6}{9f^5}$$

$$D = \frac{m-2n}{3n} CQ = -\frac{5}{9} \times - \frac{b^6}{9f^5} \times - \frac{b^3}{f^3} = \dagger \frac{5b^9}{81f^8}$$

$$E = \frac{m-3n}{4n} DQ = -\frac{2}{3} \times \dagger \frac{5b^9}{81f^8} - \frac{b^3}{f^3} = -\frac{10b^{12}}{243f^{11}}$$

$$F = \frac{m-4n}{5n} EQ = -\frac{11}{15} \times - \frac{10b^{12}}{243f^{11}} \times - \frac{b^3}{f^3} = \dagger \frac{110b^{15}}{3645f^{14}}$$

e così

e così degli altri in infinito; dunque, anche in questo esempio si è ritrovato, che la radice terza di $\sqrt{f^3 - b^3}$ dee essere

$$f + \frac{b^3}{3f^2} - \frac{b^6}{9f^5} + \frac{5b^9}{81f^8} - \frac{10b^{12}}{243f^{11}} + \frac{110b^{15}}{3645f^{14}} \ \&c.$$

cosa, che si voleva sapere, per far vedere in qual modo maraviglioso si sia potuto arrivare a scuoprire una regola, che c' insegnasse l' arte d' impiccolire le quantità nello infinito, quale appunto è quella della divisione, o della estrazione delle radici.

Nel terzo esempio, che ora si fa seguire, si vuole levare la radice da una quinta potenza, che poi l' operato per essa facilmente si estenderà a qualunque altra.

Esempio III.

Si dimanda la radice quinta di $-f^5 + b^4 f + b^5$

Formula generale.

$$P = -f^5, \quad Q = +\frac{b^4 f + b^5}{f^5} \quad m = 1. \ n = 5$$

Operazione.

$$A = P^{\frac{m}{n}} = -f^5 \times \frac{1}{5} = -f$$

$$B = \frac{m}{n} A\,Q = +\frac{1}{5} f \times +\frac{b^4 f + b^5}{f^5} = +\frac{b^4 f + b^5}{5f^4}$$

$$C = \frac{m-n}{2n} B\,Q = -\frac{2}{5} \times +\frac{b^4 f + b^5}{5f^4} \times +\frac{b^4 f + b^5}{f^5} = -\frac{2b^8 f^2 + 4b^9 f + b^{10}}{25f^9}$$

$$D = \frac{m-2n}{3n} C\,Q = -\frac{3}{5} \times -\frac{2b^8 f^2 + 4b^9 f + b^{10}}{25f^9} \times +\frac{b^4 f + b^5}{f^5}$$

$$= +\frac{6b^{12} f^3 - 6b^{13} f^2 - 9b^{14} f + 3b^{15}}{125f^{14}} \ \&c.$$

dunque la radice trovata, ſecondo l' eſempio propoſto dee eſſere

$$-f+\frac{b^4f+b^5}{5f^4}-\frac{2b^8f^2+4b^9f+b^{10}}{25f^9}+\frac{6b^{12}f^3-6b^{13}f^2-9b^{14}f+3b^{15}}{125f^{14}}$$

XXI. Non meno colle ſtabilite regole, ſi vede la maniera di eſtrarre qualunque radice da qualunque quantità per approſſimazione, quando non è perfetta potenza, di quello, che compariſca pure un altro metodo, tutto a propoſito, o per inalzare una quantità ad una determinata potenza, come ſarebbe per eſempio la quantità $b+e$ ad una quinta potenza, o per levare dalla potenza di un ordine la radice di un altra, come ſarebbe la radice cuba da una quarta potenza. Il buono eſito di queſte due, come delle altre operazioni di queſta fatta, non richiede nulla di più, di quanto ſi è notato nelle precedenti, ſolo che va mutato il valore delle lettere, chiamate eſponenti, ſecondo il caſo dimandato, richiedendo il primo de i due ſtabiliti, che la lettera m equivalga al 5, e la lettera n all' 1. Siccome richiede il ſecondo, che il valore della prima ſia 4, e che ſia il 3 il valore della ſeconda; onde ſi vede, come una tal regola con una piccoliſſima mutazione, può ſervire a tante belle operazioni nel particolare sì della eſtrazione delle radici, che della diviſione, quando oltre l' intraprenderla co i diviſori ordinarj, ſi vuole qualche volta fare per le potenze, o per le quantità radicali, laſciando ora di nominare tutti gli altri vantaggi, che col ſuo mezzo riporteremo, applicati alla ſoluzione di diverſi problemi.

XXII. Dopo di avere ſtabilite le regole tutte, che ſervono all' ingrandimento, ed impiccolimento della quantità diſcreta, conſiderata, come una qualche frazione aſſolutamente, o come un miſto d' intera quantità, e di frazione, non rimane altra coſa più propria ad eſſere quì apportata nel finire queſto Capitolo, quanto che un avvertimento, con cui ſi dichiara, come ſi poſſa uno accertare della bontà di tutte le precedenti operazioni, la quale ben preſto ſi riſcontra, ſe s' intraprenda l' operazione contraria a quella, che è ſta-

è ftata data, perchè fi produca la fua riprova. Diftrugge la divifione l'operato della multiplicazione, ficchè dato, che fia l'una, o l'altra di quefte, con quella, che non è data, fi farà prova dell' altra, come l' addizione potrà moftrare la bontà della fottrazione, e la fottrazione quella della addizione, e generalmente tutte le riprove delle operazioni, fatte fopra gl' interi, poffono convenire, e realmente fi adattano per riprova delle operazioni de i rotti. Le riprove di quelle operazioni, colle quali fi è una quantità impiccolita, fino allo infinito, non poffono affegnarfi fotto le regole generali, ma per quefto effetto vi è un Aritmetica fingolare, che fi chiama Aritmetica degli infiniti, onde per avere anche in pronto la maniera dell' operare, fecondo quefta, fi offerverà quanto quì apprefso aggiugneremo.

C A P. IV.

Della Aritmetica degli infiniti.

§. I.

Del modo di preparare, e le ferie delle operazioni, che fopra di effe fi fanno.

I. NElla Aritmetica degli infiniti fi dà il metodo di fommare fomme compofte di una ferie infinita di termini, e le operazioni tutte, che per di lei mezzo fi intraprendono, è veramente cofa fingolare, come mai fi fanno fervire alla foluzione de i problemi, ftata per tanti fecoli non conofciuta, anzi giudicata di più impoffibile. Mentre noi quì intraprendiamo ad efporre quelle regole di operare con effa, ci reftringhiamo a quelle fole, che appartengono all' ingrandimento, o all' impiccolimento di qualunque ferie infinita, riferbando di parlare in altro luogo fopra quello, che appartiene alla maniera di trovare, o di palefare quelle ragioni, che fra le medefime ferie infinite fi poffono ritrovare.

Non fi può porre in dubbio oramai ciò, che il confenfo della maggior parte de i Savj ha moftrato di approvare, in ordine al riconofcere di comune confentimento la ferie in-

finita delle parti nella quantità. Sia che dunque questa quantità può considerarsi o semplice, o composta, qualunque ella si prenda, dee concepirsi come un risultato da parti infinite, che può risolversi nelle medesime infinite parti, senza che per questo si giudichi, che ogni quantità sia uguale all'altra, e tutte uguali fra loro, perchè non si conosce per conseguenza legittima quella, che si deduce dalla premessa, che asserisce essere in qualunque quantità parti infinite, se può ognuno con facilità rimanere persuaso, come si trovi un infinito maggiore di un altro, sul cui fondamento si abbia da stabilire, che ancora una quantità con tutto il suo numero infinito di parti, sarà maggiore, o minore di un altra quantità, che contiene anche essa tante parti, che servono a preparare una serie infinita. Quella serie, che comincia da questa nota o, e va seguendo secondo l'ordine naturale de i numeri in infinito, è il primo infinito, che si può ritrovare in una quantità. Tutte le altre serie d' infiniti si hanno nelle continuazioni delle potenze, o seconde, o terze, o quarte, &c. o da tutte quelle combinazioni possibili, risultate col mezzo loro, come si potrà riscontrare negli esempj seguenti.

I. *serie infinita secondo l'ordine naturale de i numeri, o delle lettere.*

o. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. &c.
o. *a. b. c. d. e. f. g. b. i. k. l. m.* &c.

II. *serie secondo l'ordine de i quadrati.*

o. 1. 4. 9. 16. 25. 36. 49. 64. &c

III. *serie secondo l'ordine de i cubi.*

o. 1. 8. 27. 64. 125. 216. 343. &c.

e così si averebbero le serie infinite delle altre potenze. Ma come che le potenze, altre hanno lo esponente loro positivo, e altre lo esponente negativo, per questo gli esempj seguenti mostrano la serie infinita nell'uno, e nell'altro caso, colla differenza, che è fra di loro quando parte la prima dal zero

zero per arrivare all' infinito suo alzamento a^{∞}, come pure quando sotto la unità si muove la seconda per tanto impiccolirsi, che finalmente giunga all' infinito, ed a questo è giunta, quando si vede la sua espressione fatta con questa nota $a^{-\infty}$.

I. *serie nelle potenze positive*.

$a^0, a^1, a^2, a^3, a^4. a^5, a^6, a^7, a^8, a^9, a^{10}, a^{11}, a^{12}, a^{13}, a^{14}$, &c. a^{∞}

II. *serie nelle potenze negative*.

$a^{-\infty}$ &c. $a^{-12}, a^{-11}, a^{-10}, a^{-9}, a^{-8}, a^{-7}, a^{-6}, a^{-5}, a^{-4}, a^{-3}, a^{-2}, a^{-1}, a^{-0}$.

III. *serie uguale alla seconda, quantunque espressa in diversa maniera*.

$\frac{1}{a^{-\infty}}$ &c. $\frac{1}{a^{-12}}\ \frac{1}{a^{-11}}\ \frac{1}{a^{-10}}\ \frac{1}{a^{-9}}\ \frac{1}{a^{-8}}\ \frac{1}{a^{-7}}\ \frac{1}{a^{-6}}\ \frac{1}{a^{-5}}\ \frac{1}{a^{-4}}\ \frac{1}{a^{-3}}\ \frac{1}{a^{-2}}\ \frac{1}{a^{-1}}$.

Si deduce da questa espressione, che ogni qual volta l' esponente della potenza è negativo, equivale tal potenza ad una frazione, che ha costante l' unità per numeratore, e per denominatore una potenza positiva.

Si deduce in secondo luogo, come si conosce facilmente il valore di ciascheduna espressione, perchè dato che sia $a=4$ a^{-0}, a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, a^{-4}, &c. corrisponderà ad $\frac{1}{4}\ \frac{1}{16}\ \frac{1}{64}\ \frac{1}{225}$ &c. come $a^0\ a^1\ a^2\ a^3\ a^4$ &c. sarà lo stesso, che 1. 4. 16. 64. 225. &c. Come equivale alla seconda questa terza serie, così la quarta, e quinta, che ora si aggiungono, sono le medesime, e sebbene una si potesse lasciare, nientedimeno si aggiugne, per fare avvertiti tutti quei modi, con i quali la medesima cosa si può esprimere, derivati dalla divisione, che può avere luogo sopra i termini della seconda serie, e sopra quelli della quarta.

IV. *serie delle radici della quantità chiamata* a.

$\sqrt[\infty]{a}$ &c. $\sqrt[12]{a}, \sqrt[11]{a}, \sqrt[10]{}, \sqrt[9]{a}, \sqrt[8]{a}, \sqrt[7]{a}, \sqrt[6]{a}, \sqrt[5]{a}, \sqrt[4]{a}, \sqrt[3]{a}, \sqrt{a}, a$

V. *serie uguale alla quarta*.

$a^{\frac{1}{\infty}}$ &c., $a^{\frac{1}{12}}, a^{\frac{1}{11}}, a^{\frac{1}{10}}, a^{\frac{1}{9}}, a^{\frac{1}{8}}, a^{\frac{1}{7}}, a^{\frac{1}{6}}, a^{\frac{1}{5}}, a^{\frac{1}{4}}, a^{\frac{1}{3}}, a^{\frac{1}{2}}, a$ &c.

III. Altre serie di quantità infinite si posson formare colla estrazione delle radici seconde, terze, quarte, &c. da i numeri

meri eſpreſſi, o ſecondo l'ordine loro naturale, o ſecondo la ſerie naturale de i numeri quadrati, de i numeri cubi, o altri nell'infinito; come altre ſerie ſi producono, ſe ſi ſommino fra loro i termini di diverſe ſerie, ſe ſi multiplichino, ſe ſi partano, o ſe uno ſi ſottragga dall'altro, e ſe poi tutti i riſultati da queſte operazioni ſi ſublimino a diverſe potenze. In ſomma ſono tante le ſerie infinite, che ſi poſsono preparare, quanti ſono i caſi delle combinazioni delle quantità, che non ſono meno, che infiniti.

IV. Unicamente ſi aggiugne quella ſerie, che ſi trova in termini, che hanno tutti per eſponente lo zero, e viene chiamata ſerie degli uguali, e queſta è quella ſerie, che deriva da quel le quantità, che ſi dividono fra di loro, come $\frac{a}{a} \frac{b}{b} \frac{c}{c} \frac{d}{d} \frac{e}{e} \frac{f}{f} \frac{g}{g}$ &c. eſsendo realmente $\frac{a}{a}$ la ſteſsa coſa, che a^1 diviſo per a^1, e perchè non può produrre altro quoziente queſta grandezza a^1, diviſa per a^1, ſe non che queſto a^{1-1}, ovvero a^0, però giacchè ſi vede l'uguaglianza in tutta queſta ſerie ella è detta ſerie degli uguali, dove le altre ſono chiamate ſerie delle potenze. o. $a^0 b^0 c^0 d^0 e^0 f^0 g^0 h^0$ &c. è un eſempio di queſta ſerie, in ordine a cui ſi nota pure, che dove queſte medeſime lettere ſono date per fare una ſerie infinita corriſpondente alla ſerie naturale di queſti numeri 1. 2. 3. 4. 5. 6. &c., e non ſi trova ſopra di eſse alcuna eſponente, s'intende, che la loro eſponente dee eſsere la unità, ſegno della prima potenza, come formerà la ſerie delle radici ſeconde queſta nota $\frac{1}{2}$, e moſtreranno la ſerie delle terze potenze, delle quarte, &c. queſti altri ſegni $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, &c. che ſe nel luogo loro ſi vedeſsero poſti queſti altri $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{4}$, e le quantità foſsero ſcritte a queſto modo $a^{\frac{2}{3}}$, $b^{\frac{2}{4}}$, &c. ſimili eſpreſsioni moſtrerebbero le radici terze, e le radici quarte di ſerie di quadrati, come nella ſteſsa maniera ſi moſtrerebbero con altre eſponenti le altre radici di queſte ſerie medeſime.

V. Venendo ora a quei contraſsegni ſtabiliti in certe lettere maiuſcole, per indicare i riſultati di tutte le operazioni ordinarie, che ſono proprie delle ſerie infinite. ſi ſcelgono due lettere, che ſono A, R; la prima vuol ſignificare il numero di tutti i termini della ſerie. La ſeconda eſprime la

con-

condizione di qualsisia serie, e tutte due legate insieme così AR, fanno conoscere il valore di tutta la serie.

La lettera R talvolta si trova senza alcuno esponente, ed altre volte ha per esponente 2. 3. 4. 5. 6. &c., e qualche volta pure $\frac{1}{3}$, ovvero $\frac{2}{3}$, e con questi segnali si manifesta la condizione di quelle potenze, che compongono le serie, alle quali tale lettera è applicata, volendo significare la lettera R scritta sola, la quantità delle serie degli eguali, e la medesima lettera espressa così R^2, R^3 &c. suol significare, che i termini di quella serie sono seconde, terze, o quarte potenze, e finalmente notata in tal guisa $R^{\frac{1}{3}}$, vuol dire una serie di terze radici, e notata in questo altro modo $R^{\frac{2}{3}}$, esprime una serie di radici terze di quadrati.

Questa lettera R maiuscola si cangia per qualche occasione nella r minuscolo, e ciò accade, quando i termini delle due serie, sopra le quali si opera, sono differenti, come quando una serie è di eguali, e l'altra serie è di terze potenze, e in questo caso l'ultimo termine della serie de i cubi si esprime col minuscolo r.

VI. Per determinare ora il valore di ciascheduna serie infinita, primieramente si determina il valore della serie degli eguali, e si dice, che corrisponde alla unità, mentre l'uno multiplicato per una serie infinita di unità, non può produrre mai altro, che la medesima unità; dunque il valore di questa serie sarà $= 1$.

Il valore della serie de i numeri, che continuano in infinito, secondo il loro ordine naturale, corrisponde ad $\frac{1}{2}$. Si riscontra questo valore dalla distribuzione de i termini di questa serie in quell'ordine, che a loro conviene per far comparire il risultato, che si è stabilito in $\frac{1}{2}$, e la distribuzione è tale

$$\frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2}. \quad \frac{0+1+2}{2+2+2} = \frac{3}{6}. \quad \frac{0+1+2+3}{3+3+3+3} = \frac{6}{12}$$

$$\frac{0+1+2+3+4}{4+4+{+}+4+4} = \frac{10}{20}. \quad \frac{0+1+2+3+4+5}{5+5+5+5+5+5} = \frac{15}{30} \text{ \&c.}$$

si vede dunque, come è bene stabilito il valore di questa serie infinita, e che realmente dee essere $= \frac{1}{2}$.

II

Il valore della ſerie infinita de i quadrati ſi trova, fatta l' operazione, come la precedente, che corriſponde ad $\frac{1}{3}$, come ſi trova corriſpondere ad $\frac{1}{4}$, ad $\frac{1}{5}$, ad $\frac{1}{6}$, &c. il valore delle ſerie infinite, formate colle altre potenze, come dagli eſempj, che quì ſi aggiungono, ſi può riſcontrare.

Eſempio per la ſerie de i quadrati.

$$\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6},\ \frac{0+1+4}{4+4+4}=\frac{5}{12}=\frac{4}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}$$

$$\frac{0+1+4+9}{9+9+9+9}=\frac{14}{36}\ \text{cioè}\ \frac{6}{18}+\frac{1}{18}\ \text{cioè}\ \frac{1}{3}+\frac{1}{18}$$

$$\frac{0+1+4+9+16}{16+16+16+16+16}=\frac{30}{80}\ \text{cioè}\ \frac{3}{8}\ \text{oppure}\ \frac{9}{24}$$

cioè $\frac{8}{24}+\frac{1}{24}$ cioè $\frac{1}{3}+\frac{1}{24}$, e così degli altri. Non renda ſoſpetta la verità della regola generale ſtabilita per la ſerie de i quadrati, quale è, che la ſomma de i termini di queſta ſerie corriſponda ad $\frac{1}{3}$, il vedere nella operazione avanzare ſempre qualche coſa ſopra del terzo, cioè, prima $\frac{1}{6}$, poi $\frac{1}{12}$, poi $\frac{1}{18}$, poi $\frac{1}{24}$, &c. vale a dire un avanzo coſtantemente uguale alla radice quadrata dell' ultimo termine della ſerie, multiplicata per 6, perchè ſcemando ſempre queſto avanzo alla ſerie infinita, dee riſolverſi finalmente nello ſteſſo nulla, con rimanere ſemplicemente $\frac{1}{3}$, e la ſteſſa coſa accaderà negli avanzi, che compariranno negli eſempj delle ſerie ſeguenti, e però non ſerviranno ad alterare la legge ſtabilita anche per eſſi.

Eſempio per la ſerie de i cubi.

$$\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}.\ \frac{0+1+8}{8+8+8}=\frac{9}{24}=\frac{6}{24}+\frac{3}{24}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$$

$$\frac{0+1+8+27}{27+27+27+27}=\frac{36}{108}=\frac{4}{12}=\frac{3}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\ \text{\&c.}$$

Eſem-

Esempio per la serie delle quarte potenze.

$$\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{2}=\frac{5}{10}=\frac{2}{10}+\frac{3}{10}=\frac{1}{5}+\frac{3}{10}$$

$$\frac{0+1+16}{16+16+16}=\frac{17}{48}=\frac{85}{240}=\frac{48}{240}+\frac{37}{240}=\frac{1}{5}+\frac{37}{240}$$

Esempio per la serie della quinta potenza.

$$\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{2}=\frac{6}{12}=\frac{2}{12}+\frac{4}{12}=\frac{1}{6}+\frac{4}{12}$$

$$\frac{0+1+32}{32+32+32}=\frac{33}{96}=\frac{198}{576}=\frac{96}{576}+\frac{102}{576}=\frac{1}{6}+\frac{102}{576}.$$

Si potrebbero continuare gli esempj per tutte le serie dell' altre potenze, e si troverebbe la somma loro $=\frac{1}{7},\ \frac{1}{8},\frac{1}{9},\frac{1}{10}$ &c.

VII. Quando si è avvertito, che l' avanzo sopra del giusto, che corrisponde al valore di ciascuna serie, equivale alla radice dell' ultimo termine multiplicata pel denominatore del medesimo avanzo, non si dee intendere sì generalmente, che si possa applicare agli avanzi di tutte le altre serie; perchè realmente non si verifica, se non che nella serie de i quadrati, e de i cubi; dunque quello non si dee prendere per regola generale, ma solo ciò, che principalmente in quel luogo si è notato, in proposito di tutti gli avanzi, i quali, quantunque si trovino in tutte le serie delle potenze più alte, tuttavia nella serie infinita scemano talmente, che svaniscono affatto, e per questo non vengono considerati.

VIII. Essendo dunque stabiliti i termini corrispondenti alla serie infinita di tutte le potenze, è facile fissare i termini, che corrispondono a ciascuna serie infinita di tutte le radici delle stesse potenze. L' equivalente trovato per ciascuna serie di potenza, è stato espresso in una frazione $\frac{1}{1},\frac{1}{2},$ $\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},$ &c. dunque anche una frazione esprimerà l' equi-

valente della ferie delle radici quadrate, cube, &c. di qualunque potenza, con quefta regola, che il numeratore farà fempre il numero della radice, che fi cercherà, e il denominatore fupererà il numeratore di una unità, fe la ferie di radici quadrate, cube, &c. è di prima potenza; e lo fupererà di maggior numero di unità, fe la ferie, che farà data delle radici, efprimerà qualunque altra potenza, fuori della prima, e quefte unità, delle quali crefcerà il denominatore fopra il numeratore, conterranno il numero della potenza prefa nella ferie data; per efempio, fe fi dimandi l' equivalente della ferie infinita delle radici cube della fefta potenza, quefto dee effere $\frac{3}{9}$. Il numeratore di quefta frazione è il 3, perchè la radice cuba ha per efponente il 3. Il 9 dee effere il denominatore, perchè effendo il 6 il numero, con cui fi numera la fefta potenza, fe è fommato col 3 numeratore della frazione, rifulta per l' appunto il 9, e poi $\frac{3}{9}$ è l' equivalente richiefto. Per tanto con quefto metodo potrà ciafcuno determinare con prontezza qualunque altro equivalente per tutte le ferie infinite delle radici

feconde $\sqrt[2]{0}, \sqrt[2]{1}, \sqrt[2]{2}, \sqrt[2]{3}, \sqrt[2]{4}, \sqrt[2]{5}, \sqrt[2]{6}, \sqrt[2]{7}, \sqrt[2]{8}, \sqrt[2]{9}$, &c.

terze $\sqrt[3]{0}, \sqrt[3]{1}, \sqrt[3]{2}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{7}, \sqrt[3]{8}, \sqrt[3]{9}$, &c.

quarte $\sqrt[4]{0}, \sqrt[4]{1}, \sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{3}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[4]{5}, \sqrt[4]{6}, \sqrt[4]{7}, \sqrt[4]{8}, \sqrt[4]{9}$ &c.
&c. delle potenze.

IX. Ancora per determinare gli equivalenti di quelle ferie, che contengono radici feconde, terze, fefte, &c. di cubi di quarte, di quinte, di fettime potenze, &c. fi offervi, che bafta fommare infieme il numeratore, e denominatore della efponente de i termini di quefta ferie, con lafciare per denominatore alla frazione, con cui fi efprime l' equivalente, il denominatore medefimo della efponente; dunque delle feguenti ferie di radici feconde di potenze terze, e quinte
$a^{\frac{3}{2}}\ b^{\frac{3}{2}}\ c^{\frac{3}{2}}\ d^{\frac{3}{2}}\ e^{\frac{3}{2}}\ f^{\frac{3}{2}}$, &c. $a^{\frac{5}{2}}\ b^{\frac{5}{2}}\ c^{\frac{5}{2}}\ d^{\frac{5}{2}}\ e^{\frac{5}{2}}\ f^{\frac{5}{2}}$, &c. farà l' equivalente $\frac{5}{2}$, e $\frac{7}{2}$; e delle feguenti ferie delle radici terze

di quarte $a^{\frac{4}{3}}\ b^{\frac{4}{3}}\ c^{\frac{4}{3}}\ d^{\frac{4}{3}}\ e^{\frac{4}{3}}\ f^{\frac{4}{3}}$)
di fettime $a^{\frac{7}{3}}\ b^{\frac{7}{3}}\ c^{\frac{7}{3}}\ d^{\frac{7}{3}}\ e^{\frac{7}{3}}\ f^{\frac{7}{3}}$) *potenze*
di decime $a^{\frac{10}{3}}\ b^{\frac{10}{3}}\ c^{\frac{10}{3}}\ d^{\frac{10}{3}}\ e^{\frac{10}{3}}\ f^{\frac{10}{3}}$ &c.)

l' equi-

l' equivalente dovrà essere $\frac{7}{3}$, $\frac{10}{3}$, $\frac{13}{3}$, ovvero, $\frac{3}{7}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{3}{13}$, come sarà $\frac{11}{6}$, ovvero $\frac{6}{11}$, l'equivalente di questa serie $a^{\frac{5}{6}}\, b^{\frac{5}{6}}\, c^{\frac{5}{6}}\, d^{\frac{5}{6}}\, e^{\frac{5}{6}}\, f^{\frac{5}{6}}$, &c e quello generalmente di ciascuna altra serie, si dirà, che è l' equivalente, che risulterà dalla pratica della regola quì stabilita.

X. Premesse tutte queste cognizioni, è cosa facile intraprendere le somme, e le multiplicazioni delle serie infinite con tutte le altre operazioni, che si possono fare sopra le medesime. Se due sono le serie da sommarsi, una di prime potenze, l' altra di seconde, si prende l' equivalente di ciascheduna serie, e si pone alla destra delle due lettere maiuscole A R, e dato alla lettera R il proprio esponente 2, si framezza il segno †, e si esprime il valore delle date somme, con sommare fra loro gli equivalenti già presi.

Ecco dunque, che essendo il valore della serie della prime potenze $\frac{1}{2}$, ed il valore della serie delle seconde $\frac{1}{3}$, si scriverà il risultato delle somme in tal modo $\frac{1}{2}\,AR^2 \dagger \frac{1}{3}\,AR^2$, e l' equivalente proprio dovrà essere $\frac{5}{6}\,AR$, perchè tal risultato lo dà la somma delle frazioni premesse alle lettere maiuscole A R. Dove le somme date rappresentassero serie di quadrati, di serie doppie di cubi, e serie di quarte potenze, premesse avanti, e dopo alle lettere maiuscole le proprie equivalenti, ed esponenti, si troverebbe l' equivalente giusto di tutte queste somme, che si esprimerebbe in questo modo $\frac{1}{3}\,AR^4 \dagger \frac{2}{4}\,AR^4 \dagger \frac{1}{5}\,AR^4 = \frac{62}{60}\,AR^4$, e colla medesima regola si raccoglierebbero le serie di terze potenze, di triple di quarte, di triple di quinte, e di seste, scrivendosi $\frac{1}{4}\,AR^6 \dagger \frac{3}{5}\,AR^6 \dagger \frac{3}{6}\,AR^6 \dagger \frac{1}{7}\,AR^6 = \frac{209}{140}\,AR^5$. Per vedere, come le serie date da sommarsi, abbiano da distribuirsi, si aggiungono gli esempj seguenti.

Esempio I.	*Esempio II.*
$0 \dagger 0$	$0 \dagger 0 \dagger 0$
$a \dagger a^2$	$a^2 \dagger 2a^3 \dagger a^4$
$b \dagger b^2$	$b^2 \dagger 2b^3 \dagger b^4$
$c \dagger c^2$	$c^2 \dagger 2c^3 \dagger c^4$
$d \dagger d^2$	$d^2 \dagger 2d^3 \dagger d^4$
&c. &c.	&c. &c. &c.
$R^3 \dagger R^2$	$R^4 \dagger 2R^2R^2 \dagger R^4$
$\frac{1}{2}\,AR^2 \dagger \frac{1}{3}\,AR^2 = \frac{5}{6}\,AR$	$\frac{1}{3}\,AR^4 \dagger \frac{2}{4}\,AR^4 \dagger \frac{1}{5}\,AR^4 = \frac{62}{60}\,AR^4$

Le due ſerie, che nel primo eſempio ſi danno, rappreſentano le prime, e le ſeconde potenze. Le tre ſerie, che ſi veggono nell' Eſempio II. moſtrano le ſeconde, le terze raddoppiate, e le quarte. Le quattro, che ſeguono nel III. *moſtrano le terze, le quarte, e le quinte, preſe tre volte.*

Eſempio III.

$$\begin{array}{l} \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \\ a^3 \dagger 3a^4 \dagger 3a^5 \dagger a^6 \\ b^3 \dagger 3b^4 \dagger 3b^5 \dagger b^6 \\ c^3 \dagger 3c^4 \dagger 3c^5 \dagger c^6 \\ \&c.\ \&c.\ \&c.\ \&c. \\ \overline{R^6 \dagger 3R^4R^2 3R^2R^4 \dagger R^6} \\ \underline{\tfrac{1}{4}AR^6 \dagger \tfrac{3}{5}AR^6 \dagger \tfrac{3}{6}AR^6 \dagger \tfrac{1}{7}AR^6 = \tfrac{209}{140}AR^6} \end{array}$$

Dalle ſomme in queſti tre eſempj riportate, ſi vede, come gli ultimi termini di ogni ſomma hanno da avere ſotto di ſe la lettera R notata colla eſponente della potenza maggiore, che ſia eſpreſſa nelle dette ſomme.

XI. Per levare la difficoltà, che potrebbe naſcere dal non intendere, perchè nelle ſomme di mezzo la lettera R abbia da eſſere preſa più volte, ora coll' eſponente medeſimo, come nell' Eſempio II., ora coll' eſponente diverſo, come ſi vede nel III., per queſto ſi nota, che ſotto le ſomme di mezzo ſi dee porre due volte, perchè ſi eſprima, che quelle ſomme ſono nate dalla multiplicazione di due ſerie, e perchè queſte ſerie ſono ſerie di qualche determinata potenza, perciò gli eſponenti di queſte lettere aggiunti, hanno da moſtrare la condizione delle potenze delle due ſerie multiplicate; intanto dunque nel ſecondo Eſempio l' eſponente del termine di mezzo è tale $2R^2R^2$, perchè una ſerie di potenze quadrate, multiplicata in ſe ſteſſa, ha prodotta una tal ſerie; e nel terzo Eſempio compariſcono ſotto le ſomme di mezzo queſte formule $3R^4R^2 \dagger 3R^2R^4$, perchè quelle due ſerie naſcono dalla multiplicazione di una ſerie di quarte potenze per una ſerie di ſeconde potenze; ma di queſte ſerie, che naſcono dalla

dalla multiplicazione delle altre ſerie, ora appunto ſi dee parlare.

XII. Si multiplicano queſte colle medeſime regole, che ſi oſſervano per la multiplicazione ordinaria delle potenze, onde non occorrendo nulla di particolare ſopra di queſte, negli Eſempj, che quì ſi pongono, ſi fanno vedere i riſultati delle nuove ſerie, prodotti per via di queſta multiplicazione. Si vuole dunque multiplicare queſta ſerie $o^2, a^2, b^2, c^2, d^2, e^2, f^2$ &c.

$\times\, o, a, b, c, d, e, f,$

ed è il riſultato———— $o.\ a^3.\ b^3.\ c^3.\ d^3.\ e^3.\ f^3$ &c.

ſimilmente, ſe ſi multipl. $o.\ a.\ b.\ c.\ d.\ e$

$\times\, o.\ 2a.\ 2b.\ 2c.\ 2d.\ 2e$

il riſultato ſi trova———— $o.\ 2a^2.\ 2b^2.\ 2c^2.\ 2d^2.\ 2e^2$

e ſe ſi multiplica———— $o\ a^{\frac{1}{2}}.\ b^{\frac{1}{2}}.\ c^{\frac{1}{2}}.\ d^{\frac{1}{2}}.\ e^{\frac{1}{2}}$

$\times\, o.\ a^1.\ b^1.\ c^1.\ d^1.\ e^1$

dee eſſere il riſultato—— $o.\ a^{\frac{3}{2}}.\ b^{\frac{3}{2}}.\ c^{\frac{3}{2}}.\ d^{\frac{3}{2}}.\ e^{\frac{3}{2}}$

come multiplicandoſi pure $o.\ a^{\frac{1}{3}}.\ b^{\frac{1}{3}}.\ c^{\frac{1}{3}}.\ d^{\frac{1}{3}}.\ e^{\frac{1}{3}}$

$\times\, o.\ a^3.\ b^3.\ c^3.\ d^3.\ e^3$

ha da produrſi queſto riſult. $o.\ a^{\frac{10}{3}}.\ b^{\frac{10}{3}}.\ c^{\frac{10}{3}}.\ d^{\frac{10}{3}}.\ e^{\frac{10}{3}}$ &c.

e però in tutti queſti riſultati ſi vede la maniera, che ſi ha da tenere nelle multiplicazioni delle ſerie infinite.

XIII. Si può avvertire in ordine a queſta multiplicazione un riſultato ſingolare, quando i termini eſtremi di una medeſima ſerie ſi multiplicano fra di loro, oppure quando eſſendo diverſe le ſerie delle potenze, le multiplicazioni loro ſi fanno in tal modo, che ſi multiplicano inſieme gli eſtremi di tali ſerie. Prima però di far conoſcere il valore del riſultato da una tale multiplicazione, una coſa ſi dee premettere, ed è, che ſe ſono date due ſerie oppoſte in numeri, quali in queſto eſempio ſi veggono.

o. 1. 2. 3. 4. 5. 6 &c.
6. 5. 4. 3. 2. 1. o &c.

ſempre il penultimo numero della ſeconda data ſerie di tante unità, ſi allontana dall' ultimo di queſta ſteſſa ſerie, quante ſono

sono le unità nel numero, che è posto nella prima serie sopra di lui, e che similmente l'antepenultimo numero della seconda serie si discosta dallo stesso ultimo numero per altrettante unità, quante ne contiene il numero, che gli sta sopra nella prima serie, e che la stessa cosa sempre ancora si verifica di tutti gli altri termini, che rimangono nella serie seconda. Sarà dunque vero, che presi uno per volta i numeri della seconda serie, e confrontati coll'ultimo numero della medesima serie, si potrà scrivere

$5=6-1.\ 4=6-2.\ 3=6-3.\ 2=6-4$ &c.

Ciò premesso, come cosa importante, che sia notata, si può cercare la multiplicazione di queste due serie di prime potenze

$o.\ a.\ b.\ c.\ d.\ e.\ f.\ g.$ &c.
R. R. R. R. R. R. R. R. &c.

XIV. Prima di ogni altra cosa, per quello, che si è stabilito, rimane certa la combinazione seguente di tutti i termini di queste serie R−*a*. R−*b*, R−*c*, R−*d*, R−*e*, R−*f*, &c., onde si può prendere, come una formula generale per tutti questi simili casi, da operare poi con essa quello, che si dee. Ora ciò, che nel caso proposto resta a farsi, è la multiplicazione di ciascheduno di questi termini per ciascun termine della prima serie, che risulta tale quale si vede quì appresso;

o R
a R−*aa*
b R−*bb*
c R−*cc*
d R−*dd*
&
RR−RR

e perchè, secondo le regole del sommare, simili serie, si può raccogliere il loro giusto valore, giacchè chiaramente si vede, che la prima di queste serie è di prime potenze, e che la seconda è di quadrati, sarà stabilito il giusto valore di questa somma nella seguente espressione $\frac{1}{2} A R^2 - \frac{1}{3} A R^2$, che corrisponde appunto ad $\frac{1}{6} A R$, e sarà trovato quel risultato, che è il singolare di una tale multiplicazione. Si opererà nella stessa maniera, se le serie delle potenze date saranno di altra fatta, che quelle, sopra le quali ora è rimasta compita l'operazione; che però quì si pongono alcune formule, perchè alla loro similitudine si possa operare in tutte le altre occorrenze, per rilevare il valore delle multiplicazioni intraprese in questa stessa maniera.

For-

XV. *Formula* I. *quando si hanno da multiplicare le seconde potenze.*

$$RR - 2aR + aa.\ RR - 2bR + bb.\ RR - 2cR + cc$$

Multiplicata questa formula per ciascun termine della serie delle seconde potenze date, si prepareranno tutti i termini della multiplicazione, la somma de i quali darà questo valore.

$$\tfrac{1}{5}AR^4 - \tfrac{2}{4}AR^4 + \tfrac{1}{3}AR^4 = \tfrac{1}{30}AR^4.$$

Se si cerca la ragione, perchè abbia da nascere questa formula, ella è, perchè multiplicandosi fra loro le serie delle prime potenze, risulta quello equivalente di termini, che già abbiamo veduto, e che abbiamo stabilito per un equivalente, che in simili operazioni dee sempre considerarsi; dunque cadendo ora l' operazione sopra seconde potenze, basta, che si riquadri ogni termine di quello equivalente, perchè si vegga comparire la formula quì fissata, per operare poi con essa ciò, che rimane a farsi su questa multiplicazione.

Ancora del valore del risultato dalla multiplicazione non si ha da dubitare, che sia giusto, perchè è quello, che conviene a ciascuna delle serie, che si producono nell' esercizio della operazione.

Formula II. *quando si hanno da multiplicare le serie delle prime per le serie delle seconde potenze.*

$$RR - 2aR - aa.\ RR - 2bR - bb.\ RR - 2cR - cc$$

Primo termine della multiplicazione $a^2RR - 2a^3R + a^4$

Valore delle somme della multip. $\tfrac{1}{2}AR^4 - \tfrac{2}{3}AR^4 + \tfrac{1}{4}AR^4 = \tfrac{1}{12}AR^4$

Formula III. *per multiplicare le serie di quadrate radici di una quantità per la serie delle prime potenze.*

$$R - a.\ R - b.\ R - c.\ R - d \text{ \&c.}$$

Primo termine risultato dalla multiplicazione $a^{\frac{1}{2}}R - a^{\frac{3}{2}}$

Valore di tutta la multiplicazione $\tfrac{2}{3}ARR - \tfrac{2}{5}ARR = \tfrac{4}{15}ARR.$

XVI.

XVI. Quel valore, che si è trovato con questa ultima formula, multiplicata per i termini delle prime potenze, non si sarebbe potuto trovare, se i termini da multiplicarsi fossero stati presi al contrario, cioè se la serie delle prime potenze si fosse dovuta multiplicare per questa serie $a^{\frac{1}{2}}, b^{\frac{1}{2}}, c^{\frac{1}{2}}$, &c. delle radici quadrate di una quantità, essendochè venendosi con questa sorte di multiplicazioni a produrre le radici quadrate di termini di prime potenze, che non sono numeri in tal modo: $a\sqrt{R-a}$, $b\sqrt{R-b}$, $c\sqrt{R-c}$, $d\sqrt{R-d}$, &c. non vi è luogo a determinare colle regole generalmente stabilite, qual sia il proprio valore di una tale multiplicazione, la quale, quando si fa, ha questa formula $\sqrt{R-o}$, $\sqrt{R-a}$, $\sqrt{R-b}$, $\sqrt{R-c}$, $\sqrt{R-d}$, &c. perchè ogni sua parte sia multiplicata per i termini della serie della data potenza.

Manca della medesima maniera il valore del risultato dalla multiplicazione di questa serie di radici quadrate $\sqrt{R+o}$, $\sqrt{R+a}$, $\sqrt{R+b}$ &c. per quest' altra serie $\sqrt{R-o}$, $\sqrt{R-a}$, $\sqrt{R-b}$, &c. quale è $\sqrt{RR-oo}$, $\sqrt{RR-aa}$, $\sqrt{RR-bb}$, &c. e perciò non si è potuta ancora conoscere la quadratura del circolo, come universalmente manca la notizia del valore delle altre serie tutte, che hanno radici composte di due termini; però, accadendo di dovere operare con simili serie, non si dovrà pretendere di trovare esattamente la misura della quantità, che si cerca, ma solo per qualche rapporto, che possa avere ad un altra, si potrà fissare della medesima una qualche proprietà.

XVII. Dalla somma, e multiplicazione delle serie infinite, fatta con quelle regole, che già sono prescritte, si passa a trattare della divisione, e sottrazione delle medesime. Consistono queste due operazioni nel trovare, o un quoziente, o un avanzo, che sempre dovrà comparire in una nuova serie per sapere, e la condizione degli esponenti nella serie de i quozienti, e il valore degli avanzi dopo la sottrazione.

Per regola generale de i quozienti, che risultano dalla divisione, si può dire, che se la serie, che dee dividersi ha l'esponente maggiore di quello della serie, che divide, i termini della serie del quoziente avranno l'esponente positivo, come per cagione contraria dovranno essere negativi. In quanto poi al fissare la qualità dell'esponente, si dice, che questa com-

comparirà dall' esercizio, che intraprenderemo, di una tale operazione negli esempj, che quì si propongono.

Esempio I.

si divida o. a^2 b^2 c^2 d^2, *&c.* : o. *a*. *b*. *c*. *d* *&c.*
sarà o. *a*. *b*. *c*. *d* *&c. il quoz. di questa divis.*

Esempio II.

si divida o. a^0. b^0. c^0. d^0 *&c.* : o. a^1. b^1. c^1. d^1 *&c.*
sarà o. a^{-1}. b^{-1}. c^{-1}. d^{-1} *&c. il quoz. del sec. esempio.*

Esempio III.

si divida o. a^2. b^2. c^2. d^2 *&c.* : o. $a^{\frac{1}{2}}$. $b^{\frac{1}{2}}$. $c^{\frac{1}{2}}$. $d^{\frac{1}{2}}$. *&c.*

sarà o. $a^{\frac{3}{2}}$. $b^{\frac{3}{2}}$. $c^{\frac{3}{2}}$ $d^{\frac{3}{2}}$ *&c.* quello, che dovrà risultare dalla divisione. Che se la serie divisa fosse stata di quarte potenze, tale sarebbe stato il quoziente o. $a^{\frac{7}{2}}$. $b^{\frac{7}{2}}$. $c^{\frac{7}{2}}$. $d^{\frac{7}{2}}$ &c. come se il divisore della serie posta nel secondo esempio fosse stato o. $a^{\frac{1}{2}}$. $b^{\frac{1}{2}}$. $c^{\frac{1}{2}}$. $d^{\frac{1}{2}}$, &c. avrebbe dato questo quoziente o. $a^{-\frac{1}{2}}$. $b^{-\frac{1}{2}}$. $c^{-\frac{1}{2}}$. $d^{-\frac{1}{2}}$, &c oppure questo $\frac{1}{0}$. $\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}$. $\frac{1}{b^{\frac{1}{2}}}$. $\frac{1}{c^{\frac{1}{2}}}$. $\frac{1}{d^{\frac{1}{2}}}$, &c. rilevando questa serie lo stesso valore della precedente.

XVIII. Da tutti questi esempj può facilmente conoscersi quella maniera, che si dee tenere nella divisione, di cui si parla, e qual mezzo regoli il ritrovamento degli esponenti per la nuova serie di qualunque quoziente, mentrechè la maniera non è diversa dalla ordinaria, di cui noi ci serviamo per dividere le potenze, e di cui già altrove si è parlato; come il mezzo per trovare gli esponenti conviene con quello, che fu assegnato, parlando sul particolare medesimo della divisione delle potenze, aggiugnendo questo solo per più facilitare la pratica della operazione, che per trovare subito in questo caso il proprio esponente al quoziente avuto dalla divisione di una potenza intera per una radice, basta prendere gli esponenti di queste quantità, che si hanno a dividere, e applicare ad essi la regola della divisione delle frazioni, che il risultato per la nuova frazione sarà l' esponente del quoziente, con avvertire però di scemare il numeratore di una unità.

tà. Eccone un esempio. Si vuol dividere a^5 perfetta potenza per $a^{\frac{1}{2}}$ potenza imperfetta, o radice quadrata della prima potenza, gli esponenti di queste due quantità sono $5\ \frac{1}{2}$, cioè un intero, ed un rotto da partirsi fra di loro, e si partono scrivendo prima il 5 all'usanza di frazione, poi multiplicando tutte due queste frazioni in croce, per trovare il denominatore comune, finalmente guardando quante volte una entra nell' altra, però, essendo, che $\frac{5}{1} \times \frac{1}{2}$ multiplicati in croce, producono queste due frazioni $\frac{10}{2}\ \frac{1}{2}$, partita l' una per l' altra, il quoziente sarà la prima frazione $\frac{10}{2}$. Scemato dunque questo numeratore di una unità, rimane $\frac{9}{2}$, e in questo avanzo si avrà l' esponente del quoziente, fatta la divisione di a^5 per $a^{\frac{1}{2}}$, cioè sarà il quoziente $a^{\frac{9}{2}}$, che riscontrerà appunto con i quozienti, nati dalla divisione della serie delle quarte potenze, avvertite nel terzo esempio, per la serie delle radici quadrate delle prime potenze.

XIX. Per determinare in questo luogo il valore degli avanzi, dopo fatta la sottrazione, bisogna avvertire alla condizione di quelle serie, delle quali una si ha da levare dall' altra, non potendosi fissare una regola universale, dalla quale dipenda la maniera di conoscere gli avanzi di tutte le operazioni. Si dice dunque in primo luogo, che se dalla serie degli uguali si debba levare qualunque serie delle altre potenze, seconde, terze, quarte, &c. fatta la sottrazione, si troverà nella serie degli avanzi un valore, che si esprimerà con una frazione, il numeratore della quale sarà invariabilmente il denominatore della frazione, che manifesta il valore della serie, che precede quella, che si sottrae dalla date, e il denominatore dovrà sempre prendersi quello, che è denominatore di quella frazione, che esprime il valore della serie di quelle potenze, che si levano dalla serie degli eguali, così che, se è la quinta, se la sesta potenza, &c. quella, che si dee levare dalla serie degli eguali, avendo la frazione, che esprime il valore della serie delle quarte potenze, che precede la quinta data da sottrarsi, per denominatore il 5, questo 5 sarà il numeratore della nuova frazione, e perchè la frazione, che esprime il valore della stessa data quinta potenza ha per denominatore il 6, questo 6 sarà il denominatore della medesima nuova frazione, onde $\frac{5}{6}$ sarà tutto il risultato

del

del valore della ſerie rimaſta dopo la ſottrazione, ſiccome $\frac{6}{7}$ dovrebbero eſprimere l'equivalente dell'altro avanzo, ſottratta la ſeric delle ſeſte potenze dalla ſerie degli uguali, e nello ſteſſo modo ſi dovrebbe trovare il valore di qualunque altro avanzo, durandoſi a ſottrarre altre ſerie da quella degli uguali.

XX. Che ſe la ſerie, da cui ſi doveſſe ſottrarre fuſſe sì degli uguali, ma poi la ſerie data da ſottrarſi non foſſe perfetta potenza, ma una potenza imperſetta, come $a^{\frac{1}{2}}$. $b^{\frac{1}{2}}$. $c^{\frac{1}{2}}$, &c. ovvero $a^{\frac{1}{3}}$. $b^{\frac{1}{3}}$. &c. ovvero $a^{\frac{1}{4}}$. $b^{\frac{1}{4}}$. &c. in queſto caſo la frazione, che dovrebbe eſprimere il valore della ſerie dell'avanzo in tutti gli eſempj propoſti avrebbe coſtantemente per numeratore l'unità, e per denominatore un numero ſuperiore di una unità a quel numero, che è eſponente di quella potenza, di cui porta il nome queſta imperfetta, e però $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$. &c. ſarebbero le frazioni, che eſprimerebbero il valore dell'avanzo della ſerie, fatta la ſottrazione dalla ſerie degli uguali di $a^{\frac{1}{2}}$ &c. $a^{\frac{1}{3}}$ &c. $a^{\frac{1}{4}}$ &c.

XXI. Quando la ſottrazione della ſerie de i quadrati delle terze potenze, delle quarte &c. è fatta dalla ſerie delle prime potenze, eſprimono gli avanzi, queſte ſerie $0-0$, $a-a^2$, $b-b^2$ &c. $0-0$, $a-a^3$, $b-b^3$ &c. $0-0$, $a-a^4$; $b-b^4$ &c. che hanno poi per equivalente $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{10}$, come ſe qualunque altra doveſſe eſſere la ſerie da ſottrarſi dalle prime potenze, laſcerebbe un avanzo, da eſprimerſi con una frazione compoſta di un numeratore minore di una unità dell'eſponente di quella ſerie di potenze, che ſi ſottrae, e di un denominatore maggiore di due unità del doppio dell'eſponente medeſimo.

XXII. Dimandandoſi dunque l'equivalente dell'avanzo, dopo fatta la ſottrazione della ſettima potenza dalla ſerie delle prime, ſi trova, che dee eſſere $\frac{6}{16}$. L'ordine de i numeratori delle frazioni, che ſi preparano per manifeſtare il valore degli avanzi delle ſerie, che ſi levano dalle prime potenze, ſi mantiene, quando la ſottrazione ſi fa dalle ſeconde, dalle terze; dalle quarte &c. cioè, che coſtantemente dee eſſere l'unità quel numeratore, che ſi dee alla frazione, che ha da moſtrare l'equivalente dell'avanzo della frazione, immediatamente ſeguente a quella, da cui ſi fa la ſottrazione; per eſempio, ſe dalla ſerie delle quarte ſi levi la ſerie delle quinte potenze, riſulterà per eſprimere l'equivalente del reſto, una

frazione, che avrà l'unità per numeratore, e questi numeratori cresceranno poi di tante unità, di quante la serie dell' potenze, che si ha da sottrarre, si allontana dalla data potenza; onde dovendosi sottrarre la serie delle seste potenze dalla serie delle seconde, allontanandosi per quattro unità questa serie dalla data, il 4 ha da essere il numeratore per la frazione, che ha da esprimere l'equivalente dell' avanzo. I denominatori poi di queste frazioni si prepareranno così.

Si prenderà il numero esponente della serie delle potenze, che si possono sottrarre le prime dopo la data, e il numero a questo susseguente s'ingrandirà di tante unità, meno una, per quante si allontana la potenza dimandata da sottrarsi da quella, da cui si dee sottrarre, e poi questi due numeri si multiplicheranno fra loro, e il risultato sarà il denominatore della frazione. Sia da trovarsi il denominatore della frazione, che ha da manifestare l'equivalente dell' avanzo, nato dalla sottrazione della settima potenza, dalla terza; dico, che dee essere 32, perchè essendo la prima serie delle potenze, che si possono sottrarre dalla terza, la serie delle quarte, l'esponente di questa serie di potenze è il 4; dopo il 4 succedendo il 5; questo è il secondo numero, che si prende, perchè multiplichi il primo, dopo di che è ingrandito per quanto dee essere ingrandito. La settima potenza si allontana dalla terza per quattro unità, se queste meno una si aggiungono al 5, risulta l'8, dunque l'8 dee multiplicare il 4, e ha da produrre il 32, cioè il denominatore della dimandata frazione. Le regole, che si sono stabilite per questi casi si attendano anche per gli altri, che potessero occorrere, perchè bene a tutti si adattano, senza che si aggiunga qualche cosa di più sul preciso di queste regole.

XXIII. La sottrazione, di cui fino ad ora si è parlato, si è proposta sopra perfette potenze, dalle quali è stata fatta. Può accadere, che talvolta la serie delle potenze, dalle quali la sottrazione si ha da fare, sia di potenze imperfette, e che sieno serie di perfette potenze quelle, che si hanno da sottrarre. Anche in questa operazione la formula da osservarsi per la serie degli avanzi, è tale $o-o$, $a^{\frac{1}{2}}-a$, $b^{\frac{1}{2}}-b$ &c. se la serie, da cui si dee fare la sottrazione è di radici quadrate, e quella, che si dee sottrarre è di potenze prime, e si hanno da

da regolare tutte l'altre serie nella maniera medesima, se si muta la serie delle radici, e sono le stesse le serie delle potenze, che si hanno da sottrarre.

Per quello poi, che riguarda l'equivalente di tali avanzi, si esprimono nelle seguenti frazioni $\frac{2}{12}$, $\frac{6}{18}$, $\frac{10}{24}$, $\frac{14}{30}$ &c., se sono avanzi di serie di prime potenze, di quadrati, di cubi &c. sottratte dalla serie di radici quadrate, e si manifestano in queste altre frazioni $\frac{6}{24}$, $\frac{15}{36}$; $\frac{24}{48}$ &c., se sono resti di serie di prime potenze, di seconde, di terze &c. levate da una serie di radici cube, e si proporrebbero altre ragioni, se si passasse ad altre operazioni, cioè i numeratori di queste frazioni, che dovrebbero esprimere il valore degli avanzi, sottratte le prime potenze da qualunque delle predette serie delle radici, si regolerebbero con quell'ordine, che il primo sarebbe il 2, e tutti gli altri sopra le unità, che si trovassero nel numeratore della precedente frazione, ne conterebbero quattro più, vale a dire, se si volesse sapere qual numeratore competesse alla frazione, che si dovesse preparare per esprimere l'equivalente del resto, fatta la sottrazione della serie delle prime potenze dalla serie delle radici quarte, questo si troverebbe essere il 10, perchè se il numeratore della frazione, che esprime il valore, il resto, levata la serie delle prime potenze dalla serie delle radici cube, è il 6; il seguente, se ha da crescere sopra il precedente di 4 unità, dee essere il 10.

XXV. Per determinare, dopo trovato il numeratore della frazione, il suo denominatore, la regola è di porre sempre un denominatore, doppio del denominatatore della frazione, che esprime il valore del resto, precedente a quello di cui si cerca, regolandosi sempre dal primo denominatore, che ha da essere il 12, e però se il numeratore della frazione cercata è il 10, il suo denominatore sarà il 48 per essere questo il denominatore di una frazione lontana dalla prima per tre gradi, e in questo modo si prepara l'intera frazione per i resti delle prime potenze, levate dalla serie delle radici quadrate, cube &c.

XXVI. Dovendosi trovare le frazioni per le serie delle seconde potenze terze, quarte &c levate similmente dalle serie delle radici quadrate, cube &c La regola, che si determina, è di fissare i numeratori, e denominatori di queste prime

me frazioni, per poi da queste prendere norma, per trovare tutte le altre. La prima frazione, che deve esprimere il primo avanzo della serie de quadrati, levata dalla serie delle radici, ha per numeratore 6, per denominatore 18; sicchè attendendo a questa si troverà la frazione per la serie de i stessi quadrati, levati dalla serie delle radici della terza, quarta potenza &c. con accrescere il numeratore della prima frazione $\frac{6}{18}$ tante volte del quadrato del 3, per quante volte la serie delle radici, da cui si fa la sottrazione, si allontana dalla serie delle radici quadrate, e similmente con multiplicare il denominatore 18 per quel numero per cui la stessa serie di radici, da cui si fa la sottrazione, si allonrana dalla serie delle stesse radici quadrate: onde se la sottrazione della serie de i quadrati si farà dalle serie della radice delle quarte potenze, l'avanzo si esprimerà in questa frazione $\frac{14}{36}$.

XXVII. In questa stessa maniera si opera per trovare le predette frazioni, secondo gli altri casi posti, e così se portasse il bisogno di doverlo preparare, allorchè le serie de i cubi fossero levate da tutte le precedenti serie delle radici, si prenderebbe regola dalla frazione $\frac{10}{24}$. Siccome per avere l'altre frazioni de i resti, dopo sottratta la serie delle quarte potenze, si dovrebbe prendere norma dalla prima frazione del primo resto $\frac{14}{36}$, facendo crescere poi i numeratori delle altre frazioni per gli altri resti delle serie de i cubi di 14 unità, e per i resti della serie delle quarte potenze di 19 unità, sopra l'espresso nel numeratore della frazione precedente, con dare ad esse i denominatori, sempre doppj de i precedenti.

XXVIII. Per l'intelligenza della formazione di tutte queste frazioni, colle quali si esprime il valore di ogni resto, dopo fatta la sottrazione, si deve avvertire quello, che altrove si avvertì, cioè che ogni serie data si manifesta in una qualche equivalente, essendo che dunque la sottrazione è un operazione, che s'intraprende con due serie, il resto ha da essere un composto di due serie, una positiva, e l'altra negativa, e ciascuna col proprio carattere si deve manifestare. Se si da una di queste sottrazioni, come si è proposto il caso nelle precedenti regole, in una serie di seconde potenze, da sottrarsi da una serie di prime; senza alcun dubbio si trova questo resto $o-o$, $a-a^2$, $b-b^2$, $c-c^2$ &c. R^2-R^2 composto delle due serie, or' ora

ora avvisate, cioè della serie della prima potenza, che è positiva in questo esempio, e della serie delle seconde potenze, che rimane negativa. L' equivalente della prima serie è $\frac{1}{2}AR^2$, l' equivalente della seconda è $\frac{1}{3}AR^3$, unite dunque insieme queste due parti esprimono l' equivalente del resto tutto intero così $\frac{1}{2}AR^2 - \frac{1}{3}AR^4$. Si vuole ora sapere il giusto valore della espressione di questo resto, e si deve operare in tal modo. Si riducono le due frazioni $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ alla medesima denominazione, si leva dalla maggiore la minore, e nell' avanzo comparisce quella frazione, che contiene il valore della espressione del resto, che nell' esempio dato è $\frac{1}{6}$.

XXIX. Dopo di aver parlato della sottrazione della serie di perfette potenze fra loro, e della serie di perfette potenze dalla serie delle potenze imperfette, potrebbe desiderarsi, che si aggiugnesse qualche cosa in ordine alla maniera di esprimere il valore de i resti, fatta la sottrazione di serie di radici fra loro: ma in realtà può conservarsi da noi un tale desiderio, per appagarlo allora, quando sarà riuscito di averlo potuto trovare, che allora poi di esso ci serviremo per dimostrare i più belli di tutti i problemi, quali sono le quadrature delle curve circolari, elittiche, e paraboliche.

XXX. Per compimento di questa materia intorno al modo di trovare l' equivalente di qualunque serie prodotta dalle precedenti operazioni, brevemente si nota, come tal volta in guisa si possono combinare le precedenti operazioni, che sia bisogno di mettere in opera le stesse serie, dopo che si sono sommate insieme, o sottratte fra di loro con multiplicare a vicenda questi risultati. Si propone per ragione di esempio, che si mostri il valore della serie derivata dalla multiplicazione dell' avanzo della serie degli uguali, presi meno la serie delle prime potenze, o meno quella delle radici quadrate, per le somme, che ha prodotto l' unione stata fatta colle medesime serie. Se dunque mai occorresse questo bisogno, si dovrebbe subito avvertire alla condizione di quelle serie, che avrebbero da nascere dalla multiplicazione, intrapresa in tutti due i casi predetti. La serie delle prime potenze, aggiunta alla serie degli eguali, produce questo risultato $R + a$ &c., e se è fatta la sottrazione, lascia quest' altro $R - a$; siccome nel secondo caso, ripetute le stesse operazioni, si trovano tali i prodotti $R + a$,

$R -$

$R - a\frac{1}{2}$. Si multiplichano ora tanto i risultati dalle prime operazioni, quanto quelli, che si sono avuti per le seconde, e si trova, che il primo da un prodotto di due serie, una di eguali, e l'altra di quadrati; e lo da il secondo di quattro serie, cioè di eguali, di radici quadrate, di prime potenze, e di radici quadrate de i cubi; che però se, essendo notate le serie, hanno da essere noti i loro valori, è necessario, che il valore del primo prodotto sia $\frac{1}{6}$, che questo appunto nasce dalla espressione dello stesso prodotto, che è tale $\frac{1}{2}ARR - \frac{1}{3}ARR$, e che l'equivalente del secondo sia $\frac{13}{30}$, perchè questo risulta dalla espressione propria di un tale prodotto $AR^2 - \frac{2}{3}AR^2 + \frac{2}{4}AR^2 - \frac{2}{5}AR^2$.

Ecco dunque in qual modo si sbriga uno nella ricerca del valore, anche di queste serie, nate con quest' altro nuovo sistema, e però si comprende a bastanza, che se sarà applicata la regola ad altri casi simili, si potrà in tutti riuscire con eguale esattezza.

Del modo di trovare la somma delle serie infinite delle frazioni.

§ II.

XXXI. Compiute le operazioni più principali, che si potevano praticare sopra le serie infinite di qualunque determinata potenza, si vogliono in questo luogo proporre altre regole proprie tutte, e molto necessarie a quei casi, ne i quali si tratta di voler sapere le somme delle serie infinite delle frazioni. Il luogo veramente proprio per trattare di tali frazioni si sarebbe dovuto fissare dopo spiegata la dottrina delle progressioni, o Aritmetiche, o Geometriche, che occorre di doverle sempre avvertire in qualunque modo si voglia di esse proporre un esempio. Si sono niente di meno volute aggiugnere alle materie quì sopra trattate, perchè hanno molta correlazione con esse, e le une colle altre bene si accordano, servendo solo, per quello, che risguarda l'intelligenza de i termini, co i quali questi casi si hanno da esprimere, l'avvertire di passaggio quelle poche riflessioni, che hanno il maggior rapporto alla presente materia.

XXXII.

XXXII. Si dice, che una serie mantiene la progressione Aritmetica, quando tutti i suoi termini sono in tal maniera disposti, che uno sopravanza l'altro col medesimo numero di unità, se l'esempio si propone nella quantità discreta, o colle stesse lettere ripetute in ogni termine della serie [se la serie sia rappresentata con lettere] con tal ordine, che se il secondo termine la ripete due, per ragion di esempio, o tre volte &c. cioè una volta più, o due volte più del primo &c., tutti gli altri pure l'hanno da ripetere allo stesso modo, cioè in tutti i termini susseguenti deve sempre essere presa una volta di più, due volte &c., che non fu presa ne i termini antecedenti, 1. 2. 3. 4. 5. &c. 1. 3. 5. 7. &c. 1. 4. 7. 10. &c. sono formule di diverse progressioni Aritmetiche, prese ne i numeri, come *a*, *a*†*c*, *a*†*c*†*c*, *a*†*c*†*c*†*c* &c. *b*, *b*†*d*, *b*†*d*†*d*, *b*†*d*†*d*†*d* &c. sono gli altri esempj, che si possono produrre per le medesime progressioni, quando sono espresse con lettere.

XXXIII. Vi è differenza molto notabile fra la progressione Aritmetica, e la seconda, che si chiama Geometrica, e questa diversità si manifesta negli eccessi de i termini della progressione Geometrica, non valutandosi questi dall' uguaglianza nel numero delle unità, ma solo nella similitudine delle parti, che hanno sempre da corrispondere fra di loro. Così se il secondo termine della progressione Geometrica superò il primo del mezzo, del terzo, del sesto &c. tutti gli altri si dovranno superare colle medesime parti, come si riscontra in questa serie, che per esempio delle altre si da prima in numeri, e poi in lettere.

1. 3. 9. 27. 81. 243. &c. *b*. *bd*. *bdd*. *bddd*. &c.

Nella serie espressa con lettere si vede la differenza, in che cosa consiste, perchè si osserva, che la lettera *d* dimostra la diversità, che è fra i termini della progressione, che pure è solita palesarsi in numeri posposti quando la progressione è Geometrica, perchè se è Aritmetica si antepongono; dunque la seguente serie *a*, *a*†*b*, *a* † 2*b*, *a*†3*b* &c. nota una progressione Aritmetica, come si determina in quest' altra serie *b*. *bd*. bd^2. bd^3. ad^4 &c. una progressione Geometrica.

XXXIV. Un composto di queste due progressioni produce un altra specie di progressione, che col proprio nome è

chiamata Armonica, e questa pure tal volta si trova nelle serie infinite delle frazioni, e per questo di essa ancora quantunque fuori del suo luogo si è quì fatta menzione. Consiste principalmente la sua natura in mantenere costante il rapporto de i termini estremi, perchè sia simile a quello delle differenze intermedie, come si vede in queste tre quantità $4^{2}.\ 6^{6}\ 12.$ delle quali le differenze intermedie sono il 2 ed il 6, che hanno quella relazione fra loro, che si trova nel 4 rispetto al 12, che sono i termini estremi, essendo nell'uno, e nell'altro caso i primi termini le metà de i secondi. Si è chiamata questa progressione Armonica un composto delle due precedenti, perchè, se si riguardano le differenze, si osserva in loro la progressione Aritmetica; se poi si guardino i rapporti loro si trovano simili a quelli de i termini estremi; si consideri l'espressione di questi numeri seguenti, che si riscontrerà la verità di ciò che si afferma.

$$4^{2}.\ 6^{6}.\ 12 = 4.12 :: 6 - 4.\ 12 - 6$$

Ma di questa proprietà ritornerà il discorso al suo luogo.

XXXV. Alle differenze delle progressioni uniamo, per farle avvertire, alcune altre specie di grandezze, prodotte dalle differenti maniere di aggiugnerle, e di multiplicarle insieme, e si esprimono tutte in quei numeri chiamati *Trigonali*, *Piramidali*, *Triangolo piramidali*, *e Piramidi piramidali*, o figurati d'infinite altre maniere. Trigonale, o triangolare si dice quel numero, che risulta dall'aggiugnersi uno con l'altro i numeri disposti secondo la serie naturale; perciò li seguenti numeri 1. 3. 6. 10. 15. 21. &c. sono numeri triangolari; siccome dalle somme di questi 1. 4. 10. 20. 35. 56. &c. nascono i numeri piramidali, e saranno numeri riangolo triangolari le somme di questi, ed il rinnovamento di un altra somma comprenderà i numeri piramido piramidali: che per non s'imbrogliare ne i termini chiameremo speditamente numeri questi ultimi del sesto ordine, chiamando gli altri antecedenti del quinto, del quarto, del terzo, del secondo, del primo, le quali due ultime denominazioni sono proprie della serie de i naturali 1. 2. 3. 4. 5. &c. e della serie degli eguali 1. 1. 1. 1. 1. &c. Le stesse differenze di ordini risultano ancora dalla multiplicazione delle grandezze, e si chiama del primo ordine quel numero, che nasce dalla multiplicazione di due, che si se-

si seguitano secondo la serie naturale, come il 6. il 12. il 42. &c. che risultano dalla multiplicazione del 2. per il 3. del 3. per il 4. del 6. per 7. che se risultassero dalla multiplicazione di tre, di quattro, di cinque &c. tutti presi secondo la serie loro naturale, deriverebbero tutti gli altri ordini, che si potrebbero contare fino all' infinito; ma questa necessità quì ora non l' abbiamo.

XXXVI. Si premette pure di vantaggio la notizia per preparare l' ultimo termine delle serie infinite delle frazioni, e si dice, che crescendo sì li numeratori, come li denominatori loro nella progressione Aritmetica, l' ultimo termine niente più contiene di tutti li precedenti, che la pura differenza, che passa fra il primo dato termine, e il secondo; onde se la serie è tale $\frac{a}{b}$, $\frac{a+c}{b+d}$, $\frac{a+2c}{b+2d}$, $\frac{a+3c}{b+3d}$, $\frac{a+4c}{b+4d}$, $\frac{a+5c}{b+5d}$ &c. l' ultimo termine deve essere la frazione $\frac{c}{d}$, e si deduce dalla natura stessa della quantità, di cui l' ingrandimento si vuole esprimere giunto all' infinito, perchè se nell' esempio proposto per la parte de i numeratori si vuol mostrare questo ingrandimento, si ha da scrivere $a+\infty c$, come per quella de i denominatori si scriverebbe $b+\infty d$; lasciandosi dunque indietro i primi gradi delle quantità date a, b, rimangono gli infinitesimi, a i quali sono salite ∞c, ∞d, cioè $\frac{c}{d}$ proprio valore dell' ultimo termine, che si proponeva di ritrovare.

Mutandosi poi la progressione de i numeratori, e denominatori, sicchè ne i primi fosse Aritmetica, e ne i secondi Geometrica, sparirebbe affatto l' ultimo termine, e non rimarrebbe altro, che un zero, e ne rimarrebbero due quando la progressione de i numeratori fosse Geometrica, e quella de i denominatori Aritmetica.

XXXVII. Dalle premesse riflessioni passando ora a proporre le maniere di rilevare le somme delle serie infinite delle frazioni, si distinguono quei principali casi, ne i quali queste possono accadere. Si propone in primo luogo di trovare la somma di quella serie infinita di frazioni, delle quali i numeratori mantengono la progressione Aritmetica, e i denominatori la Geometrica.

La frazione principale, che si da, è questa $\frac{a}{c}$: la prima differenza de i numeratori è b, come la lettera e manifesta la progressione, nella quale crescono i denominatori. Ecco per disteso tutta la serie $\frac{a}{c} + \frac{a+b}{ce} + \frac{a+2b}{cee} + \frac{a+3b}{ce^3} + \frac{a+4b}{ce^4}$ &c.

Dovendosi dunque trovare la somma di questa serie, una di queste due regole si può tenere. Si possono dividere in primo luogo tutti i numeratori della serie data nelle parti loro, per far nascere questa serie $\frac{a}{c} + \frac{a+b}{ce} + \frac{a+b+b}{cee} + \frac{a+b+b+b}{ceee} +$ $+\frac{a+b+b+b+b}{ceeee}$ &c.

o si può la stessa data serie risolvere in molte altre infinite puramente Geometriche, cioè in queste

$\frac{a}{c} + \frac{a}{ce} + \frac{a}{cee} + \frac{a}{ce^3}$ &c. *Prima serie infinita Geometrica.*

..... $\frac{b}{ce} + \frac{b}{cee} + \frac{b}{ce^3}$ &c. *Seconda serie.*

.... $\frac{b}{cee} + \frac{b}{ce^3}$ &c. *Terza serie.*

.... $\frac{b}{ce^3}$ &c. *Quarta serie.*

fatto questo si trovano, secondo la regola ordinaria, le somme di tutte queste serie particolari, e si ha della prima serie questa somma $\frac{ae}{ce-c}$ della seconda questa $\frac{b}{ce-c}$, della terza questa $\frac{b}{cee-ce}$; dell' ultima preparata si trova quest' altra $\frac{b}{ce^3-cee}$. Di poi fatto da tutti li risultati, esclusone il primo, uno solo, si rileva $\frac{be}{cee-2ce+c}$, che si deve aggiugnere alla somma della prima serie $\frac{ae}{ce-c}$ acciocchè si abbia $\frac{aee-ae+be}{cee-2ce+c}$ per il proprio valore di tutta la proposta serie infinita. Può servire questo esempio per norma a qualunque altra serie infinita di frazioni, quando i numeratori esprimessero qualunque altra specie di quantità delle derivate dalle differenti maniere di ag-

giu-

giugnerle, o di multiplicarle insieme, secondo che quì sopra è stato avvertito.

XXXVIII. La seconda serie, che si propone è in quelle frazioni, delle quali i numeratori hanno la progressione Geometrica accresciuta di una comune quantità, e i denominatori mantengono qualunque altra Geometrica progressione, e si vuol trovare di questa serie la giusta somma.

Serie Proposta.

$$\frac{a}{e} + \frac{ac+b}{em} + \frac{acc+bc+b}{emm} + \frac{ac^3+bcc+bc+b}{em^3} + \frac{ac^4+bc^3+bcc+bc+b}{em^4} \ \&c.$$

Come dall' esempio apparisce, il primo termine è nella serie data $\frac{a}{e}$, la differenza del numeratore, e denominatore consiste in $\frac{c}{m}$, la quantità, che è aggiunta costantemente è il b, dovendosi dunque trovare la somma, si risolverà, come la serie del precedente esempio, e nasceranno tutte le serie seguenti.

$$\begin{array}{llllll} \text{I.} & \frac{a}{e} + & \frac{ac}{em} + & \frac{acc}{emm} + & \frac{ac^3}{em^3} & \&c. \\ \text{II.} & - & \frac{b}{em} + & \frac{bc}{emm} + & \frac{bcc}{em^3} & \&c. \\ \text{III.} & - & - & \frac{b}{emm} + & \frac{bc}{em^3} & \&c. \\ \text{IV.} & - & - & - & \frac{b}{em^3} & \&c. \\ & & & & \&c. & \end{array}$$

a ciascheduna delle quali dato il dovuto valore, cioè alla I. $\frac{am}{em-ec}$ alla II. $\frac{b}{em-ec}$ alla III. $\frac{b}{emm-emc}$ alla IV. $\frac{b}{em^3-ecmm}$ di tutti questi, a riserva del primo, si farà un valore solo, che sarà uguale a $\frac{bm}{emm-ecm-em-ec}$, acciocchè poi questo unito al primo $\frac{am}{em-ec}$ produca la frazione, che quì segue $\frac{amm-am+bm}{emm-ecm+ec}$, perchè esprima tutta la somma della serie preparata.

XXXIX. Si tratta nella terza serie, di cui ora si ha da parlare, di volere trovare la somma, in occorrenza di questo caso,

caso, in cui i numeratori delle frazioni formassero la serie degli uguali, quando i denominatori fossero numeri trigoanli, o loro egualmente multiplici.

E' espediente per facilitare il buon esito della operazione, il proporre in primo luogo una nuova serie di termini, che abbiano fra loro la proporzione Armonica, affinchè fatta da essa la sottrazione di se medesima, diminuita del primo termine, lasci per avanzo una nuova serie, di cui il doppio dovrà essere la serie dimandata.

Serie di termini, che sono Armonicamente proporzionali.

$$A \quad \frac{a}{c} + \frac{a}{2c} + \frac{a}{3c} + \frac{a}{4c} + \frac{a}{5c} + \frac{a}{6c} + \frac{a}{7c} \ \&c.$$

La stessa serie diminuita del primo termine.

$$B \quad \frac{a}{2c} + \frac{a}{3c} + \frac{a}{4c} + \frac{a}{5c} + \frac{a}{6c} + \frac{a}{7c} + \frac{a}{8c} \ \&c. = -\frac{a}{c}$$

Avanzo dopo fatta la sottrazione.

$$C \quad \frac{a}{2c} + \frac{a}{6c} + \frac{a}{12c} + \frac{a}{20c} + \frac{a}{30c} + \frac{a}{42c} + \frac{a}{56c} \ \&c. = \frac{a}{c}$$

Serie doppia della precedente.

$$D \quad \frac{a}{2c} + \frac{a}{3c} + \frac{a}{6c} + \frac{a}{10c} + \frac{a}{15c} + \frac{a}{21c} + \frac{a}{28c} \ \&c. = \frac{2a}{c}.$$

XL. Non solo la serie espressa nel precedente avanzo, deriva dalla sottrazione, che si è fatta secondo il metodo, che si è accennato, ma suol nascere ancora, quando dalla serie seguente

$$E \quad \frac{2a}{c} + \frac{3a}{2c} + \frac{4a}{3c} + \frac{5a}{4c} + \frac{6a}{5c} + \frac{7a}{6c} \ \&c.$$

si vuole sottrarre la medesima serie, diminuita del primo termine, in questo modo

$$F \quad \frac{3a}{2c} + \frac{4a}{3c} + \frac{5a}{4c} + \frac{6a}{5c} + \frac{7a}{6c} + \frac{8a}{7c} \ \&c.$$

laonde questa particolarità di avanzo corrispondente a due sottrazioni fatte da serie differenti, è necessario, che si osservi, per avere quel valore, che nell'uno, e nell'altro di questi due casi si deve alle serie, che esprimono i tali avanzi, essendo che

che dove l'equivalente dell' avanzo trovato nel primo modo corrisponde al primo termine della serie A, lasciato nella serie B, cioè ad $\frac{a}{c}$ l' equivalente dell' ultimo avanzo, non è lo stesso, che $\frac{2a}{c}$ primo termine della serie E, non espresso nella serie F, ma è lo stesso, che il precedente, cioè $\frac{a}{c}$; e bene se ne persuade, chi riflettendo a tutti i termini, che precedono l' ultimo nella serie F gli osserva, che distruggono gli altri termini, che nella serie E si pongono dopo il primo; onde necessariamente la nuova serie C, che risulta, deve equivalere al primo termine della serie E, meno l' ultimo della serie F, però non può essergli assolutamente eguale, se non quando l' ultimo termine della stessa serie F si risolvesse nel nulla, come nel nulla si risolve l' ultimo termine della serie A.

XLI. Coll' ordine stesso si trovano i valori di altre serie, di quelle principalmente, che sono chiamate Leibniziane, e tali sono, quando i numeratori costituiscono la serie degli eguali, e i denominatori formano quelle de i quadrati diminuiti però di un unità, come nella seguente serie si riscontra $\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{35}$ &c. e in quest'altra $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{99}$ ovvero in questa $\frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \frac{1}{80} + \frac{1}{120}$ &c. mentre si scuopre, che la prima di queste date serie equivale a $\frac{3}{4}$, la seconda ad $\frac{1}{2}$, e la terza ad un $\frac{1}{4}$. Ma se nel modo con cui è preparata la seconda serie di queste tre, paragonata alla prima, così si volesse formare dalla seconda serie un altra terza serie infinita; pensa il Leibnizio, che il valore di questa serie potrebbe mostrare il valore, o la vera misura del circolo da non potersi però esprimere sotto alcun numero, presupponendo solo, che il diametro di questo circolo si dovrebbe prendere tale, che il suo quadrato si avesse uguale ad $\frac{1}{2}$.

XLII. Non si restringono a questi soli riportati esempj le serie, delle quali ora parliamo, ma si possono estendere anche a quei casi, ne i quali la serie de i denominatori contiene de i numeri quadrati, diminuiti non della unità, ma di un altro quadrato, anzi si possono a queste pure unire anche quel-

le

le ferie, delle quali efsendo i denominatori numeri trigonali, fono questi diminuiti di un altro numero trigonale $\frac{1}{7} + \frac{1}{16} + \frac{1}{27} + \frac{1}{40} + \frac{1}{55}$ &c. Questa è una ferie, di cui i denominatori equivagliono a 16. 25. 36. 49. 64. &c. diminuiti sempre del 9. numero quadrato; ficcome quest' altra ferie $\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{15} + \frac{1}{22} + \frac{1}{30} + \frac{1}{39}$ &c. manifesta una ferie, che ha per denominatori questi numeri Trigonali 10. 15. 21. 28. 36. 45. &c. fcemati tutti del comune termine trigonale 6. di queste due ferie fi trovano efsere le fomme corrifpondenti nella prima a $\frac{49}{120}$, nella feconda a $\frac{363}{490}$, e non folo questi valori fi trovano, ma di più ancora fi ofserva quel principio, da cui le predette ferie fogliono derivare, e questo è, che fi avverta, che tali ferie nafcono dalla fottrazione della ferie Armonica fcemata di tanti termini (fe fi parla della ferie de i quadrati diminuiti, o di una unità, o di un numero quadrato fempre il medefimo) che equivalgono al doppio della radice di quel quadrato, che è fempre lo ftefso; oppure [fe fi parla di ferie di numeri Trigonali] nafcono dalla fottrazione da fe ftefsa della ferie Armonica, diminuita di tanti termini, che equivalgono al doppio della radice del numero Trigonale, aumentato di una unità, come chiaramente nei feguenti efempj apparifce.

Efempio I.

XLII. Da questa ferie Armonica, - - - $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$ &c.

fi fottragga la medefima $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{1} + \frac{1}{2}$

rimmane la ferie - - - $\frac{2}{3} + \frac{2}{8} + \frac{2}{15} + \frac{2}{24} + \frac{2}{35} + \frac{2}{48} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$

dunq; la fua metà, cioè $\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{35} + \frac{1}{48}$ che è la ferie de quadrati fcemati di una unità, deve efsere uguale a $\frac{3}{4}$, e fi vede con quale artificio è formata.

Efem-

Esempio II.

Dalla serie - - - - - $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}$ &c.

si levi la medesima $\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}$

$-\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$

Rimane - - - - - - $\frac{6}{7}+\frac{6}{16}+\frac{6}{27}+\frac{6}{40}+\frac{6}{55}+\frac{6}{72}+\frac{6}{91}+\frac{6}{112}$ &c.

uguale ad - - - - - - - $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=2\frac{9}{20}$

Dunque la sesta parte, cioè $\frac{1}{7}+\frac{1}{16}+\frac{1}{27}+\frac{1}{40}+\frac{1}{55}+\frac{1}{72}+\frac{1}{91}+\frac{1}{112}$ che è la serie dei quadrati, sminuita costantemente del quadrato 9, dovrà essere uguale a $\frac{49}{120}$, e con questo si scuoprirà la sua origine.

Esempio III.

Da questa serie - - - $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$ &c.

si tolga essa medesima $\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}$ &c.

$-\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$

risulta per avanzo - - $\frac{7}{8}+\frac{7}{18}+\frac{7}{30}+\frac{7}{44}+\frac{7}{60}+\frac{7}{78}+\frac{7}{98}$ &c.

$=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}=\frac{363}{140}$

Dunque la serie - - $\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{15}+\frac{1}{22}+\frac{1}{30}+\frac{1}{34}+\frac{1}{49}$ &c. che ha per denominatori numeri Trigonali, che sono le metà de i denominatori della serie precedente, dovrà essere uguale a $\frac{363}{490}$.

XLIII. Quello, che si è avvertito in questi tre esempj, tanto per conoscere le origini delle serie, quanto per determinare i loro valori, si deve estendere a qualunque altra, che fosse data, o che si dovesse formare. Rimase per qualche tempo incognito il valore di quella serie, di cui i numeratori formavano la serie degli uguali, e i denominatori la serie de i quadrati, qual sarebbe $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}$ &c. ma anche

 que-

questo è rimasto scoperto dall' industria de i più moderni Algebristi, avendolo Giovanni Bernullio determinato subsestuplo del quadrato della circonferenza, il di cui diametro sia uguale ad uno, e di più ha suggerite le altre maniere di trovare il valore delle serie delle frazioni, delle quali i numeratori essendo fra loro uguali, i denominatori si avanzano, o come cubi, o come terze potenze, o come qualunque altra.

XLIV. Per continuare la stessa materia, e far vedere l'origine di altre serie con i valori loro corrispondenti, si dice, che queste serie sono quelle, che nascono da serie infinite rappresentate in numeri reciprocamente piramidali, triangoli—piramidali, piramidi—piramidali &c. quando si fa la sottrazione di ciascuna di queste serie da se medesima, mutilata del primo termine, e si trova, che se la serie de' triangoli è sottratta da se medesima nel predetto modo, produce una serie, il di cui valore paragonato al valore della serie reciproca de i piramidali, sta a questo, come $\frac{2}{3}$ ad $1 \dagger \frac{1}{2}$, e se è sottrazione fatta dalla serie di Piramidali, lascia una serie, che paragonata al valore della serie de i Triangoli—piramidali si trova, che ha a questa la ragione di $\frac{1}{16}$ ad $1 \dagger \frac{1}{3}$, come finalmente se quella serie, che si sottrae da se medesima è di Triangoli—piramidali, rimane per avanzo una serie di un valore di $\frac{4}{5}$, che confrontato col valore della serie de i Pirpiramidali, starà ad esso, come $\frac{4}{5}$ ad $1 \dagger \frac{1}{4}$, e così delle altre.

XLV. Rimane ancora per la materia presente di dovere accennare il modo di scoprire la somma, e l'ultimo termine di quelle serie infinite di frazioni, delle quali i numeratori sono ugualmente multiplici de i precedenti accresciuti, o diminuiti d'un qualche numero comune, e i denominatori crescono nella progressione Geometrica. Se ne dà quì un esempio generale, perchè a modo di questo se ne prepari qualunque altro nelle occorrenze.

$$\frac{a}{c} \dagger \frac{ab \dagger d}{cm} \dagger \frac{abb \dagger bd \dagger d}{cmm} \dagger \frac{ab^3 \dagger bbd \dagger bd \dagger d}{cm^3} \dagger \frac{ab^4 \dagger b^3d \dagger bbd \dagger bd \dagger d}{cm^4} \&c.$$

La risoluzione di questa serie si fa con ripetere altrettante serie quanti sono i termini dell' ultimo numeratore dato; onde nel caso proposto avendo cinque termini l' ultimo numeratore, cinque dovranno essere le nuove serie, che si prepareranno, con dare a i numeratori di ciascheduna sole quelle

le parti, che costituiscono una serie di pure proporzionali grandezze in questo modo.

$$I. \quad \frac{a}{c} \dagger \frac{ab}{cm} \dagger \frac{abb}{cmm} \dagger \frac{ab^3}{cm^3} \dagger \frac{ab^4}{cm^4} \text{ \&c.}$$

$$II. \quad \frac{d}{cm} \dagger \frac{bd}{cmm} \dagger \frac{bbd}{cm^3} \dagger \frac{b3d}{cm^4} \text{ \&c.}$$

$$III. \quad \text{—} \quad \text{—} \quad \frac{d}{cmm} \dagger \frac{bd}{cm^3} \dagger \frac{bbd}{cm^4} \text{ \&c.}$$

$$IV. \quad \text{—} \quad \text{—} \quad \text{—} \quad \frac{d}{cm^3} \dagger \frac{bd}{cm^4} \text{ \&c.}$$

$$V. \quad \text{—} \quad \text{—} \quad \text{—} \quad \text{—} \quad \frac{d}{cm^4} \text{ \&c.}$$

XLVI. Passando poi a trovare il valore di ciascheduna di queste nuove serie, si trova che della prima è $\frac{am}{m-b : \text{in } c}$, della seconda $\frac{d}{m-b : \text{in } c}$, della terza $\frac{d}{m-b : \text{in } mc}$, della quarta $\frac{d}{m-b : \text{in } mmc}$, e della quinta $\frac{d}{m-b : \text{in } m3c}$, dunque raccolti insieme tutti questi valori, ad esclusione del primo, si ha questo risultato $\frac{md}{m-1 : \text{in } m-b : \text{in } c}$, che legato insieme, cioè aggiunto a quello, che si è lasciato $\frac{am}{m-b : \text{in } c}$ produce la somma di tutte le serie, cioè il valore della data serie $\frac{amm-am \dagger md}{m-1 : m-b : \text{in } c}$, quale si voleva trovare.

La cognizione dell'ultimo termine dipende dalla cognizione della natura delle due quantità m, b, perchè se sarà $m>b$, oltre il rendere la somma finita, lascia ancora, che l'ultimo termine svanisca. Che se sarà $m<b$, in questo secondo caso infinita si renderà la somma, e infinito risulterà l'ultimo termine. La qual somma altresì rimarrà infinita, essendo $m=b$, ma l'ultimo termine si conoscerà finito, e in questa supposizione cambiati i luoghi delle lettere, cioè posto l'm nel luogo del b si preparerà una nuova serie.

$$\frac{a}{c} \dagger \frac{am \dagger d}{cm} \dagger \frac{amm \dagger md \dagger d}{cmm} \dagger \frac{am3 \dagger mmd \dagger md \dagger d}{cm^3} \text{ \&c.}$$

col valore di ciascheduna delle sue parti, che si esprimerà in

 tal

tal modo $\frac{a}{c}$, $\frac{a}{c} + \frac{d}{cm}$, $\frac{a}{c} + \frac{d}{cm} + \frac{d}{cmm}$, $\frac{a}{c} + \frac{d}{c} + \frac{d}{cmm} + \frac{d}{cm^3}$ &c. e che ci darà il termine infinitesimo cercato $\frac{a}{c} + \frac{d}{m-1 : \text{in } c}$ cioè $\frac{ma-a+d}{m-1 : \text{in } c}$, essendosi altrove mostrato, che la serie di termini infiniti Geometricamente proporzionali nella ragione di m ad 1 quali son quelli, che costituiscono il valore dell'ultimo termine della serie infinita $\frac{d}{cm} + \frac{d}{cmm} + \frac{d}{cm^3}$ &c. equivalgono a $\frac{d}{m-1 : \text{in } c}$, e che questo sommato col primo termine $\frac{a}{c}$ rende appunto $\frac{am-a+d}{m-1 : \text{in } c}$ per il termine infinitissimo composto di un numeratore, che esprime la differenza de i numeratori del primo, e secondo termine, e di un denominatore, che manifesta le medesime differenze, è uguale all' infinitesimo termine $\frac{4am-3a+4d}{4cm-3c}$ della serie $\frac{a}{c}$, $\frac{am+d}{cm}$, $\frac{2am-a+2d}{2cm-c}$, $\frac{3am-2a+3d}{3cm-c}$ &c. ovvero a quest' altro $\frac{a}{c} + \frac{4d}{4m-3c}$ della serie $\frac{a}{c}$, $\frac{a}{c} + \frac{d}{cm}$, $\frac{a}{c} + \frac{2d}{2cm-c}$, $\frac{a}{c} + \frac{3d}{3mc-2c}$ &c.

Si osservi però, che quanto quì si è detto in proposito della somma del termine infinitesimo, ha luogo solo, quando i numeratori sono ugualmente multiplici de i quadrati aumentati di un numero comune, o diminuiti del medesimo, e di più, quando è il termine $ab > a+d$, perchè in caso, che ab fosse uguale ad $a+d$, tutti i numeratori saranno uguali allo stesso a, e la somma della serie diventerà finita, e l'ultimo termine sparirà, quantunque sia $m <$, ovvero $=$ allo stesso b.

XLVII. Dopo di aver parlato delle maniere di trovare le somme di differenti serie in tutti quei casi, che si sono proposti fino ad ora; si può fare anche qualche altra osservazione sopra certe serie, che miste son dette, per derivare i loro termini da termini di altre serie dell' ordine medesimo, per esempio af, bg, cb, di, ek &c. si chiama serie mista, perchè risulta da queste due serie a b, c, d, e. f, g, b, i, k, &c. multiplicate fra loro.

Molti altri esempj di queste serie si possono avere, quando si

do si trasmutano le frazioni in una serie infinita, per ragione di esempio la frazione $\frac{l}{\Pi : m-n}$ se si deve trasmutare in una serie infinita, nasce prima la serie $A\frac{l}{m} + \frac{ln}{mm} + \frac{lnn}{m^3} + \frac{ln^3}{m^4}$ &c. che risulta dalla divisione continua del numeratore della frazione $\frac{l}{m-n}$ per il suo denominatore. In secondo luogo, se la frazione medesima $\frac{l}{m-n}$ si vuol multiplicare in se stessa, risulta la frazione $\frac{l}{\Pi : m-n}$, che colle regole della divisione, ridotta in una serie infinita, rende la serie $B\frac{l}{mm-mn} + \frac{ln}{m^3-mmn} + \frac{lnn}{m^4-m^3n} + \frac{ln^3}{m^5-m^4n} + \frac{ln^4}{m^6-m^5n}$ &c. di cui ciascun termine se si risolve in altrettante infinite serie, si troveranno le seguenti *C.D.E.F.G.*

$$C.\ \frac{l}{mm} + \frac{ln}{m^3} + \frac{lnn}{m^4} + \frac{ln^3}{m^5} + \frac{ln^4}{m^6}\ \&c. = \frac{l}{mm-mn}$$

$$D.\ \quad + \frac{ln}{m^3} + \frac{lnn}{m^4} + \frac{ln^3}{m^5} + \frac{ln^4}{m^6}\ \&c. = \frac{ln}{m^3-mmn}$$

$$E.\ \quad + \frac{lnn}{m^4} + \frac{ln^3}{m^5} + \frac{ln^4}{m^6}\ \&c. = \frac{lnn}{m^4-m3n}$$

$$F.\ \quad + \frac{ln^3}{m^5} + \frac{ln^4}{m^6}\ \&c. = \frac{ln^3}{m^5-m4n}$$

$$G.\ \quad + \frac{ln^4}{m^6}\ \&c. = \frac{ln^4}{m^6-m5n}$$

che ridotte in una sola, col sommare i loro termini omologhi si trova questa serie $\frac{l}{mm} + \frac{2ln}{m^3} + \frac{3ln^2}{m^4} + \frac{4ln^3}{m^5} + \frac{5ln^4}{m^6}$ &c. uguale alla frazione $\frac{l}{\Pi : m-n}$ mista delle serie de i numeri naturali 1. 2. 3. 4. 5. &c. e di quantitá Geometricamente proporzionali. Questa medesima serie si vede nascere, se la frazione data $\frac{l}{\Pi : m-n}$ si converta in una serie: solo che dove tutti i termini della precedente sono legati insieme col segno $+$, in questo caso si osservano a vicenda inseriti i segni $+$, $-$, e si scrive

l $2ln$

$\frac{l}{mm} - \frac{2ln}{m^3} + \frac{3lnn}{m^4} - \frac{4ln^3}{m^5} + \frac{5ln^4}{m^6} -$ &c. $= \frac{l}{\Pi : m-n}$

una serie composta di termini parte negativi, e parte positivi, e nello stesso modo si hanno le seguenti serie.

$$A.\ \frac{l}{m^3} - \frac{3ln}{m^4} + \frac{6lnn}{m^5} - \frac{10lnn}{m^6} + \text{\&c.} = \frac{l}{C : m-n}$$

$$B.\ \frac{l}{m^4} - \frac{4ln}{m^5} + \frac{10lnn}{m^6} - \frac{20ln^3}{m^7} \text{\&c.} = \frac{l}{QQ : m-n}$$

$$C.\ \frac{l}{m^5} - \frac{5ln}{m^6} + \frac{15lnn}{m^7} - \frac{35ln^3}{m^8} \text{\&c.} = \frac{l}{SS : m-n}$$

miste tutte, o di termini geometricamente proporzionali, o di serie di numeri trigonali, o di serie Geometriche, e piramidali, e si avrebbero miste di qualunque altra serie più alta, se si volessero estendere gli esempj a manifestare altresì tali serie, fatte dalla moltiplicazione di qualunque altra specie di serie più alte.

XLVIII. Quello dunque, che si ha da notare su queste serie può essere, che in ogni progressione Geometrica, che sempre più discende verso l'infinito, essendo il primo termine determinato, ed essendo frapposti i termini alternativamente positivi, e negativi, la somma di questa serie ha il suo termine, al quale però non arriva mai, e molto meno lo può oltrepassare, qualunque sia quella ragione, che fra i dati termini si ponga; imperocchè se per ipotesi si supponga $n>0$, oppure $<m$ sarà $\frac{l}{m+n} < \frac{l}{m+o} = \frac{l}{m}$, come sarà $> \frac{l}{m+m} = \frac{l}{2m}$ cioè il valore della serie sarà sempre minore del suo primo termine, ma maggiore della sua metà.

Se poi si supponga $m=n$, diventerà la frazione $\frac{l}{m+n} = \frac{l}{2m}$, e la serie $\frac{l}{m} - \frac{ln}{mm} + \frac{lnn}{m^3} - \frac{ln^3}{m^4}$ &c. corrisponderà a quest' altra $\frac{l}{m} - \frac{l}{m} + \frac{l}{m} - \frac{l}{m} +$ &c. l'una, e l'altra uguale ad $\frac{l}{2m}$, non perchè la seconda di queste serie presa da se sia la medesima che la prima, per rendere il medesimo valore,

ma

ma perchè continuandosi la divisione di l per $m+n$, l'avanzo della divisione sempre rimane l, e però il quoziente della divisione; non è sola la serie seconda descritta, ma ha di più la frazione formata dall'avanzo, e dal divisore, prevenuta dal più, o dal meno, secondo che l'ultimo termine di quella serie si vede, che ha avanti di se l'uno, e l'altro de i segni predetti: dunque la seconda descritta serie equivale alla seguente $\frac{l}{m} - \frac{l}{m} + \frac{l}{m} - \frac{l}{m}$ &c. $- \frac{l}{2m} = \frac{l}{2m}$.

Nella stessa maniera, con cui si sono mostrati i valori di tutte le descritte serie fin quì, si potrebbe far conoscere la condizione di quelle serie composte di differenziali, e di quantità indeterminate, e di quantità differenziali con quantità costanti, o coefficienti, ma perchè una tale notizia presuppone la cognizione del calcolo differenziale, a questo effetto si fa seguire il seguente paragrafo.

§. III.

Del Calcolo differenziale.

IXL. Quello, di cui fin quì si è parlato, è servito per farci conoscere i valori di differenti serie continuate nell' infinito; si vuole adesso insegnare il modo di levare da una qantità, sia ella quale esser si voglia, una porzione infinitamente piccola, la quale presa infinite volte, venga a produrre quella data infinita quantità, di cui questa minima porzione può esser chiamata una infinitesima, cioè una patte si piccola, che si toglia ogni possibilità di trovarla minore, cho dobbiamo valutarla, come lo stesso nulla, rispetto a quelle quantità, colle quali non può confrontarsi, e che finalmente non produce errore alcuno nelle nostre operazioni, se questa o casualmente, o a bello studio da noi si trascuri.

Una parte dunque si piccola, perchè infinitamente piccola, è quella, che è chiamata *Differenziale*, e quantità differenziali, ovvero *Flussioni* sono chiamate quelle, che si considerano come differenze di due quantità variabili, cioè di quelle quantità, che si distinguono dalle quantità chiamate Costanti, per non essere sempre le medesime quelle, come son queste, e noi

e noi osserviamo un tale distintivo nelle corde di un circolo, e nel diametro, perchè dove le corde sempre sono varie, il diametro costantemente è lo stesso; e perchè sempre è lo stesso, però di una tale quantità, come di tutte l'altre costanti, non si da alcuna differenza, e seppure si volesse esprimere la differenza, si esprimerebbe col zero. Le lettere particolari, che servono per le quantità costanti sono le prime lettere dell'Alfabeto, a riserva della lettera d, le ultime tre sono applicate a manifestarci le quantità incostanti; ed il proprio carattere, con cui comunemente si esprime la differenza di queste quantità, è la lettera d, che per evitare la confusione non ha mai altro uso diverso in tutta la serie di questo calcolo.

L. Venendo ora al particolare delle operazioni, si dice, che si può dimandare la differenza di più quantità, sommate insieme, o sottratte, o di più quantità multiplicate, e divise, e per tutte queste operazioni si prescrivono le seguenti regole.

Regola per le quantità aggiunte, o sottratte.

Si dovrà prendere la differenza di ogni termine dato, e questa legata con i segni medesimi, che si trovano nell'operazione, mostrerà un altra quantità, in cui si trova espressa la differenza cercata.

Regola per le quantità multiplicate.

La differenza del prodotto di più quantità multiplicate è uguale alla somma de i prodotti dalla differenza di ciascuna di queste quantità per i prodotti dell'altre.

Regola per la Divisione.

La differenza della divisione si multiplichi colle quantità da dividersi, e la differenza delle quantità da dividersi, si multiplichi col divisore: il primo prodotto si levi dal secondo, e diviso l'avanzo per il quadrato del divisore, il quoziente è la differenza cercata.

Applicazione delle predette Regole.

LI. 1. Si trovi la differenza di queste quantità sommate insieme, o sottratte l'une dall'altre $a + x + y - z$. Perchè si suppongono le parti delle quantità variabili x, y, z. accresciute di una

di una porzione infinitamente piccola, questa sarà dx, dy, dz: onde se si scriverà $a \dagger x \dagger dx \dagger y \dagger dy - z - dz$ si avrà la divisione delle quantità sommate insieme, e se si scriverà in questo modo $dx \dagger dy - dz$, si lascierà la differenza cercata dopo fatta la sottrazione.

2. Si trovi la differenza di due quantità multiplicate fra loro yz, perchè la differenza della prima quantità y si trova $y \dagger dy$, e la differenza della suddetta z, deve essere $z \dagger dz$, basterà multiplicare queste due quantità fra loro, che nel risultato $yz \dagger ydz \dagger zdy \dagger dzdy$, si troverà la differenza $ydz \dagger zdy \dagger dzdy$: ma perchè $dzdy$ è una quantità infinitamente piccola per rapporto alle altre zdy, ydz, mentre se $dzdy$ si divide per dz, e si divide ancora zdy per dz della prima divisione rimane dy, della seconda rimane y, cioè una parte a cui la prima non ha alcun confronto, per essere infinitamente piccola, per questo si determina, che la vera differenza deve essere $ydz \dagger zdy$, che si troverà più speditamente, se la differenza dell'una, e dell'altra quantità data si multiplicherà vicendevolmente in questa guisa, multiplicando prima dy per z, e poi dz per y, e risulterà per l'appunto $zdy \dagger ydz$.

Quando poi le quantità date fossero più di due, per esempio tre, quattro, ovvero cinque, e più altre; per operare in questi casi si osserva, che se sono tre le quantità date, si prende la differenza trovata, quando sono due, e questa si multiplica per la nuova quantità aggiunta, e si preparano i primi due termini della nuova quantità aggiunta, che esprimerà la differenza cercata, poi l'ultimo termine si prenderà con prendere delle tre date quantità le prime due per porle avanti al segno differenziale, con porre dopo la quantità, che ha multiplicati i primi termini preparati, e così sarà compita l'operazione, e questa regola si osserverà ogni qual volta saranno anche in maggior numero i termini, da quali si dovrà prendere la differenza, come in questi due esempj si vede.

Esempio I. che propone la differenza di yzx.

La differenza di yz, per l'antecedente operazione si è trovata $zdy \dagger ydz$, dunque questa multiplicata per x darà $zxdy \dagger yxdz$, l'ultimo termine si trova $yzdx$, dunque tutta la differenza sarà $zxdy \dagger yxdz \dagger yzdx$.

Esempio II. che propone la differenza di $yzxu$, *e questa si trova* $uzxdy + uyxdz + uyzdx + yzxdu$.

3. Si cerca ora la differenza di due quantità divise fra loro, come di $x:y$. Il differenziale di y è dy, che multiplicato per x produce xdy. Il differenziale di x è dx, che multiplicato per y lascia ydx. Tolto il primo prodotto dal secondo rimane $ydx - xdy$. Diviso quest' avanzo per il quadrato del divisore, che è y^2 lascia il differenziale cercato $ydx - xdy : y^2$.

Se il caso fosse in quest' altro esempio $xy : uz$, si opererebbe nella maniera di prima, ed ecco la serie delle operazioni. Prima si dovrebbe preparare il differenziale della quantità divisa xy, e questo sarebbe ydx, xdy, poi il differenziale del divisore, che sarebbe zdu, udz. In secondo luogo le parti del primo differenziale si dovrebbero multiplicare per il divisore uz, e risulterebbe $uzydx + uzxdy$, e si doverebbero multiplicare le parti del secondo differenziale per le quantità divise, cioè per xy, e si avrebbe $xyzdu + xyudz$. In terzo luogo si scriverebbe la sottrazione dell' una dall' altra così $uzydx + uzxdy - xyzdu - xyudz$, e questo risultato diviso per il quadrato del divisore u^2z^2, lascierebbe la differenza delle quantità divise scambievolmente, come quì appresso.

$$uzydx + uzxdy - xyzdu - xyudz : u^2z^2.$$

LII. Servono le precedenti operazioni per trovare la differenza delle quantità intere. Si tratta però, che non solo da queste, ma ancora dalle frazioni si può avere la differenza, che pure si può prendere da qualunque altra potenza, o delle perfette, o delle imperfette. Si trova la differenza da una frazione, quando dalla frazione data si prende la differenza del numeratore, e si multiplica per il denominatore, ed il risultato si scrive con meno il risultato della multiplicazione della differenza del denominatore per il numeratore, con dare alla nuova frazione così formata per denominatore il quadrato del denominatore della data frazione, ed in tal guisa si ha $\frac{adx - xda}{xx}$ per la differenza di questa frazione $\frac{a}{x}$ come $\frac{adx}{a^2 + 2ax + x^2}$ si vede, che ha da essere la differenza di $\frac{x}{a + x}$.

LIII. Dovendo la differenza prendersi da qualche potenza, generalmente parlando l'operazione si fa con questa regola.

la. Si prende il numero esponente della potenza, e dopo di esso si scrive la lettera, che esprime la quantità data tante volte una meno, quante sono le unità nell' esponente della potenza, cioè due volte, se l' esponente è il 3, cinque volte, se l' esponente è il 6, e così degli altri; poi si multiplica questo prodotto per la differenza della quantità data, e nel risultato si riscontra la differenza, che si voleva trovare. $5x^4dx$ si conosce dalla regola fissata, che esprime la differenza di x^5, nella stessa maniera, che la differenza di y^7 si trova essere $7y^6dy$, ovvero $mx^{m-1}dx$ s' intende essere la differenza di x^m potenza indeterminata. Potrebbe accadere, che la potenza data fosse composta, come sarebbe, se si dovesse prendere la differenza del cubo di $\overline{bx-zz}^3$. Sicchè per trovarla si da questa regola, si multiplica per il 3 esponente della potenza la potenza medesima ridotta ad un grado inferiore, cioè alla seconda; vale a dire si multiplica $3\times\overline{bx-zz}^2$, ed il prodotto di nuovo si multiplica per la differenza delle parti, che compongono la potenza data, cioè si multiplica per bdx, differenza della prima parte bx — la differenza di zz, che è $2zdz$, e nel risultato si ha la differenza richiesta, che si trova essere

$$3b^3xxdx-6bbzzxdx+3bz^4dx-6bbxxzdz+12bxz^3dz-6z^5dz.$$

Si trova colla medesima regola la differenza di $\sqrt{zx+xx}$, che corrisponde a $\overline{zx+xx}^{\frac{1}{2}}$, se preparati, come dianzi, i termini da multiplicarsi $\frac{1}{2}\times\overline{zx+xx}^{\frac{1}{2}-1}\times\overline{zdx+xdz+2xdz}$, si scriverà per risultato della operazione $\dfrac{zdx+xdz+2xdx}{2\sqrt[2]{zx+xx}}$: e lo stesso si opera, se la potenza è tale $\sqrt[3]{bx+zz}$, che equivale a questa espressione $\overline{bx+zz}^{\frac{1}{3}}$, mentre cercandosi la differenza, si trova $\frac{1}{3}\times\overline{bx+zz}^{\frac{1}{3}-1}\times\overline{bdx+2zdz}=\dfrac{bdx+2zdz}{3\sqrt[3]{\overline{bx+zz}^2}}$.

Sia pure la potenza anche più composta, come potrebbe essere questa $\sqrt{bz+zz+\sqrt{b^4+bzxx}}$, che praticando costantemente la regola fin quì praticata, si può trovare la differenza, che si dimanda, e in fatti si trova, che è $\frac{1}{2}\times\overline{bz+zz+\sqrt{b^4+bzxx}}\times\overline{bdz+2zdz+\dfrac{bxxdz+2bzxdx}{2\sqrt{b^4+bzxx}}}=\dfrac{bdz+2zdz}{2\sqrt{bz+zz+\sqrt{b^4+bzxx}}}+\dfrac{bxxdz+2bzxdx}{2\sqrt{b^4+bzxx}\times2\sqrt{bz+zz+\sqrt{b^4+bzxx}}}$.

Come finalmente si può trovare anche la differenza

di $\frac{\sqrt[3]{bz+zz}}{\sqrt{zx+xx}}$ praticando è la regola precedente, e quella data per le frazioni, facendo $\frac{\frac{bdz+2zdz}{3\sqrt[3]{bz+zz}}\times\sqrt{zx+xx}\;\frac{-xdz-zdx-2xdx}{2\sqrt{zx+xx}}}{zx+xx}$

LIV. Per non lasciare ombra di difficoltà, che possa nascere dal non vedere con chiarezza ciò, che in tutti i precedenti esempj si è determinato, si vuole aggiugnere la spiegazione di alcuno di essi, e rendere più manifesta la verità, che sarà facile poi riscontrare negli altri. Si cercò nel primo esempio la differenza del cubò $\overline{bx-zz}^3$, e si trovò $3b^3xxdx-6bbzzxdx-3bz^4dx-6bbxxzdz+12bxz^3dz-6z^5dz$, ora che questa sia la vera differenza, la seguente operazione lo prova.

Si faccia primieramente secondo le regole ordinarie il cubo di $bx-zz$, e questo si trova che è $b^3x^3-3bbxxzz+3bxz^4-$ Venendo ora a differenziare i termini di questo cubo, egli è chiaro, che per essere la prima quantità una delle costanti, non si può differenziare; dovrà dunque differenziarsi la seconda x^3, e perchè la differenza di questa, secondo la regola generale è tale $3xxdx$, se a questa quantità si aggiugne la prima costante, si trova, che il primo termine intero ha da essere $3b^3xxdx$, che riscontra esattamente col primo termine posto nella prima operazione. La seconda quantità, che compone il cubo è $-3bbxxzz$, cioè a dire anch' essa è una quantità composta parte di termini costanti, e parte di termini incostanti; pertanto la differenza potrà solo trovarsi di questi termini $xxzz$. Per le regole stabilite, la differenza di $xxzz$, si ha $2xxzdz+2zzxdx$, dunque se questa differenza trovata si multiplica per il termine costante $-3bb$ ha da risultare $-6bbxxzdz-6bbzzxdx$, e tutta questa quantità si vede pure nella differenza del primo esempio. La terza quantità, che si legge nel cubo è $+3bxz^4$, cioè la sola parte xz^4 capace della differenza, che pure si trova tale $z^4dx+4xz^3dz$, e questa se si multiplica per la sua parte costante $+3b$, lascia per risultato $+3bz^4dx+12bxz^3dz$, cioè altri due termini, che corrispondono con i precedenti. In ultimo luogo nel cubo preparato si trova $-z^6$, onde se dovendosi di questa ultima parte trovare la differenza, si ha, che questa è $-6z^5dz$. Non rimane cosa più da desiderare per avere una piena intelligen-

za

za di quel modo, con cui nel primo esempio si è operato, in cui riscontrano tutte le parti con quelle, che ora si sono trovate con questa maggiore spiegazione.

LV Nel risultato del secondo esempio, perchè non si abbia difficolta, si osserva quello, che altrove si osservò: che è la stessa cosa il dire $\overline{zx+xx}^{\frac{1}{2}-1}$, che dire $\overline{zx+xx}^{-\frac{1}{2}}$, ovvero $\frac{1}{\sqrt[2]{z+xx}}$, dunque dovendosi multiplicare $\frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt[2]{zx+xx}} \times \overline{zdx + xdz + 2xdx}$, necessariamente il risultato deve essere quello, che si è stabilito nel secondo esempio, cioè $\frac{zdx + xdx + 2xdx}{2\sqrt[2]{zx+xx}}$, come il risultato del terzo esempio è il suo proprio, perchè anche in quella operazione il termine $\overline{bx+zz}^{\frac{1}{3}-1}$ si è cambiato nel suo equivalente $\overline{bx+zz}^{-\frac{2}{3}}$, cioè in quest'altro $\frac{1}{\sqrt[3]{bx+zz}}$.

LVI. Per ottenere il risultato, che si riscontra nell'esempio della frazione, quattro operazioni si fanno. La prima trova la differenza del numeratore della detta frazione. La seconda prepara la differenza del denominatore, con premettere a tutti i termini il segno —. La terza multiplica le due differenze trovate, multiplica la prima per il denominatore della frazione, multiplica la seconda per il numeratore. La quarta finalmente riquadra il denominatore della frazione, e in questi risulrati si ha presa la differenza della data frazione, quale si vede nell' ultimo esempio, in cui, perchè la differenza del numeratore, è $\frac{bdz+2zdz}{3\sqrt[3]{bz+zz}}$, la differenza del denominatore preceduta da segni del meno è $\frac{zdx-xdz-2xdz}{2\sqrt{zx+xx}}$, e il quadrato del denominatore è $zx+xx$, percio disposti tutti questi termini al loro luogo, rilevano questa quantità: $\dfrac{\frac{bdz+2zdz}{3\sqrt[3]{bz+zz}} \times \sqrt{zx+xx} \frac{-zdx-xdz-2xdx}{2\sqrt{zx+xx}}}{zx+xx}$ per la differenza cercata dalla frazione. Ecco dunque in qual modo si possono rendere chiare le operazioni osservate negli esempj precedenti. Si dà per regola generale, che nello scrivere le differenze, si usano i segni +. —, quali si trovano avanti a i termini differenziati, se non che si pone sempre il

— avanti alle differenze prese dai denominatori di una qualche frazione.

LVII. Dopo di aver trovata la differenza in qualunque data quantità, può portare il caso, che di una quantità in tal modo differenziata, si abbia nuovamente ad assegnare un altra differenza, e poi un altra, e successivamente un altra sino a che uno vuole: per la qual cosa non ha da tralasciarsi di avvertire, come si abbia da intraprendere una tale operazione, e con qual carattere debba essere distinta dalla precedente. Il distintivo suo proprio consiste nella repetizione della lettera *d* tante volte, quante sono state le differenze già prese dalle quantità differenziate, oppure si distingue questa nuova operazione colle esponenti delle potenze applicate alla lettera *d* con quel numero, che esprime il grado del differenziale, che si è preso in questo modo dx^2, dx^3, dx^4, &c. in vece di scrivere ddx, $dddx$, $ddddx$ &c. Si dice il differenziale di primo grado quella prima differenza, che si prende da una qualche quantità, che non è stata differenziata come dx, laddove, se dopo che è stata differenziata, si voglia prendere dalla medesima una nuova differenza, e poi un altra, e da questa medesimamente se ne voglia prendere un altra, e così di mano in mano, queste nuove differenze sono quelle, che formano il differenziale del secondo, del terzo grado &c. cioè sono tante parti infinitesime della precedente quantità, già differenziata.

LVIII. Le operazioni di questo calcolo, che è chiamato differenzio-differenziale, sono le medesime, che le operazioni del calcolo differenziale ordinario: che però bene apprese le regole, che si son date per questo, non si troverà difficoltà per esercitarsi nell'altro, e a tale effetto qui solo addurremo alcuni esempj, perchè la considerazione, che si potrà fare sopra di loro, ci guidi al maneggio delle stesse operazioni in nuovi casi corrispondenti;

Esempio I.

Dato qualunque differenziale x d x *differenziarlo di nuovo*.

Si fa l'operazione nella maniera, con cui antecedentemente si trovò la differenza di quelle quantità, che vicendevolmente si multiplicavano, e si ha per risultato $xdx^2 \dagger x^2d^2x$, che nasce dalla multiplicazione di xd per xdx, e dalla multiplicazione di $dxxdx$. *Esem-*

Esempio II.

Si propone in questo esempio, che si trovi il differenziale di z : dz.

Corrisponde l' operazione a quella in cui si prende la differenza di due quantità, che si dividono fra loro, e però se si praticheranno le sue regole, sarà il differenziale dimandato $dz^2 - zd^2z : dz^2$, risultando il primo di lui termine dalla multiplicazione di $dz \times dz$, e il secondo dalla multiplicazione di $zd \times zd$ legati insieme col segno meno per segno di sottrazione, con avervi posto appresso il quadrato del divisore dz per regola di questa operazione.

Esempio III.

Il differenziale, che in questo esempio si cerca è della potenza già differenziata dz^2, e però perchè nulla vi è più in particolare da osservarsi su questa operazione di quello, che già si è avvertito, parlando del modo di differenziare le potenze, però applicando a questo bisogno le regole date per tutti i casi di questa fatta, si trova, che il differenziale della potenza dz^2, deve essere $dz^2 d^2z + dz^2 dz$, cioè $2dz^2 d^2z$. Generalmente dunque parlandosi in questo calcolo differenzio-differenziale, sempre si ha da avvertire di prendere le quantità già differenziate, come se fossero quantità ordinarie, dipendendo solo da casi speciali la cognizione di quelle, che di tutte le date quantità differenziate hanno da considerarsi, come quantità variabili, o pure come quantità costanti.

LIX. Perchè con sicurezza si possa determinare se veramente la differenza trovata sia quella, che doveva prendersi, e se tutto l' operato fin quì, per differenziare una quantità, sia fatto con regola, si suggerisce un metodo, che ci può molto acquietare, e nel tempo stesso farci apprendere nuove strade per insinuarci sempre nel più recondito delle Matematiche speculazioni.

Tratta questo metodo di farci scoprire quelle quantità, dalle quali sono state prese le differenze, e perchè questo si fa con ridurle, da separate che erano, alle intere, per tal motivo l' operazione, che in questo metodo s' intraprende, porta il nome di calcolo integrale, o come altri lo chiamano, di metodo inverso delle Flussioni. In tutto questo metodo non si riscontra, che una sola operazione, e questa è ben fatta, se

la

la quantità, che col di lei mezzo si trova, è quella stessa, da cui fu presa la differenza, supposto però che in ciò fare riuscisse ben fatta l'operazione, che però si può dire, che la bontà delle operazioni, intraprese tanto col calcolo differenziale, quanto col calcolo integrale, si servono vicendevolmente di prova in occasione di doverle riscontrare, se sono ben fatte, e nel modo, che per le prime si determina un carattere particolare, che le distingue, così pure a queste seconde si dà per proprio segnale la lettera $\int$, che in tutto questo calcolo, dove si trova, non altro esprime, se non che la somma, che si vuol fare, o che si è fatta; quantunque però molte volte, anche senza una tal lettera si trovi il risultato delle somme.

LX. Quantunque una sola sia l'operazione, che con questo calcolo s'intraprende, non una però, ma diverse sono le maniere, colle quali si suol risolvere, attesa la differenza di quei casi, che possono accadere per l'applicazione delle sue regole. Se i differenziali, che si vogliono integrare, sono di queste quantità zy, multiplicate insieme, o di queste $z:y$ divise l'una per l'altra, non vi è cosa più facile a praticarsi, trovandosi nel primo caso $\int.\,dz=z$, e $\int.\,dz+dy=z+y$, e finalmente $\int.\,ydz+zdy=zy$, quello che si doveva trovare, come nel secondo caso si trova $\int.\,ydz-zdy:y^2=z:y$, e in qualunque altro caso di potenza differenziata, qual sarebbe $d(x^2)$, $d(x^3)$ si trova $\int.xdx+xdx=x^2$, ed egualmente $\int.x^2dx+x^2dx+x^2dx=x^3$, o generalmente si ha $x^m=\int mx^{m-1}dx$, ovvero $x^{n:m}=\int(n:m)\,x^{(n-m)}:mdx$. Tali sono le maniere spedite, e corte per avere le somme in tutti questi predetti casi, che non sarebbero niente diverse, se alle quantità differenziate fossero state congiunte quantità, e variabili, e invariabili, potendo benissimo essere $\int dz=az+a$, e $\int.\,(zdx+xdz)=zx+a^{-2}$, ovvero $=zx+bc$. Ma se l'integrale si dovesse prendere da qualunque altro differenziale, potrebbe tal volta seguire l'impossibilità della nostra operazione, che però per non rendere inutile, e vana quella fatica, che si dovrebbe intraprendere per riuscire nel nostro intento, si stima bene di premettere alcune regole col mezzo delle quali si può subito scoprire, se l'operazione sia di quelle, che si possono risolvere, oppure alcuna delle impossibili.

1. In primo luogo si deve avvertire, se la quantità proposta per averne l'integrale, sia un risultato di alcun differenziale,

ziale multiplicato per la sua quantità assoluta, sublimata ad una certa determinata potenza, prerogativa, la quale se si trova, dimostra, che l'integrale per questa regola si può trovare.

2. Si può in secondo luogo avvertire, se la quantità proposta per avere l'integrale, si possa risolvere col mezzo della multiplicazione, o divisione, o estrazione di radice da una quantità, nella quale si abbia un qualche segno radicale, multiplicato per una quantità razionale, ed intera. Così che, se si vede, che possa farsi, manifesta, che l'integrale si può avere.

3. La terza regola ha luogo in quei casi, ne quali per la moltitudine delle parti, che compongono la quantità data, non si vede subito, se si possa da essa levare l'integrale, o nò. Propone dunque, che occorrendo un simil caso, si deve scrivere la data quantità in tal modo, cioè, si deve esprimere con una sola lettera tutta quella parte, che si trova sotto il segno radicale, e poi si deve trasmutare tutta la data quantità in una nuova composta di sole queste lettere surrogate, e per ultimo di questa nuova quantità si deve prendere l' integrale se si puole, il quale integrale si può di nuovo trasmutare nell' integrale cercato, sostituendo il valore alla lettera, che è stata presa: dissi se si può, perchè quando non si possa, sarebbe segno, che l'integrale non si potrebbe avere per nessun altra operazione.

4. Questa quarta regola, che ora seguita, solo ha luogo per operare sopra quelle quantità, le quali sono congiunte con segni irrazionali, e prescrive, che le quantità irrazionali si hanno da trasmutare in quantità razionali, acciocchè fatta una tale riduzione, si prenda da questa nuova serie di quantità razionali l'integrale dimandato, se pur si può.

In tutte le date regole si è sempre posta questa condizionale, se si può, perchè molte volte succede, che non si può trovare questo integrale, e che non si può neppure con sicurezza affermare, se data una qualche quantità, abbia, o non abbia il suo integrale, che è questo un difetto, quale ancora non si è arrivato a scoprire nell' Analisi degl' infiniti, in ordine a cui si desidera in una tal parte questa maggior perfezione.

LXI. Per venire ora all' applicazione delle prescritte regole, possiamo proporre un qualche esempio, perchè meglio col mezzo degli esempj si manifesta la bontà di ciascheduna di

loro, e noi più ci si assicuriamo. se quanto basta, si sono intese. L' esempio per la prima regola è tale. Si trovi l' integrale di questa quantità $dz\sqrt{b + z}$). Il primo esame, che sopra di essa deve farsi, consiste nell' osservare, se ella è un risultato di una differenza multiplicata per una quantità assoluta, sublimata ad una qualche potenza, e perchè si trova, che la quantità assoluta $16-1z$, sublimata alla potenza $\frac{1}{2}$, multiplicata la proposta quantità, perciò siamo sicuri di avere il suo integrale, come si ha $\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}(b+z)(\frac{1}{2}+1)$ ovvero $\frac{2}{3}(b+z)\sqrt{(b+z)}$.

2 La quantità, che si propone per averne il suo integrale con dependenza dalla seconda regola, è la seguente: $(b^3 + bzz - z^3)\,dz\sqrt{\left(\frac{b+z}{z}\right)}$. Da questa quantità non è possibile prendere l'integrale, se il termine, che si trova sotto il segno radicale si considera per la quantità assoluta, mentre viene a essere il suo differenziale una frazione. Dee dunque multiplicarsi in questo caso il numeratore pel denominatore della frazione irrazionale, e pel numeratore della stessa frazione irrazionale si dee multiplicare l' avanzo della quantità razionale, acciocchè da questa multiplicazione risulti una frazione, di cui il numeratore sia una quantità razionale, e il denominatore un altra quantità irrazionale, e si sarà preparata una quantità, da cui si potrà prendere l' integrale richiesto. Essendo dunque la quantità data $(b^3 + bzz - z^3)\,dz\sqrt{\left(\frac{b+z}{z}\right)}$ ridotta uguale a quest' altra $(b^4 + bbz + bz^3 - z^4)\,dz : \sqrt{(bz + zz)}$ si avrà l' integrale, che per questa regola si dovea trovare.

3. L' integrale da ritrovarsi per mezzo della terza regola, si vuole da questo esempio $(bz + zz)\,dz\sqrt{(b + z)}$; applicando dunque la regola, si fa $b + z = y$, dunque sarà $z = yy - a$, e $dz = 2ydy$, e tutta la quantità $(bz + zz)\,dz\sqrt{(b + z)}$ sarà uguale $2y^6dy - 2ay^4dy$, di cui l'integrale dovrà essere $= \frac{2}{7}y^7 - \frac{2}{5}ay^5$.

4. Per l' ultima regola si dà questo esempio $b^3dz : y\sqrt{(bz - zz)}$ per trovarsi il suo integrale in questo modo. Sia il quadrato di $\sqrt{bz - zz}$ parte irrazionale $= bbzz : mm$, dunque per questo supposto viene ad essere $z = bmm : [mm + bb]$, e però $\sqrt{[bz - zz]} = bbm : [mm + bb]\ dz = 2b^3mdm : [mm + bb]^2$, sicchè tutta la data quantità, cioè $b^3dz : y\sqrt{[bz - zz]}$ si è fatta ugua-

uguale $2b^3dm : mm$, di cui l' integrale si trova $= -2b^3 : m$, e posto il valore dell' m, che è $= \sqrt{} [bbz : (b-z)]$, si trova $\sqrt{} [4b^5 - 4b^4z] : z\} = 2bb\sqrt{} [(b-z] : z)$ uguale all' integrale della data quantità.

LXII. Tutte le regole precedenti possono sibbene servire per farci trovare l' integrale della quantità, ma non sì costantemente, che non s' incontri qualche volta della difficoltà per ridurle alla pratica, per tanto non è fuor di proposito il mettere in veduta quei casi, ne' quali pare, che non si possa operare colle allegnate regole, e principalmente colla prima. Sette fra gli altri sono avvertiti questi casi, che tutti gli manifestiamo in altrettanti esempj.

I.

$$dz\sqrt{(bbzz \dagger z^4)}$$

II.

$$(3bz^3dz \dagger 4z^4dz) : \sqrt{(bz \dagger zz)}$$

III.

$$zdz : (b^4 \dagger 2b^2z^2 \dagger z^4)$$

IV.

$$bdz : \sqrt{(2bz \dagger zz)} \dagger zdz : \sqrt{(2bz \dagger zz)}$$

V.

$$(bdz \dagger zdz) : \sqrt{(3b \dagger 2z}$$

VI.

$$bzzdz : \sqrt{(bbz^2 \dagger z^4)}$$

VII.

$$zdz\sqrt{(b \dagger z)}$$

Ecco però come in tutti questi esempj dobbiamo operare per ritrovare gl' integrali delle stabilite quantità. Una piccola mutazione si dee fare sopra ciascuno esempio, che niente altererà la sostanza della quantità, ma solo ci disporrà in altra maniera le sue parti, col giovamento, che noi pretendiamo.

1. Si scriverà dunque il primo esempio in tal modo: $zdz\sqrt{(bb \dagger zz)}$ e l' integrale sarà $(\frac{1}{3}bb \dagger \frac{1}{3}zz)\sqrt{(bb \dagger zz)}$.

2. Nel secondo esempio, se una, o alcune lettere, cioè se la lettera z si trasporterà sotto il segno radicale, e si scriverà $(3bzzdz \dagger 4z^3)\sqrt{(bz^3 \dagger z^4}$, si avrà della quantità data questo integrale $\frac{2}{3}(bz^3 \dagger z^4)\sqrt{(bz^3 \dagger z^4)}$.

3. Nel terzo esempio, in cui si ha una frazione, di cui

loro, e noi più ci si assicuriamo. se quanto basta, si sono intese. L' esempio per la prima regola è tale. Si trovi l' integrale di questa quantità $dz\sqrt{(b+z)}$. Il primo esame, che sopra di essa deve farsi, consiste nell' osservare, se ella è un risultato di una differenza multiplicata per una quantità assoluta, sublimata ad una qualche potenza, e perchè si trova, che la quantità assoluta $16-1z$, sublimata alla potenza $\frac{1}{2}$, multiplicata la proposta quantità, perciò siamo sicuri di avere il suo integrale, come si ha $-\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}(b+z)(\frac{1}{2}+1)$ ovvero $\frac{2}{3}(b+z)\sqrt{(b+z)}$.

2 La quantità, che si propone per averne il suo integrale con dependenza dalla seconda regola, è la seguente: $(b^3+bzz-z^3)dz\sqrt{(\frac{b+z}{z})}$. Da questa quantità non è possibile prendere l'integrale, se il termine, che si trova sotto il segno radicale si considera per la quantità assoluta, mentre viene a essere il suo differenziale una frazione. Dee dunque multiplicarsi in questo caso il numeratore pel denominatore della frazione irrazionale, e pel numeratore della stessa frazione irrazionale si dee multiplicare l' avanzo della quantità razionale, acciocchè da questa multiplicazione risulti una frazione, di cui il numeratore sia una quantità razionale, e il denominatore un altra quantità irrazionale, e si sarà preparata una quantità, da cui si potrà prendere l' integrale richiesto. Essendo dunque la quantità data $(b^3+bzz-z^3)dz\sqrt{(\frac{b+z}{z})}$ ridotta uguale a quest' altra $(b^4+bbz+bz^3-z^4)dz:\sqrt{(bz+zz)}$ si avrà l' integrale, che per questa regola si dovea trovare.

3. L' integrale da ritrovarsi per mezzo della terza regola, si vuole da questo esempio $(bz+zz)dz\sqrt{(b+z)}$; applicando dunque la regola, si fa $b+z=y$, dunque sarà $z=yy-a$, e $dz=2ydy$, e tutta la quantità $(bz+zz)dz\sqrt{(b+z)}$ sarà uguale $2y^6dy-2ay^4dy$, di cui l'integrale dovrà essere $=\frac{2}{7}y^7-\frac{2}{5}ay^5$.

4. Per l' ultima regola si dà questo esempio $b^3dz:y\sqrt{(bz-zz)}$ per trovarsi il suo integrale in questo modo. Sia il quadrato di $\sqrt{bz-zz}$ parte irrazionale $=bbzz:mm$, dunque per questo supposto viene ad essere $z=bmm:[mm+bb]$, e però $\sqrt{[bz-zz]}=bbm:[mm+bb]$ $dz=2b^3mdm:[mm+bb]^2$, sicchè tutta la data quantità, cioè $b^3dz:y\sqrt{[bz-zz]}$ si è fatta ugua-

uguale $2b^3dm : mm$, di cui l'integrale si trova $= -2b^3 : m$, e posto il valore dell' m, che è $= \sqrt{[bbz : (b-z)]}$, si trova $\sqrt{[4b^5 - 4b^4z] : z]} = 2bb\sqrt{[(b-z] : z)}$ uguale all'integrale della data quantità.

LXII. Tutte le regole precedenti possono sibbene servire per farci trovare l'integrale della quantità, ma non sì costantemente, che non s'incontri qualche volta della difficoltà per ridurle alla pratica, per tanto non è fuor di proposito il mettere in veduta quei casi, ne' quali pare, che non si possa operare colle assegnate regole, e principalmente colla prima. Sette fra gli altri sono avvertiti questi casi, che tutti gli manifestiamo in altrettanti esempj.

I.

$dz\sqrt{(bbzz + z^4)}$

II.

$(3bz^3dz + 4z^4dz) : \sqrt{(bz + zz)}$

III.

$zdz : (b^4 + 2b^2z^2 + z^4)$

IV.

$bdz : \sqrt{(2bz + zz)} + zdz : \sqrt{(2bz + zz)}$

V.

$(bdz + zdz) : \sqrt{(3b + 2z}$

VI.

$bzzdz : \sqrt{(bbz^2 + z^4)}$

VII.

$zdz\sqrt{(b + z)}$

Ecco però come in tutti questi esempj dobbiamo operare per ritrovare gl' integrali delle stabilite quantità. Una piccola mutazione si dee fare sopra ciascuno esempio, che niente altererà la sostanza della quantità, ma solo ci disporrà in altra maniera le sue parti, col giovamento, che noi pretendiamo.

1. Si scriverà dunque il primo esempio in tal modo: $zdz\sqrt{(bb + zz)}$ e l'integrale sarà $(\frac{1}{3}bb + \frac{1}{3}zz)\sqrt{(bb + zz)}$.

2. Nel secondo esempio, se una, o alcune lettere, cioè se la lettera z si trasporterà sotto il segno radicale, e si scriverà $(3bzzdz + 4z^3)\sqrt{(bz^3 + z^4}$, si avrà della quantità data questo integrale $\frac{2}{3}(bz^3 + z^4)\sqrt{(bz^3 + z^4)}$.

3. Nel terzo esempio, in cui si ha una frazione, di cui

il denominatore è una potenza, la radice di questa potenza dee prendersi per la quantità assoluta; onde si prenderà $bb + zz$, e si troverà $-1 : (2bb + 2zz)$ per l'integrale cercato.

4. Contiene il quarto esempio due quantità separate fra loro, e tali, che da nessuna di loro può prendersi l'integrale, si congiungono insieme $(bdz + zdz) : \surd(2bz + zz$, e l'integrale sarà $\surd(2bz + zz)$.

5. Il quinto esempio manifesta una frazione, che pare non abbia l'integrale, ma se tanto il numeratore, quanto il denominatore si multiplichi per la medesima quantità, &c. l'integrale si avrà. Ecco la multiplicazione $(bzdz + zzdz) : \surd(3bz^2 + 2z^3)$. Ecco l'integrale $\frac{1}{3}\surd(3bzz + 2z^3)$.

6. Il contrario accade nel sesto esempio, dovendosi il numeratore, e denominatore della frazione dividere per la stessa lettera, acciocchè si trovi l'integrale. Fatta dunque la divisione per z, risulta $bzdz : \surd bb + zz)$, di cui l'integrale è $b\surd(bb + zz)$.

7. Dove ne' due passati esempj si è trovato l'integrale col mezzo della multiplicazione, e divisione, in questo ultimo si trova coll'addizione, cioè con aggiugnere alla quantità data un altra, della quale si abbia l'integrale. Si aggiunga dunque alla quantità data quest' altra $bdz\surd(b + z)$, e si avrà l'intera quantità $(bdz + zdz)\surd(b + z)$, di cui è l'integrale $\frac{2}{3}(b + z)^2\surd(b + z)$, si levi da questo integrale l'integrale dell'aggiunta, cioè $\frac{2}{3}b(b + z)\surd(b + z)$ rimarrà $\frac{2}{3}(b + z)^2\surd(b + z) - \frac{2}{3}b(b + z)\surd(b + z)$, l'integrale delle date quantità, che se la data quantità fosse un risultato di più membri, in questo caso, trovato l'integrale di ciascheduna parte da se, si farebbe l'unione di tutti insieme, ed in questa unione comparirebbe l'integrale, che si volesse sapere.

LXIII. Non solo coll'aggiugnere alla quantità data un altra quantità, di cui si sappia l'integrale, suole intraprendersi l'operazione per avere gl' integrali delle quantità, ma qualche volta si opera anche colla sottrazione, secondo che il caso lo richiede. E' ben vero, che non sempre poi si trova, che cosa si possa aggiugnere, o levare, ed allora la terza regola stabilita può applicarsi a questa operazione, e si dee fare, che il segno radicale si trasporti nel denominatore, e che il numeratore sia un termine razionale in tutte le sue par-

ti;

ti; di più si dee quella parte del numeratore, dove la lettera indeterminata può avere più dimensioni, alzare ad averne maggiori; siccome si dee alzare la radice sorda, la quale, ogni qual volta, che il membro superiore è multiplicato per una misura della quantità indeterminata, si dee anch' essa multiplicare per una doppia misura, e con una tale operazione si viene a mantenere la frazione sempre uguale. Questa multiplicazione fino a questo segno si dee ripetere, nel quale la più grande misura della quantità indeterminata, presa nella radice, supera di una unità la più grande misura della stessa quantità indeterminata presa nel numeratore, ed arrivato a questo, si dee al risultato nel numeratore aggiugnere, o da esso levare tale quantità, che dalla somma della medesima si possa prendere l' integrale. Compita questa operazione, si dee la medesima intraprendere sopra la quantità aggiunta, o tolta, ma col segno contrario, alla quale si aggiugne quella, che prossimamente succede, ed in tal modo finalmente si scende all' ultimo membro, dove per necessità si può prendere l' integrale. Si riscontra questa regola nel seguente esempio, in cui la quantità, che si dà per averne l' integrale, si pone $=(bbz + z^3).dz\sqrt{(zz-bb)}$.

Esempio.

$$(bbz + z^3)\,dz\sqrt{(zz-bb)} = \frac{(z^5 - b^4 z)dz}{\sqrt{[zz-bb]}} =$$

$$= A\frac{z^9 dz - \frac{4}{5}bbz^7 dz}{\sqrt{(z^{10} = bbz^8)}}\ B\ \frac{b^4 zdz}{\sqrt{(zz-bb}}\ \left[\frac{\frac{4}{5}b^2 z^5 dz}{\sqrt{z^6 - bbz^4}}\right] C\frac{\frac{4}{5}b^2 z^5 dz - \frac{8}{15}b^4 z^3 dz}{\sqrt{(z^6 - bbz^4)}}$$

$$+ D\frac{\frac{8}{15}b^4 zdz}{\sqrt{(zz-bb}}$$

, dunque la data quantità $(bbzdz + z^3dz)\sqrt{[zz-bb]}$ è uguale ad $A + B + C + D$, e perchè A C sono quantità, che hanno gl' integrali, come gli avanzi B, D, hanno ancor essi gl' integrali però di tutta la quantità data, è rimasto trovato l' integrale.

LXIV. Nel particolare di questa quantità, che dee aggiugnersi, o sottrarsi per poter avere l' integrale, si osserva, che vi è una regola stabile, attesa la quale si conosce qual sia la quantità, che si dee aggiugnere, o levare; che però una tal regola quì si vuol porre per compimento di questa materia

ria. Si suppone la quantità, da cui si vuol levare l' integrale, che sia uguale al nulla $=0$, e se in questo caso l' integrale, che da questa supposizione risulta, è lo zero, è segno, che a tutti gli altri integrali non si può nè aggiugnere, nè levare. Ma se, fatta questa supposizione, nulladimeno resta ancora qualche quantità, si dee vedere, se questa quantità, che resta è positiva, oppure, se è negativa, dipendendo l' aggiugnere la quantità da questa, che rimane, se è positiva; come dal rimanere la quantità negativa, si determina, che la quantità si dee levare. La perfezione però di questa regola meglio s' intenderà, quando si sarà data notizia delle equazioni. Si aggiugne per ultimo, come non solo le quantità, delle quali si è parlato, ammettono il suo integrale; ma che questo integrale si trova ancora, dove la quantità data sia espressa con formule generali, come sarebbe $z^{c-1+mc}dz\sqrt[b]{(z^c+f)}$ che è una quantità, la quale risulta dalla multiplicazione della differenza di una quantità assoluta per questa stessa sublimata a qualunque potenza, e dalla z sublimata ad una certa potestà mc, che è multiplice della potenza c.

Per trovare questo integrale, si concepisce, che $\sqrt[b]{(z^c+f)}$ sia uguale a y, e sarà $z^c+f=y^b$, e la sola parte $z^c=$ ad y^b-f, ed i loro differenziali $cz^{c-1}dz$ saranno uguali a $by^{b-1}dy$, ovvero sarà $z^{c-1}dz=\frac{b}{c}y^{b-1}dz$, perchè poi z^c si è fatto uguale ad y^b-f sarà $z^{mc}=(y^b-f)^m$, e però il prodotto z^{mc} in $z^{c-1}dz$ sarà uguale al prodotto $(y^b-f)^m$ in $\frac{b}{c}y^{b-1}dy$, cioè $z^{c-1+mc}dz$, sarà uguale $\frac{b}{c}y^{b-1}dz[y^b-f]^m$.

Si multiplichi ora la prima parte per $\sqrt[b]{(z^c+f)}$, e la seconda per y, si avrà $z^{c-1+mc}dz\sqrt[b]{(z^c+f}=\frac{b}{c}y^bdy(y^b-f)^m$, e perchè m si suppone numero intero, è manifesto, che l' integrale della quantità trovata $\frac{b}{c}y^bdy[y^b-f]^m$ si può avere dalle sue parti, perciò sostituito altresì il valore di y, si avrà l' integrale della quantità data, quale si voleva sapere.

LXV. Perchè tuttavolta può accadere, che m non esprima

ma un numero intero, ma una frazione di numero, però non dee lasciarsi quella regola, che insegna la maniera di ritrovare l'integrale di una quantità in simile occorrenza, e congiuntura. Sia l'esempio nella quantità, che si esprime in tal modo $bz^n dz (ez^r + g)^m$, perchè di essa si trovi l'integrale. L'operazione si dee fare, riducendo la quantità differenziata in una serie infinita, perchè poi, preso da tutti i suoi termini l'integrale, nella somma di questi si abbia quell'integrale, che è proprio della data quantità. Le regole generali per fare questa riduzione sono già state accennate altrove; quì si proporrà la regola, che può servire al presente caso, ed a tutti gli altri, che potessero occorrere, a questo simiglianti. Si considererà $(az^r + g)^m$ come un binome sublimato alla potenza m, e perchè m esprime una dimensione indeterminata, prima d'ogni altra cosa si ha da trovare la sua caratteristica, come dicono. Questa si trova con facilità nella seguente tavola, nella quale si osservano nelle serie *F*, *G*, *H*, *I*, *K*, *L*, i caratteristici proprj di qualunque binome sublimato a qualunque potenza.

	A,	*B*,	*C*,	*D*,	*E*,
F 0	1	0	0	0	0
G 1	1	1	0	0	0
H 2	1	2	1	0	0
I 3	1	3	3	1	0
K 4	1	4	6	4	1
L m	1	m	$\frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2}$	$\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$	$\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$

Spiega-

Spiegazione della Tavola.

Si abbia a ſublimare alla terza potenza *b* † *c*. Perchè ſi trova nella Tavola, che i caratteriſtici della terza potenza ſono 1 . 3 . 3 . 1 . 0, però ſe ſcrivo $1b^3 + 3bbc + 3bcc + 1c^3$, ho ſublimato la data quantità alla terza potenza, e così ſi ſublimerebba a qualunque altra, ſe lo portaſſe il biſogno.

Si trova dunque, che il caratteriſtico di m è 1, m, $\frac{m.m-1}{1.2}$, $\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}$, $\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}$, &c. Dopo queſto, la ſeconda parte del binome $(ez^c+g)^m$ ſi conſidera come la prima, e ſuſſeguentemente ſecondo le regole ordinarie altrove date, ſi prepara la ſerie infinita, quale quì ſi riporta $g^m + mg^{m-1}e^1z^{1c} + \frac{m.m-1}{1.2}g^{m-2}e^2z^{2c} + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}g^{m-3}e^3z^{3c} + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}g^{m-4}e^4z^{4c}$, &c. ſucceſſivamente ſi multiplicano tutte queſte parti per bz^ndz, e riſulta $bz^ndz(ez^c+g)^m$ uguale a queſta ſerie $bg^mz^n + bmg^{m-1}e^1z^{1c+n} + \frac{m.m-1}{1.2}bg^{m-2}e^2z^{2c+n} + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}bg^{m-3}e^3z^{3c+n} + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}bg^{m-4}e^4z^{4c+n}$ + &c $\times dz$. Finalmente preſi gl' integrali di tutti queſti termini, ſi avrà la ſerie $\frac{bg^mz^{n+1}}{n+1} + \frac{mbg^{m-1}e^1z^{1c+n+1}}{1c+n+1} + \frac{m.m-1.bg^{m-2}e^2z^{2c+n+1}}{1.2.2c+n+1} + \frac{m.m-1.m-2bg^{m-3}e^3z^{3c+n+1}}{1.2.3.3c+n+1} + \frac{m.m-1.m-2.m-3bg^{m-4}e^4z^{4c+n+1}}{1.2.3.4.4c+n+1}$ &c. uguale [dopo fatta la diviſione di tutte le parti: bg^mz^{n+1}, e multiplicata la ſomma della ſerie per bg^mz^{n+1}] alla quantità $bg^mz^{n+1}\times e^0z^{0c}$ $\frac{}{n+1} + \frac{m.g^{-1}e^1z^{1c}}{1c+n+1} + \frac{m.m-1g^{-2}e^2z^{2c}}{1.2.2c+n+1} + \frac{m.m-1.m-2g^{-3}e^3z^3}{1.2.3.3c+n+1} + \frac{m.m-1.m-2.m-3g^{-4}e^4z^{4c}}{1.2.3\ 4.4c+n+1}$ + &c. cioè ſarà uguale alla determinata quantità $bz^ndz[ez^c+g]^m$.

LXVI.

LXVI. Si è detto sul principio di questa operazione, che la seconda parte del binome dee considerarsi come la prima, non perchè non possa anche ciascuna parte del binome lasciarsi al suo luogo, ma solo perchè l'operazione riesce più semplice, trasmurando in tal guisa le parti del binome, del rimanente anche lasciatolo stare quale è, si può fare l'operazione, che renderà l'integrale cercato, ma sarà più prolissa. Si avverte in oltre, che se in vece del binome fosse dato qualunque altro multinome, con eguale facilità si troverebbero gl'integrali della proposta quantità, e solo del multinome dato la prima, o qualunque altra parte dovrebbe determinarsi, come principio del multinome, legandosi poi tutte le rimanenti insieme per fare di tutte loro la seconda parte del binome; cioè a dire il multinome si ha da ridurre al binome, e così, se fosse data questa quantità $bz^n dz [ez^r + fz^s + b]^m$, nella quale si trovano tre membri, si dovrebbe ridurre a due soli, considerando $ez^r + fz^s$, come un membro solo, cioè come il secondo, e prendendo $+b$, per primo, a fine poi di operare nel modo, che di sopra si è stabilito, per avere una nuova serie d'integrali, la quale sommata, si fa uguale all'integrale cercato della data quantità.

LXVII. Si avverte finalmente, come le serie degl'integrali talvolta compongono una serie mista, e della medesima serie di coeficienti, e di una simile geometrica d'indeterminate potenze, e di un altra serie armonica, e questa tal serie si osserva, se la serie delle quantità differenziate è composta di una serie geometrica di quantità indeterminate, o di qualunque altra serie di quantità costanti, o coeficienti. Eccone l'esempio $\frac{axx}{2}$, $\frac{bx4}{4}$, $\frac{cx6}{6}$, $\frac{fx8}{8}$, &c. sono gl'integrali di questa serie $axdx$, bx^3dx, cx^5dx, fx^7dx, &c. composta di questa qualunque serie a, b, c, f, &c. e da questa geometrica xdx, x^3dx, x^5dx, x^7dx, &c., dunque ancora la serie degl'integrali risulterà da questa qualunque serie a, b, c, f, &c. e da questa geometrica xx, x^4, x^6, x^7, e dall'armonica $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$, &c. e questo è quello, che nel discorrere della materia della serie fu riserbato al presente luogo, nel quale solo poteva essere inteso, perchè presupponeva la cognizione delle grandezze differenziali, e delle quantità integrali.

LXVIII. Quello, che è ſtato inſegnato, per differenziare le quantità, e per trovare gl'integrali delle medeſime quantità, ſi può eſtendere, ed in fatti ſi eſtende a differenziare le altre quantità, che ſono chiamate eſponenziali, ed a trovare gl'integrali loro, dopo che ſono ſtate differenziate. Già è noto, che per nome di quantità eſponenziale s' intende una dignità, di cui l'eſponente è una quantità variabile, che, come ſi è detto, ſi eſprime con le ſolite lettere y, x, z, ſebbene per eſponenti di una tal dignità ſi poſſano talvolta prendere gli eſponenti delle potenze indeterminate m, n, p, quando queſte veramente ſono tali.

LXIX. Nelle quantità eſponenziali ſi danno diverſi gradi, perciò ſi ſente, che talvolta ſi dee operare ſopra una quantità eſponenziale di primo grado, talvolta di ſecondo grado, e talvolta di grado viepiù ſuperiore. I diſtintivi di queſti gradi conſiſtono nella diverſa maniera di ſcrivere l'eſponente, manifeſtando il primo grado della quantità eſponenziale, queſta maniera di ſcrivere y^m, z^m, x^m, ovvero, y^y, z^z, x^x, come queſt' altra formula z^{m^n}, x^{m^n}, y^{m^n} ſerve per moſtrare l'eſponenziale del ſecondo grado, ed univerſalmente la quantità eſponenziale di qualunque grado ha per eſponente la quantità eſponenziale del grado, che proſſimamente la precede.

Non s' intraprende l' operazione per differenziare le quantità eſponenziali, ſe prima non ſieno trovati i loro logaritmi, perchè trovato il differenziale di queſti, ſubito è trovato il differenziale di quelle, e la regola generale, che a queſto effetto dee ſempre oſſervarſi, viene preſcritta la ſeguente: che il differenziale del logaritmo, ſia come eſſer ſi voglia compoſto, è ſempre uguale al differenziale del numero diviſo per lo ſteſſo numero, come $dl\sqrt{[zz \dagger yy]} = (zdz \dagger ydy):(zz \dagger yy)$. Se ne aggiungono due eſempj, che ſerviranno per norma degli altri.

Eſempio I.

Si dee differenziare m^n *quantità eſponenziale del primo grado.*

Si ſupponga trovato il logaritmo della data quantità, che ſi ha da eſprimere nella operazione colla lettera ſua iniziale lm, dipoi ſi dica $lmdn \dagger ndlm = ldm^n$, e per la regola generale

dlm

$dlm = dm : m$, come $dlm^n = dm^n : m^n$, dunque sarà $lmdn + ndm : m = dm^n : m^n$, dunque $dm^n = m^n lmdn + nm^{n-1} dm$.

Esempio II.

Si dee differenziare m^{n^p} *quantità esponenziale del secondo grado.*

Per la conseguenza dell'Esempio antecedente	($n^p dlm + lmdn^p = dlm^{n^p}$ ($dn^p = pn^{p-1} dn + n^p lndp$
Per la regola generale	($dlm = dm : m$, siccome $dlm^{n^p} = dm^{n^p} : m^{n^p}$

dunque $dm^{n^p} = n^p m^{n^p - 1} dm + pn^{p-1} m^{n^p} lmdn + n^p m^{n^p} lmlndp$.

Nella risoluzione di simili quesiti, si vuol trasmutare la quantità esponenziale in una lettera, a cui si dà il valore, che compete alla medesima, onde nell'uno, e nell'altro esempio si sarebbe potuto fare m^n, m^{n^p} uguale a t, e sarebbe riuscito $nlm =$ ad lt, e $n^p lm =$ similmente ad lt, nel rimanente tutta l'operazione sarebbe tornata la medesima; e tale, e quale è stata fatta per i due casi proposti, si può praticare per altre esponenziali di gradi più alti, anzi per quelle quantità ancora in qualunque modo composte di quelle, come $dm^n p^q = p^q dm^n + m^n dp^q$, dove se si sostituisca il valore di dp^q, dm^n, ora quì sopra trovato, si manifesta il differenziale cercato.

LXX. Per quello, che appartiene al dovere integrare queste quantità differenziate, si rifletta, come dato per esempio il differenziale $x^x dx$ si dee preparare una serie, che gli sia uguale, dunque secondo il metodo si preparerà, quale quì appresso si vede.

$$1 + xlx + \frac{x^2lx^2}{2} + \frac{x^3lx^3}{2.3} + \frac{x^4lx^4}{2.3.4} + \frac{x^5lx^5}{2.3.4.5} + \text{\&c.}\ dx = x^x\ dx$$

Perchè dunque ora si abbia l'integrale di $x^x dx$, si cerca di trasmutare tutte le parti della serie formata per mezzo d'aggiugnere ad esse, o levarle qualche cosa, senza però, che si muti il valore d'ogni, e qualunque sua parte, ed a questo fine si prende dx, come una quantità costante, e ad ogni termine della serie si sostituisce il suo equivalente nel modo, che segue.

 dx

$dx = (dx)$
$xlxdx = (xlxdx + \frac{1}{2}xxdlx) - \frac{1}{2}xdx$

$x^2lx^2dx = (x^2lx^2dx + \frac{2}{3}x^3lxdlx) - (\frac{2}{3}x^2lxdx + \frac{2}{3^2}x^3dlx)$

$+ \frac{2}{3^2}x^2dx$

$x^3lx^3dx = (x^3lx^3dx + \frac{3}{4}x^4lx^2dlx) - (\frac{3}{4}x^3lx^2dx + \frac{3.2}{4^2}x^4lxdlx)$

$+ (\frac{3.2}{4^2}x^4lxdx + \frac{3.2}{4^3}x^4dlx)\ \frac{3.2}{4^3}x^3dx$

$x^4lx^4dx = (x^4lx^4dx + \frac{4}{5}x^5lx^3dlx) - (\frac{4}{5}x^4lx^3dx + \frac{4.3}{5^2}x^5lx^2dlx)$

$+ (\frac{4.3.}{5^2}x^4lx^2dx + \frac{4.3.2}{5^3}x^5lxdlx) - (\frac{4.3.2}{5^3}x^4lxdx + \frac{4.3.2}{5^4}x^5dlx)$

$+ \frac{4.3.2}{5^4}x^4dx$

$x^5lx^5dx =$ &c.

Trasmutati in questo modo i valori de' termini della serie, riesce facile, secondo le regole date, trovare l' integrale, che si vuol sapere, dovendosi l' integrale prendere da ciascuna somma in particolare, come quì appresso.

$\int. dx = x$

$\int. xlxdx = \frac{1}{2}xxlx\ \frac{1}{2^2}xx$

$\int. x^2lx^2dx = \frac{1}{3}x^3lx^2 - \frac{2}{3^2}x^3lx + \frac{2}{3^3}x^3$

$\int. x^3lx^3dx = \frac{1}{4}x^4lx^3 - \frac{3}{4^2}x^4lx^2 + \frac{3.2}{4^3}x^4lx - \frac{3.2}{4^4}x^4$

$\int. x^4lx^4dx = \frac{1}{5}x^5lx^4 - \frac{4}{5^2}x^5lx^3 + \frac{4.3}{5^3}x^5lx^2 - \frac{4.3.2}{5^4}x^5lx + \frac{4.3.2}{5^5}x^5$

$\int. x^5lx^5dx =$ &c.

Che

Che però collocate le colonne, che sono verticali, in positura orizontale, la nuova serie, che risulta, ci fa vedere tutto intero l' integrale di $\int. x^x dx$, quello appunto, che si cercava, trovato con risolvere i termini della serie preparata per la vicendevole addizione, e sottrazione degli equivalenti. Si potrebbe riuscire nel nostro intento con altre regole più generali, ma queste si potranno riscontrare presso gli Autori, che trattano di questa materia, sotto il titolo del Calcolo esponenziale.

C A P. V.

Delle Frazioni decimali.

I. L' Ordine tenuto in tutti i precedenti Capitoli per il buon esito delle prescritte operazioni, ha potuto sibbene farci superare molti ostacoli per la facilità, con cui ci ha guidato alla cognizione di quello. che si cercava, ma non però ha potuto nascondere la difficoltà grande, che spesso s'incontra ne'calcoli delle frazioni, e che affatto si vincerebbe, quando o si potesse per avventura in qualche maniera sfuggire, o quando almeno si potesse il metodo degl' interi farlo servire per le minuzie. Nientedimeno, quantunque di queste due cose, la prima sia inevitabile, e la seconda sia universalmente impossibile, si trova non per tanto una fatta di frazioni, che chiamate sono *Decimali*, alle quali può riuscire a favore di chi le maneggia, l' applicazione del metodo degl'interi, come in fatti noi opereremo con questo metodo nel presente Capitolo. Già abbiamo accennato altrove, che cosa sono le frazioni decimali, come si producono, e come si scrivono; dunque nel presente luogo solo si ha da parlare dell' uso loro, con intraprendere sopra di esse tutte l' Aritmetiche operazioni.

L' uso delle frazioni decimali è massimo sì nella divisione, sì nell' estrazione delle radici, perchè col mezzo di tali frazioni si arriva a conoscere il valore, che più si accosta al giusto, tanto del quoziente, quanto della radice trovata, dipendendo questo dal ridurre la frazione, che rimane nell'una, e nell'altra delle due accennate operazioni ad una frazione deci-

decimale, che subito si prepara, se il numeratore del rotto si fa crescere con tanti zeri, quanti servono perchè il denominatore, o lo divida per l'appunto, o lasci una piccolissima differenza. Così secondo questa regola $\frac{3}{4}$ d'intero si riducono a $\frac{75}{100}$ di frazione decimale, e si riducono $\frac{5}{7}$ a $\frac{7142857}{10000000}$, con questa differenza, che la prima frazione $\frac{3}{4}$ è la medesima, che la frazione decimale, dove la seconda $\frac{5}{7}$ è un poco maggiore della decimale, e la differenza è piccolissima, perchè è di $\frac{1}{10000000}$, d'onde ne nasce, che alle volte la frazione decimale si chiama esatta, come nel primo esempio, perchè manifesta la vera ragione, che ha la parte al suo tutto, e alle volte si chiama approssimante, perchè mostra una differenza, o minore di un unità, come nel secondo esempio, o maggiore della medesima, come sarebbe, se in vece del 7 si fosse scritto 8 per dare l'ultima cifra alla frazione decimale del medesimo secondo esempio.

II. Per venire ora alle operazioni Aritmetiche, che si fanno tutte sopra le frazioni decimali, si tratta di dovere ingrandire, o impiccolire i loro risultati, all'usanza di tutte le altre quantità numeriche, nel che fare, si prescrive per regola generale l'avvertire sempre, che le parti della frazione decimale, che opera, corrispondano alle parti delle altre frazioni decimali, sopra le quali s'intraprende l'operazione, che vuol dire lo stesso, che doversi osservare gli esponenti delle frazioni decimali, perchè sempre corrispondono fra loro. In questa frazione decimale o. 3429^{iv}, ogni parte della prima frazione si dice, che corrisponde ad ogni parte della seconda, cioè, che gli stessi termini esponenziali convengono al 6, ed al 4, al 5, ed al 3, al 2, ed al 7, onde 7, e 2, 3, e 5, &c. si chiamano frazioni decimali del medesimo grado, la qual similitudine di gradi tanto importa, che si mantenga, che quando mai fossero date due frazioni decimali, e in una di esse s'interrompesse l'ordine di questi gradi, prima di operare con esse, dovrebbe supplirsi a quella, in cui fosse il difetto, col tramezzare degli zeri ne' luoghi voti, ripetuti tante volte, quanto sono necessarie, per render tutte le parti della prima frazione corrispondenti a tutte le parti della seconda; onde, se fossero date queste due frazioni 5. 6^{I}. 8 9^{III}. 4^{IV}. 9. 5^{II}. 7^{V}. mancanti respettivamente di varie parti,

nella

nella seconda fra il 9, ed il 5, si doverebbe porre il primo zero, e poi fra il 5, ed il 7, se ne avrebbero da porre due altri; siccome nella prima frazione, dopo il 4 si porrebbe uno zero, e con queste cifre aggiunte, si sarebbero dati eguali gradi alle due frazioni, e si sarebbero preparate nella maniera, che si doveva per fare sopra di esse le operazioni Aritmetiche.

Operazione I. del sommare.

III. Si sommano le frazioni decimali alla maniera ordinaria degl'interi, e non ha altro di particolare questa operazione, fuori che il potersi, prima d' intraprenderla, ridurre tutte le somme particolari all'ultima specie di quel grado, che rappresentano; per esempio, se nella frazione decimale maggiore l' ultimo grado è il v. tutte le parti distinte da' gradi precedenti, si possono risolvere in questo quinto grado, dopo la qual cosa, disposti tutti i termini delle somme, gli uni sotto degli altri, se n' intraprende l' operazione, che si fa, quando si raccolgono insieme diverse somme di semplici quantità. Che se la riduzione non si vuol fare, basta osservare, che tutte le parti notate colle medesime esponenti nelle somme particolari, corrispondano nelle file verticali, che ciò avvertito, s' intraprenderà l' operazione del sommare, secondo le regole date per sommare le quantità composte. Ecco un esempio per tutti due questi modi d' operare.

Esempio I.

$5.6^{\text{I}}\,8^{\text{II}}\,9^{\text{III}}\,4^{\text{IV}}\,0^{\text{V}}$

9.0 5 0 0 7

Riduzione della I. somma.

5.X 10=50
6
56 X 10=560
8
568 X 10=5680
9
5689 X 10=56890
4
56894 X 10=568940
0
568940 *ult. risult. della riduz.*

Ridu-

Riduzione della II. somma.

$9 \times 10 = 90$

$\underline{\quad 0}$

$90 \times 10 = 900$

$\underline{\quad 5}$

$905 \times 10 = 9050$

$\underline{\quad 0}$

$9050 \times 10 = 90500$

$\underline{\quad 0}$

$90500 \times 10 = 905000$

$\underline{\quad 7}$

ultima riduz. della II. somma. 905007

568940^{v}

$\underline{905007}$

1473947^{v} *somma delle due date somme nel I. Esempio.*

Esempio II.

$5 . 6^{I} . 8^{II} . 9^{III} . 4^{IV} . 0^{V}$

$\underline{9 . 0 . 5 . 0 . 0 . 7}$

$14 . 7^{I} . 3^{II} . 9^{III} . 4^{IV} . 7^{V}$ somma del secondo Esempio, in cui riscontra l'operato nel primo Esempio, dove pure si vede, che la riduzione delle frazioni decimali all'ultimo grado è fatta, quando di separate che sono le parti loro, si scrivono unite insieme.

Operazione II. del sottrarre.

IV. Nella sottrazione egualmente, che nell'addizione delle frazioni decimali, si ha riguardo, che tutti i gradi loro corrispondano vicendevolmente, poi si fa l'operazione secondo le regole ordinarie per la sottrazione delle quantità semplici, se si riducono all'ultimo grado, e per la sottrazione delle composte, se si lasciano stare distinte.

Esem-

Esempio.	*Fatta la riduzione*
$15.6^{I}.8^{II}.9^{III}.4^{IV}.0^{V}$	1568940
$9.0.5.0.0.7$	905007
$6.6^{I}.3^{II}.9^{III}.3^{IV}.3^{V}$	663933^{V}

Se una frazione decimale si dovesse levare dall'intero, sarebbe necessario, che all' intero si aggiugnessero tante parti, che corrispondessero a' gradi della frazione decimale, per esempio, se si dovesse sottrarre 695^{III} da 9 intero, a questo 9 si dovrebbero aggiugnere tre zeri, e fatta la sottrazione, rimarrebbe 8.305^{III}.

Operazione III. del multiplicare.

V. Nella multiplicazione delle frazioni decimali risulta la cosa stessa, che risulta dalla multiplicazione delle quantità o semplici, o composte, onde come si opera in quelle, così si fa la multiplicazione di queste. Per quello poi, che risguarda all' esponente del risultato dalla multiplicazione delle frazioni decimali, si pratica lo stesso, che si costuma nella multiplicazione delle potenze, mentre se a queste si dà per esponente la somma degli esponenti delle potenze multiplicate, così ancora la somma degli esponenti delle frazioni decimali, multiplicate, si dà per esponente al risultato della multiplicazione. Si multiplichi dunque

$$5.689^{III} \text{ per } 9.050^{III}$$

o si vuol fare la riduzione di queste frazioni, o non si vuol fare; a qualunque partito si appigli chi opera, la multiplicazione risulterà sempre la medesima, e si troveranno le seguenti somme ——— 51 : 201

. . . . 0
28445
. 0

che raccolte in una sola) som, daranno per risult.) 51.485450^{VI}

Operazione IV. della Divisione.

VI. Anche nella divisione delle frazioni decimali si opera come nella divisione delle quantità o semplici, o composte, e per sapere quale esponente si dee dare al quoziente, si ha da levare l'esponente del divisore dall'esponente della frazione divisa, e in questo solo caso non importa, che tutti i gradi del divisore si trovino nel diviso. Si divida dunque 78. $5^{I}\, 9^{II}\, 3^{III}\, 4^{IV}\, 9^{V}$ per 32. $3^{I}\, 4^{II}\, 3^{III}$, e fatta l'operazione

2. 13907. 4
.7902. 9

si troverà questo quoziente 2. 43^{II}. Ma se il divisore non entrasse per l'appunto nella frazione da dividersi, scritto in questo caso il quoziente intero, appresso ad esso si porrebbe l'avanzo con sotto il divisore all'usanza di frazione, così dividendosi 11. 234^{III} per 153, si troverà per quoziente 73^{I}. 65. In caso, che la frazione da dividersi fosse minore di quella, che dovesse dividere, si dà per regola generale il dovere accrescere di tanti zeri la minore, quanti sono necessarj: per ragione di esempio, se dovesse dividersi 32 per 160 s'intenda aggiunto al 32 uno zero, che poi si potrà fare la divisione secondo il solito.

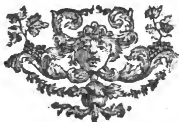
VII. Non solamente tutte le precedenti calcolazioni si possono intraprendere sopra le frazioni decimali, ma anche quelle operazioni, che si possono fare sopra di esse, appartengono all'estrazioni di radici o quadrate, o cube, &c. e per far questo, si osservano le stesse regole date per l'estrazione della radice dalle intere quantità; onde praticare tali regole, essendo data una frazione decimale, perchè si estragga da essa la radice o quadrata, o cuba, risulterà l'una, o l'altra delle due dimandate radici. Per quello, che risguarda all'esponente, che dovrà poi assegnarsi alla radice trovata, si nota, che se la frazione è quadrata, ed ha per esponenti numeri pari, le loro metà serviranno d'esponente alla radice trovata, se la frazione è cuba, e gli esponenti similmente sono espressi in numeri, che possono dividersi dal 3, il quoziente di questa divisione sarà l'esponente della radice cuba; che se nel primo caso quegli esponenti non sono pari, e nel secondo non sono divisibili per il 3, alle radici estratte si lasceranno gli espo-

esponenti de' loro quadrati, o cubi, ma si scriveranno sopra una linea con sotto il II. all' esponente della radice quadrata, con sotto il III. all' esponente della cuba, e questi segni manifesteranno radici seconde delle terze, quarte, o quinte potenze, o esprimeranno radici cube delle seconde potenze, quinte, seste, &c. come si è detto, parlando della estrazione delle radici dalle potenze al suo luogo.

VIII. Si osserva per ultimo, che vi è modo di sapere, qual parte d' intera quantità sia la data frazione decimale, e questo si fa, se la frazione data si multiplichi per il valore della quantità, che si cerca, e poi si parta per l' equivalente del suo grado, mentre in ciò, che si avrà di quoziente da questa operazione, sarà il valore della quantità, che si dimanda. Ponghiamo l' esempio: si vuol sapere quante parti di lira sono 5340^{IV}. Per la soluzione del quesito due cose si hanno da determinare, la prima il valore della lira, che sono 20 soldi, la seconda il valore del grado IV della frazione decimale, che è 10000. Determinate queste due cose, multiplico per il 20. 5340, cioè la frazione data, e risulta 106800, poi questo risultato lo parto per 10000, e trovo il quoziente primo 10, coll' avanzo di 6800, che lo multiplico per 12, giacchè il dodici è il numero de' denari, che compone il soldo, e risulta 81600, il quale parto per il medesimo 10000, e trovo il quoziente 8, con un avanzo di $\frac{1600}{10000}$, che lo lascio andare per non avere la lira altre parti minori; sicchè con questa operazione trovo, che 5340^{IV} di frazioni decimali, corrispondono a soldi dieci, e denari otto di lira, quello che si voleva sapere.

IX. Tutte le precedenti operazioni potrebbero rinnovarsi, se fossero date frazioni d'altra denominazione, per esempio sessagesimali, avvertendo nel praticarle di osservare le regole altrove fissate per le stesse operazioni ne' numeri di differente specie, come pure si dee osservare, che nel rilevare i risultati loro dall' addizione, e multiplicazione, quel numero, che si porta non è il 10, ma il 60, ovvero qualunque altro, secondo la qualità della frazione stabilita, nella quale questo 60, o sia altro numero, equivale all' unità, che si porta nelle operazioni ordinarie dell' addizione, e multiplicazione de' numeri.

X. Non occorrendo dunque altra cosa da doversi avvertire per le operazioni, che generalmente si possono intraprendere sopra la quantità discreta considerata in tutte quelle maniere, secondo le quali si può considerare maneggiata, o colle solite cifre, o col mezzo delle lettere, ponghiamo termine a questo Trattato, per dar luogo a nuove altre riflessioni, che serviranno di fondamento a quante operazioni sono state quì fino ad ora praticate.



L A



LA SCIENZA DELLE GRANDEZZE

DIMOSTRATA

COLLE PRINCIPALI CALCOLAZIONI

NUMERICHE, ANALITICHE, E GEOMETRICHE

Trattato Secondo

DELLE PROPORZIONI

CAPITOLO I.

Della ragione in generale, e delle ſue ſpecie in particolare.

I. In tanto che ſi tratta d'ingrandire, e d'impiccolire la quantità, noi ci fermiamo a conſiderare quelle proprietà, che alle grandezze convengono per natura delle parti, che le compongono, ma non già per quella relazione, che può trovarſi fra diverſe eſtenſioni, allorchè le une ſi paragonano alle altre, e tutte fra loro ſcambievolmente. Nel precedente Trattato ſi è abbaſtanza diſcorſo del modo di unire, o di levare le parti dalle quantità, per farle vedere una volta maggiori, ed un altra minori, rimane dunque, che ſi parli ora delle combinazioni loro ſcambievoli, per conoſcerne i varj modi, con i quali ſi fanno, per ſaperne il loro uſo, e per ricavarne con profitto le più utili conſeguenze alla noſtra ſcien-

fcienza. La quantità, mentre è fola, non fi può chiamare *maggiore*, non fi può dire *minore*, nemmeno può confiderarfi *eguale*, effendo quefte tre voci, particolari efpreffioni del noftro dire, che folo allora fi adoprano, quando abbiamo a chi potere paragonare la quantità. Quindi è, che chi confiderò la grandezza in fe medefima, la definì una *pura eftenfione nelle fue parti*, capace del più, e del meno, quando fi ha da innalzare, o da impiccolire, perchè non ci fparifca in un tratto; pofta a confronto d'un altra. Laddove, quando fu confiderata con quefto confronto, fi adoprò una delle tre predette voci, e fi diffe una grandezza uguale all' altra, o maggiore, o minore di effa, ed il confronto, che allora fi fece, riportò un proprio nome, che è quello, che noi volgarmente dichiamo *ragione*, cioè confronto di due grandezze, ordine, rifpetto, relazione di una cofa ad un altra, ovvero un modo, con cui una grandezza fi dice, che contiene, o che è contenuta dall'altra. In diverfe fpecie fi fuol dividere la ragione, perchè in diverfe maniere fi poffono paragonare fra loro le grandezze. In qualunque modo però quefto fucceda, ogni ragione fuppone fempre due termini, cioè quello, che fi paragona, fi riferifce, o che contiene un altro, e quello, a cui fi fa il paragone, il confronto, o che è contenuto. Il primo termine fi chiama *antecedente*, il fecondo *confeguente*, e tutti due è neceffario, che li concepifca l'intelletto, fe vuole efattamente concepire una ragione. Se fi paragonano due cofe uguali, la ragione fi dice di *egualità*, fe il paragone è di due cofe difuguali, rifulta quella ragione, che è detta di *inegualità*.

I. Il 9. paragonato al 9. ci produce la prima ragione, e fi ha l'efempio della feconda nel confronto del 16. al 5.

II. Le cofe, che fono uguali fra loro, non poffono paragonarfi, che in una fola maniera, e da ciò deriva, che la ragione di egualità è fempre la fteffa; al contrario poi, perchè le cofe, che fono difuguali fi poffono riferire all' altre in più modi, perciò la ragione d' inegualità in due fpecie fi divide, e ciafcuna di quefte in molte altre. Può il confronto farfi di una grandezza maggiore ad una minore, ed ecco, che nafce da ciò la ragione detta di *maggiore inegualità*, e può riferirfi una minore grandezza ad una maggiore, e quefto

sto riferimento pone in vista quella ragione, che si chiama di *minore inegualità*. La ragione del 16 al 5 è una ragione d'ineguaglità maggiore, come l'altra del 4 al 10 è di minore ineguaglità.

III. Per quanto l'antecedente della ragione possa esser maggiore del suo conseguente, non lascia nientedimeno di farci distinguere un qualche termine, dentro di cui si limiti la condizione di quel rapporto, che l'uno all'altro ha da avere, se ciò forse non potesse seguire, quando fossero infinite quelle grandezze, che fra loro si paragonassero, e fossero della natura, di cui sono quelle, che si chiamano *incommensurabili*; sebbene sì nelle prime, che nelle seconde vi sia poi modo, come con più verisimilitudine si sostiene) di trovare anche in questi due casi la qualità, e la condizione di tali confronti. Affine dunque di proporre con un qualche ordine le differenze di tutte le ragioni, che possono risultare dagl'infiniti modi, con i quali una grandezza o contiene, o è contenuta da un altra, si può discorrere in questa guisa: o la grandezza, che contiene un altra, la contiene in maniera, che si può esprimere questo modo, o sivvero non si può esprimere, se si verifica la prima cosa, noi chiamiamo questa *ragione razionale*, nell'altro caso vogliamo dirla *irrazionale*, e *sorda* La voce *razionale* ci addita una ragione, di cui l'intelletto conosce tutto quello, che può in essa manifestarsi, e di più ha in pronto termini sì proprj per farla avvertire anche agli altri, che non ci lascia più dubitare di avere noi bene intesa la natura di una tale ragione. Quando poi si dice *ragione irrazionale*, s'intende subito, che non occorre sperare di poter conoscere quel modo, con cui le grandezze paragonate vicendevolmente si contengono, e che molto meno possiamo aspettare di udire i vocaboli bene adattati a scuoprire la loro condizione, che alla espressione della lingua è ignota affatto, ed al raziocinio dell'intelletto. Supponghiamo per tanto, che non si possa sapere quante volte x contenga, o sia contenuta da b, questa ragione l'abbiamo da chiamare sorda, e irrazionale, e per lo contrario è razionale la ragione del 16 al 4, perchè subito si vede, che si può esprimere il numero delle volte, che l'antecedente contiene il conseguente.

IV. Mol-

IV. Molte sono quelle voci, che noi usiamo per manifestare una ragione razionale, ed in tutte si osserva un diverso paragone di due grandezze. Se gli antecedenti delle ragioni contengono precisamente i conseguenti più volte, senza che di loro avanzi alcuna parte, queste ragioni sono quelle, che si chiamano multiplici, e ci vengono contrassegnate con distinti nomi, cioè di ragione *dupla*, *tripla*, *quadrupla*, &c. se l'antecedente contiene il conseguente due volte, tre volte, quattro volte &c. Le ragioni del 16 all'8, del 15 al 5, del 12 al 3, formano quegli esempj, che convengono alle descritte ragioni.

V. Non sempre poi li conseguenti sono contenuti in sì fatta guisa dagli antecedenti, che non avanzi alcuna lor parte. Questa sopravanza una qualche volta, e di quì segue, che si mutano i nomi delle ragioni, e sempre se ne sostituiscono de' nuovi. *Parti aliquote* si dicono quelle, che sopravanzano a i conseguenti, che sono contenuti dagli antecedenti delle ragioni, e si deduce questo loro nome dalla proprietà delle stesse parti, che per qualche volta sono misurate da i conseguenti medesimi. Nella ragione del 12 al 9, osserviamo, che il 12 contiene il 9 una volta con tre unità di più del medesimo 9. Ora queste tre unità sono quelle parti aliquote delle quali ora parliamo, avvertendo, che tre volte entrano nel 9, e che però formano una terza parte del 9. La differenza di queste parti aliquote è quella, che introduce differenti ragioni, per la qual cosa la ragione si suol chiamare *superparticolare*, *superpaziente*, *sesquialtera*, *sesquiterza*.

La ragione è *superparticolare*, quando l'antecedente contiene il conseguente una volta coll'avanzo di una aliquota, che non è nè la metà, nè il terzo; paragonandosi il 7 al 6, risulta la ragione superparticolare, perchè il 7 contiene il 6 una volta coll'avanzo di una parte aliquota, che non è nè la metà, nè il terzo.

La ragione è *superpaziente*, quando l'antecedente contiene il conseguente una volta, ed avanzano più parti aliquote, che non sono nè la metà, nè il terzo. Il 9 paragonato al 5 mostra la ragione superpaziente, perchè le 4 parti, che restano hanno la condizione stabilita.

La ragione è *sesquialtera*, se l'antecedente contiene il conseguente una volta, e mezzo; laonde perchè il 12 contie-

tiene l'8 in tal guisa, perciò questa ragione del 12 all' 8 si chiama sesquialtera.

La ragione finalmente è *sesquiterza*, allorchè l'antecedente di questa ragione contiene il conseguente una volta coll'avanzo del terzo. Una ragione di questa fatta è la ragione dell' 8 al 6, perche l' 8 contiene il 6 una volta coll' avanzo del 2, che è la terza parte del 6. Quando gli antecedenti delle ragioni contenessero i loro conseguenti più volte, e rimanessero gli avanzi predetti, ciascuna delle quattro precedenti specie della ragione si direbbe *moltiplice*, ed in questo senso la ragione del 15 al 7 sarebbe moltiplice dupla superparticolare, la ragione del 24 al 5 sarebbe moltiplice quadrupla superpaziente, come sarebbero una moltiplice tripla sesquialtera, e l'altra moltiplice tripla sesquiterza; la ragione del 28 all' 8, e del 20 al 6.

VI. Tutte queste specie di ragioni appartengono alla ragione di maggiore inegualità, perchè in esse sempre gli antecedenti sono maggiori de' loro conseguenti; ponghiamo, che i conseguenti sieno dati maggiori degli antecedenti, che allora le ragioni risulteranno altrettante specie della ragione di minore inegualità, che le distingueremo dalle precedenti col mezzo della particola *sub*, che avvertiremo di sempre premetterla a tutti i nomi delle distinte ragioni. Per la qual cosa sentendo noi dire, che una ragione è *submoltiplice*, è *subsuperparticolare*, *subsuperpaziente*, *subsesquialtera subsesquiterza*, *submoltiplice superparticolare*, *submoltiplice superpaziente*, *submoltiplice sesquialtera*, *submoltiplice sesquiterza*, in ciascheduna di queste voci ci verrà rappresentata una ragione di minore inegualità. Diversi altri nomi si adoprano per distinguere diverse altre ragioni, ma di questi nomi non mai si servono i moderni, i quali nel manifestare la natura delle ragioni, usano più piccoli termini delle ragioni, per esempio scrivono 2 : 1, e in questo modo esprimono quella ragione, che noi chiamiamo dupla, siccome quando scrivono in questa forma 3 : 2, vogliono mostrare, che la ragione è sesquiterza, ed universalmente ogni ragione, quando è razionale, sono soliti di farla conoscere, mediante la sua esponente. Si chiama *esponente della ragione* quel quoziente, che risulta dalla divisione del maggior termine della ragione, fatta per il

minore, e queſto nome a lui ſi dee, perchè ci fa conoſcere la maniera, con cui l' antecedente della ragione, o contiene, o è contenuto dal ſuo conſeguente. Laonde, ſe ci è data la ragione del 9 al 6, ſarà $1 \frac{1}{2}$, che è quoziente della diviſione del 9 per il 6, l' eſponente della ragione.

VII. Li confronti quì ſopra fatti ſono di due grandezze fra loro, quelli che ora vogliamo aggiungere, ſono di una ragione ad un altra. Non meno dunque ſi poſſono paragonare fra loro le grandezze di qual ſorta ſi ſieno, che le ragioni; e queſto ſecondo confronto è cauſa d' una nuova differenza di ragioni, che ſi chiamano ora ſimili, ed ora diſſimili. Le ragioni ſono ſimili, quando quelle ragioni, che ſi paragonano hanno il medeſimo nome; due ragioni ſeſquialtere, due ragioni ſeſquiterze, due triple, due quintuple, &c. ſi chiamano ragioni ſimili, che ſe ſi paragonaſſero due ragioni, delle quali una foſſe dupla, e l' altra tripla, una ſeſquiterza, e l' altra ſuperparticolare, in queſto caſo i confronti ſarebbero di due ragioni diſſimili. Non è però ſempre vero, che ſieno ſimili ragioni quelle, che hanno il medeſimo nome, perchè può darſi il caſo, che ſi paragonino fra loro due ſuperparticolari, o due ſuperpazienti, e che queſte ragioni ſieno diſſimili. La ragione del 7 al 6, e quella del 9 all' 8, ſe le conſideriamo ciaſcheduna da ſe, ſono due ragioni ſuperparticolari, ma non per queſto il confronto, che di eſſe ſi fa, ſi ha da dire di due ragioni ſimili, mentre quella parte aliquota, che avanza nella prima ragione, non corriſponde a quella, che rimane nell' altra, e ſi diſtinguono fra di loro, come ſi diſtingue $\frac{1}{6}$ da un $\frac{1}{8}$. Si dirà dunque meglio, volendoſi dare la vera idea delle ragioni ſimili, quando diremo, che le ragioni ſimili ſono quelle, delle quali gli antecedenti contengono egualmente i conſeguenti, o vicendevolmente i conſeguenti, delle quali contengono egualmente i loro antecedenti, ovvero delle quali gli eſponenti ſono eguali. Tre confronti poſſono prepararſi per conoſcere ſe le ragioni ſono ſimili. O ſi paragonano due antecedenti ad un ſolo conſeguente, o ſi paragonano due conſeguenti ad un ſolo antecedente, o finalmente ſi paragonano due antecedenti a due conſeguenti. Se abbiano da determinare in ciaſcheduno di queſti confronti la condizione delle due ragioni, dobbiamo dire nel primo, che

le

le ragioni date ſtanno fra loro, come gli antecedenti. Nel ſecondo, che ſtanno, come i conſeguenti reciprocamente preſi, e che nel terzo confronto, per vedere, ſe le ragioni date ſono ſimili, o diſſimili, le dobbiamo ridurre a due altre ragioni, che abbiano due antecedenti, ed un ſolo conſeguente.

VIII. Per la ſpiegazione di tutte tre le riſpoſte, ſi avverta, che la parola *ſtare*, in queſto luogo adoperata, vuol dire aver relazione, ed eſprime quel modo, con cui una grandezza contiene, o è contenuta dall'altra. Ciò ſuppoſto, quando nella prima ſi è detto, che le ragioni ſtanno fra loro come gli antecedenti, ſi è inteſo di dire, che ſe gli antecedenti ſono uguali, le ragioni ſono ſimili, ſe ſono diſuguali, ſono ancora diſſimili le ragioni. Eſſendo due ragioni diſſimili, ſubito ne viene, che una ſia maggiore dell'altra, che però ſi determina maggior ragione quella, che ha l'antecedente maggiore, e minore, l'altra, che ha l'antecedente minore, e la loro differenza ſi dovrà rilevare dalla differenza degli antecedenti. Figuriamoci di avere da ſtabilire, ſe la ragione del 9 al 4 ſia ſimile alla ragione del 12 allo ſteſſo 4, ſi vede ſubito, che per non eſſere il 9 uguale al 12, non ſi può dire, che le due ragioni date ſieno ſimili, reſta perciò deciſo, che ſono diſſimili, cioè, che una è maggiore dell'altra, e che la ragione maggiore è quella del 12 al 4, ed è maggiore di tanto, di quanto il 12 ſupera il 9, cioè d'un terzo, vale a dire il 12 ha un terzo più del 9, perchè poſſa contenere il 4 nella ſteſſa maniera, che lo contiene il 9.

IX. Dovendoſi ſpiegare la ſeconda riſpoſta, ſi nota il ſignificato della parola reciprocamente, che è queſto, di volere eſprimere, che ſi ha da cambiare il nome della ragione maggiore, e minore, a tenore de' termini, de' quali ſi afferma una tal voce. Per la qual coſa eſſendoſi riſpoſto, che le ragioni ſtanno fra loro come li conſeguenti reciprocamente preſi, ſi è voluto dire, che ſe i conſeguenti ſono uguali, le ragioni ſono ſimili, ſe ſono diſuguali, ſono diſſimili, e che quella ſarà maggiore, che avrà il conſeguente minore, e quella minore, che avrà il conſeguente maggiore; per tanto di queſte due ragioni, cioè del 4 al 6, e del 4 al 10, la ragione maggiore ha da eſſere la ragione del 4 al 6, e minore

dee eſſere la rimanente, e vi ſarà fra loro quella ſteſſa differenza, che ſi vede eſſere fra il 6, ed il 10.

X. La riduzione, di cui parla la terza riſpoſta, corriſponde a quella operazione, che ſi fece, quando due frazioni di differente denominazione ſi riduſſero a due altre della medeſima denominazione, mentre ſi fa anche queſta col multiplicare l'antecedente della prima ragione pel conſeguente della ſeconda, e l'antecedente della ſeconda pel conſeguente della prima. Il riſultato della prima multiplicazione ſi ha da porre appreſſo al primo antecedente, il riſultato della ſeconda ſi pone dalla parte del ſecondo antecedente, poi fra loro ſi multiplicano i conſeguenti delle due ragioni, e riſulta il conſeguente comune. Compiuta tutta queſta operazione, ſi vede ritornare il primo confronto, che però, ciò che ſi è riſpoſto per quello, vale per queſto, e ſi conoſce, ſe le due ragioni ſono ſimili, o diſſimili fra loro, e quale di eſſe è la maggiore. Le due ragioni date ſono $\frac{9}{6}$ $\frac{5}{4}$, la prima multiplicazione è 36, la ſeconda è 30. La multiplicazione de' conſeguenti produce 24, dunque le due ragioni date reſtano ridotte a queſte due $\frac{36}{24}$, $\frac{30}{24}$, e la loro diſſimilitudine ſubito appariſce dalla diſuguaglianza de' nuovi antecedenti, e ſi conoſce, che la ragione del 9 al 6, a cui corriſponde la ragione del 36 al 24, è maggiore di quella del 5 al 4, a cui è correlativa l'altra del 30 al 24.

XI. Riſultano ancora le ſimili ragioni da altre combinazioni, che ſi poſſono fare, col riferire alcune grandezze ad altre, alle quali hanno una ſteſſa egualità di ragione. Quando ſi dice egualità di ragione, s'intende di dire una coſa molto differente da quella, che ſi ſuole intendere, allorchè ſi dice ragione eguale. Conſiſte queſta differenza in ciò, che ha di proprio la ragione uguale, e l'egualità di ragione. La prima è un mero confronto di due grandezze uguali fra loro; la ſeconda è un confronto di due ragioni ſimili; quindi ne viene, che le ragioni uguali ſono ſimili fra di loro, ma due ragioni ſimili non ſono ſempre ragioni eguali. Venendo ora ad accennare quelle ragioni ſimili, che riſultano dalle diverſe combinazioni, ſi ſcelgono dieci voci, alle quali già è ſtata appropriata ciaſcheduna combinazione, e ſono *invertendo*, *permutando*, *per egualità ordinata*, *per egualità perturbata*, *per*

con-

converſione di ragione, *dividendo*, *componendo*, *detraendo*, *raccogliendo*, *e congiungendo*.

1. La prima di queſte voci, cioè l'*invertendo*, ſuppone una combinazione di due ragioni ſimili, o ſieno queſte di maggiore, o di minore inegualità, che poco importa, e riſolve, che ſe ſi arroveſceranno i confronti de i termini delle ragioni, cioè ſe i conſeguenti ſi paragoneranno agli antecedenti, le ragioni loro rimarranno ſimili, onde perchè la ragione del 9 al 4 è ſimile alla ragione del 27 al 12, ancora *invertendo*, la ragione del 4 al 9 ſarà ſimile a quella del 12 al 27, e non vi ſarà altra differenza, ſe non quella, che vi è fra il continente, ed il contenuto, contenendo nel primo confronto gli antecedenti i loro conſeguenti, quando nel ſecondo gli antecedenti ſono contenuti nello ſteſſo modo da i loro conſeguenti.

2. La ſeconda voce *permutando*, ſuppone anch' eſſa una combinazione di due ragioni ſimili, e ne inferiſce due altre egualmente ſimili, quali ſi trovano ne' confronti degli antecedenti fra loro, e de' loro conſeguenti; ſicchè ſerbando l' eſempio di ſopra propoſto, queſta nuova combinazione inferiſce, che il 9 ſtarà al 27, come il 4 al 12, cioè, che queſte due ragioni ſaranno ſimili fra di loro.

3. La combinazione, che ſi fa coll' *egualità ordinata*, preſcrive due ordini di ſimili grandezze, e le diſpone in tal modo, che la prima del primo ordine ſtia alla ſeconda, come la prima del ſecondo ſta alla ſeconda del ſecondo ordine; e che la ſeconda del primo ſtia alla terza, come la ſeconda del ſecondo ſta alla terza, e così di mano in mano in ciaſchedun ordine ſtieno tutte le rimanenti grandezze fra loro, e poi ne inferiſce, che la prima grandezza del primo ordine ſtarà all' ultima, come la prima del ſecondo ordine ſta alla ſua ultima. Poſſono conſiderarſi, come grandezze del primo ordine le ſeguenti 9, 6, 4, e queſte altre 27, 18, 12 poſſono prenderſi come grandezze del ſecondo ordine. Le due ragioni, che formano le tre prime grandezze, non vi è chi non le conoſca ſimili a quelle due, che reſultano da i tre termini del ſecondo ordine, eſſendo tutte ſeſquialtere, dunque ancora l' eſtreme ragioni di ciaſcheduno ordine, cioè del 9 al 4, e del 27 al 12, per egualità ordinata ſaranno ſimili fra

li fra loro, e realmente lo sono, perchè sono due *sesquiquarte*.

4. L' *egualità perturbata* niente meno inferisce, che l' egualità ordinata, perchè suppone anche essa una combinazione di due ordini di ragioni simili, ma in tal modo disposte, che la prima ragione del primo ordine sia simile alla seconda del secondo ordine, e la seconda del primo sia simile alla prima del secondo ordine, pel qual motivo si chiama una tale egualità perturbata, che però ancora in essa l' ultime ragioni in ciascheduno ordine dovranno esser simili fra loro, ed in fatti, perchè in questi due ordini 16, 8, 4, che è il primo, 20, 10, 5, che è il secondo, la ragione del 16 all' 8 è simile alla ragione del 10 al 5, e la ragione dell' 8 al 4 è simile alla ragione del 20 al 10, ancora la ragione del 16 al 4 sarà simile alla ragione del 20 al 5, cioè l' una, e l' altra di queste due ragioni sarà moltiplice quadrupla.

5. La quinta voce *per conversion di ragione* contiene una combinazione di ragioni simili, che si trovano fra due intere grandezze, e ciascheduna loro parte, dopo che le date grandezze sono rimaste divise proporzionalmente. Due grandezze si dicono proporzionalmente divise, quando quella parte, che si taglia dalla prima corrisponde all' altra, che si leva dalla seconda, come se si levasse dalla prima grandezza una terza, una quarta, una quinta parte, &c., ognuna delle stesse parti si dovrebbe levare dalla seconda grandezza, perchè restasse divisa proporzionalmente. Divise dunque in tal modo, le due grandezze risultano subito due ragioni, da considerarsi sopra la prima, e due altre, da osservarsi sopra la seconda, e sono la ragione di tutta la prima grandezza a ciascheduna delle sue parti, e la ragione di tutta la seconda parimente ad ognuna delle sue parti, che però, se è vero, che tutta la prima grandezza stà alla prima sua parte, come tutta la seconda grandezza stà alla prima sua parte, sarà pur vero, che ancora tutta la prima grandezza starà alla rimanente sua parte, come tutta la seconda grandezza stà alla rimanente sua parte. Sieno le due grandezze date il 27, ed il 18 della prima si prenda la terza parte, che è 9, e questa stessa parte si prenda dalla seconda, che è 6, ben si vede, che il 27 stà al 9, come il 18 al 6, dunque ancora la ragione del 27 alla ri-

rimanente sua parte 18, dovrà essere simile alla ragione della seconda intera grandezza 18 alla rimanente sua parte 12, che è ciò, che risulta dalla conversione di ragione.

6. Non solo dall'essere divise le due grandezze proporzionalmente, s' inferiscono le due accennate simili ragioni, ma se ne inferiscono tre altre, espresse nelle tre seguenti voci, *dividendo*, *componendo*, e *detraendo*. La prima di queste tre voci mostra, che se tutta la prima grandezza stà alla sua parte, come tutta la seconda grandezza stà alla sua parte, ancora *dividendo*, la prima parte della prima grandezza starà alla sua rimanente parte, come la prima parte della seconda grandezza stà alla sua rimanente parte, e però se la ragione del 27 al 9 è simile a quella del 18 al 6, dividendo la ragione del 9 al 18, sarà ancora simile alla ragione del 6 al 12, che sono tutte due submultiplici duple.

7. Che se la ragione delle parti della prima grandezza fosse simile alla ragione delle parti della seconda grandezza, in questo caso sarebbe *componendo*, la ragione di tutta la prima grandezza ad una sua parte, come tutta la seconda grandezza ad una sua parte, cioè nell' esempio precedente il 27 starebbe al 9, come il 18 al 6.

8. Finalmente, se la ragione di tutta l' intera grandezza 27 all'intera grandezza 18 fosse simile alla ragione di una sua parte 9 al 6, che è una parte della seconda grandezza, ancora detraendo il 18, che è parte rimanente nella prima grandezza, starebbe al 12, che è parte rimanente nella seconda, come tutta la prima grandezza 27 stà a tutta la seconda grandezza 18.

9. La combinazione delle ragioni simili, che risultano dal sommare insieme più ragioni, presuppone anch' essa una serie di ragioni tutte simili; per la qual cosa una sola, che non fosse simile all' altre in tutta la serie, basterebbe per distruggere quella similitudine, che inferisce questa voce *raccogliendo;* dunque supponghiamo, che la serie della ragione contenga tre, quattro, o cinque ragioni tutte sesquialtere, ancora la somma di tutti gli antecedenti di queste ragioni, paragonata alla somma di tutti i loro conseguenti, produrrà una ragione sesquialtera, che se fosse stata una serie di ragioni sesquiterze, le descritte somme averebbero mostrata una ragio-

ne

ne ſeſquiterza, e in una parola quel nome, che converrebbe alle ragioni della data ſerie, ſarebbe il proprio della nuova ragione, derivata dalla ſomma di tutti i ſuoi termini. Perchè nella ſeguente ſerie $\frac{8}{10}$. $\frac{4}{5}$. $\frac{12}{15}$. $\frac{16}{20}$. &c. tutte le ragioni ſono ſubſeſquiquarte, perciò ancora la ragione del 40, che è il riſultato della ſomma degli antecedenti al 50, che è riſultato dalla ſomma de' conſeguenti, ſarà una ragione ſubſeſquiquarta.

10. L'ultima voce *congiungendo*, ſuppone una combinazione di due ragioni, gli antecedenti delle quali hanno da eſſere diviſi proporzionalmente in ordine a i loro conſeguenti. Si dividono gli antecedenti proporzionalmente in ordine a i loro conſeguenti, quando le due parti, nelle quali ſi divide ognuno de' due antecedenti, ſi paragonano a i conſeguenti loro reſpettivi, e ſi vede, che formano delle ragioni, che ſono ſimili fra di loro onde, fatta queſta ſuppoſizione, ſubito ſenza errare ſi determina, che congiungendo le ſteſſe parti in ciaſcheduno antecedente, e paragonandoſi il riſultato agli ſteſſi conſeguenti, in queſti paragoni compariranno due ragioni, che ſaranno ſimili fra di loro. Sia l'antecedente di una ragione il 27, ed il conſeguente il 18, ſi divida il 27 in 12, e 15, ecco ſubito due ragioni nuove, la prima è la ragione del 12 al 18, la ſeconda è la ragione del 15 allo ſteſſo 18. La prima ſubſeſquialtera, l'altra ſubſeſquiquinta. Sia l'antecedente d'un altra ragione 54, ed il ſuo conſeguente ſia il 36. Il 54 è quell'antecedente, che ora ſi ha da dividere in due parti, ma queſte due parti non le poſſo più prendere ad arbitrio, ma le ho da fare con queſta legge, che la prima ſtia al 36, come la prima del primo antecedente, cioè il 12, ſtà al 18, che è il ſuo reſpettivo conſeguente, e che la ſeconda ſtia al ſuo ſteſſo conſeguente 36, come l'altra parte del primo antecedente, cioè il 15 ſta al 18, dunque il 54 non lo potrò dividere, che in 24, e in 30, perchè ſolo queſte due parti ſtanno al 36, come le parti del primo antecedente 12, e 15 ſtanno al 18, ed ora è, che congiungendo il 12 col 15, cioè il 27 ſtà al 12, come il $24 + 30 = 54$ ſtà al 36, cioè, che la ragione di tutto il primo antecedente al ſuo conſeguente è ſimile alla ragione di tutto il ſecondo antecedente al ſuo conſeguente.

XII. Ecco ſecondo il loro ordine poſte in viſta quelle prin-

principali combinazioni, dalle quali derivano le simili ragioni, e della verità loro ne siamo tanto sicuri, quanto siamo certi di questo assioma, sopra cui tutte si fondano, quale è, che siccome dal vero non nasce il falso, ma il solo vero, così dal simile non può inferirsi il dissimile, ma il solo simile. Essendochè dunque tutte le date combinazioni contengono ragioni, che si suppongono eguali ad una terza, o che hanno ad essa lo stesso riguardo, è necessario però, che abbiano ancora da essere fra loro simili. L' infallibilità di un tale assioma si dimostra così; sia la ragione del 9 al 6 simile alla ragione del 12 all' 8, e la ragione del 27 al 18 simile alla stessa ragione del 12 all' 8, che si prende come una terza ragione, egli è manifesto, che dividendo il maggior termine della prima ragione pel minore, il quoziente sarà $1\frac{1}{2}$, uguale al quoziente della divisione del maggior termine della terza ragione pel minore, ma ancora il quoziente della seconda ragione è simile al quoziente della medesima terza ragione. Dunque le due date ragioni del 9 al 6, e del 27 al 18 avranno lo stesso quoziente, e lo stesso esponente, ma quando gli esponenti sono gli stessi, le ragioni sono simili, come si è detto nella definizione delle ragioni simili, dunque le ragioni, che sono simili ad una terza sono simili fra di loro.

XIII. Un altra terza maniera per far risultare le ragioni simili, ce la somministra la multiplicazione, e la divisione, ed in quattro casi queste si manifestano.

1. Propone il primo, che se i due termini di una ragione si multiplicheranno per un multiplicante comune, comparirà ne' risultati una ragione, che sarà simile alla data. La ragione, che si suppone data sia del 6 al 3, il termine multiplicante sia il 4, risulteranno da questa multiplicazione questi due termini 24, 12, che hanno fra loro la stessa ragione del 6 al 3.

2. La divisione è quella, che nel secondo caso mostra la stessa cosa ne' quozienti, che ella ci lascia, nati dal dividere i termini della ragione per un comune divisore, per la qual cosa, essendo la ragione data del 12 all' 8, perchè i suoi termini si dividano per il 4, la ragione de' quozienti 3, e 2 esattamente corrisponderà alla ragione del 12 all' 8.

3. Sceglie il terzo caso due ragioni simili, per esempio

la ragione del 27 al 18, e del 9 al 6, che sono due sesquialtere, e dà un divisore comune agli antecedenti, ed un altro a i conseguenti, e mostra, che i quozienti nati dalla divisione degli antecedenti, hanno fra loro la stessa ragione, che si vede ne' conseguenti, come la ragione de' quozienti, risultati dalla divisione de' conseguenti, è simile alla ragione de' dati antecedenti. Divisi dunque gli antecedenti delle due accennate ragioni per 3, i quozienti 9, e 3 faranno una ragione simile alla ragione del 18 al 6, e divisi i conseguenti pel 2, la ragione de' quozienti 9, e 3 sarà la stessa, che la ragione degli antecedenti 27, 9.

4. Il quarto caso lo ripiglia la multiplicazione, che si fa degli antecedenti, e de i conseguenti delle ragioni simili per il comune multiplicante, mentre mostra, che i prodotti dalle multiplicazioni degli antecedenti, hanno fra loro la ragione de conseguenti, ed i prodotti dalla multiplicazione di questi stanno fra loro, come gli antecedenti; ed in fatti se sieno date le ragioni del 27 al 18, e del 9 al 6, perchè i termini loro si multiplichino per il 3, ne i primi due prodotti 81 27. Si vede la ragione del 18 al 6, cioè la ragione de i conseguenti, e ne secondi prodotti 54 18. comparisce quella del 27 al 9, cioè quella degli antecedenti.

Questi quattro ultimi casi ugualmente concludono con verità la simiglianza delle ragioni, che gli altri sopra accennati, perchè osservandosi nella divisione, che il divisore sta alla grandezza, che si divide, come l' unità al quoziente, e che trattandosi del multiplicare, fra il multiplicante, e il prodotto si trova la stessa ragione, che vi è fra l' unità, ed il numero da multiplicarsi, abbiamo subito nei due casi, che ci ha proposti la divisione, e la multiplicazione, come paragonare gli esponenti delle ragioni ad una terza ragione, per vederli, che sono uguali fra loro, che è quello, che si richiede, acciocchè le date ragioni sieno simili.

XIV. Gli esempj sopra de i quali si sono fatte cadere tutte le combinazioni, che ci rilevano due ragioni simili, si sono presi da i numeri per far vedere in un tratto, e con molta semplicità quell' evidente, che subito non apparisce, se in altra sorte di quantità si stabilisca un qualche confronto. Le parti componenti del numero sono facili a riscontrarsi o uguali.

li, o ſimili alle parti di un altro, che però baſta qualunque piccola oſſervazione di chi le maneggia; laddove non comparisce con eguale facilità la natura di quelle parti, dalle quali riſulta una quantità continua, nè ſi può vedere in una occhiata, ſe i paragoni ſieno razionali, o irrazionali; come accade, che ſono tali, quando le quantità ſono di quelle, che ſi dicono *incommenſurabili*. Dovendoſi per tanto ora trattare di queſte grandezze, avanti ad ogni altra coſa, ſi ha da determinare la loro natura, per conoſcerle, che coſa ſono, quali ſono, e come ne loro confronti ſi abbia da operare, per determinare quell' ordine, o relazione, che poſſono avere ſcambievolmente.

XV. Le grandezze ſi dicono *incommenſurabili* allora quando non ſi può avere una miſura comune, che ſia capace di miſurarle. Quella è la *comune miſura*, che eſattamente, e ſenza alcuno avanzo, miſura due date grandezze, e perchè ſia tale non importa niente, che un diverſo numero di volte ſia contenuta dall' una, e dall' altra, ma ſolo ſi deve attentamente oſſervare, che non rimanga un qualche avanzo, il quale ſe vi foſſe, queſto, ſebbene infinitamente piccolo, ci guaſterebbe la comune miſura, che per tale più non ſi conoſcerebbe relativamente alle due date grandezze, ma ſolo forſe in ordine a due altre, che la poteſſero contenere perfettamente. Ogni numero preſo per confrontarlo con un altro generalmente parlando, è una grandezza commenſurabile, perchè quando mai non ſi trovaſſe, che il 2 il 3 il 4 &c. lo miſuraſſe, l' unità, ſarà ſempre una comune miſura, che miſurerà compitamente qualunque numero. Per eſempio quantunque il 17, ed il 19 ſieno due numeri, che non poſſono eſſere miſurati, nè dal due, nè da qualunque altro numero, di lui maggiore poſſono nulla meno eſſere miſurati dall' unità, che però dove relativamente a tutti gli altri ſi dovrebbero dire incommenſurabili, riſpetto all' unità acquiſtano la condizione di due grandezze commenſurabili. Non accade la ſteſſa coſa ſe ſi conſiderino altre quantità, mentre di queſte, per dire il vero, ſe molte ſono commenſurabili, ſe ne trovano anche molte altre, che non ſono tali, e che però ſi hanno da porre ſotto la ſpecie delle quantità incommenſurabili. Non richiede il luogo preſente, che di tutte ſe ne faccia una diſtinta numerazione,

laonde se di passaggio accenniamo, che la diagonale di un quadrato è una quantità incommensurabile al lato dello stesso quadrato, e che sono incommensurabili le radici di due grandezze quadrate, o cube, che non hanno per esponente della loro ragione numeri quadrati, o cubi, e che pure sono incommensurabili scambievolmente quelle quattro grandezze, che ci producono una serie continuata di simili ragioni, quando la ragione delle estreme non corrisponde ad una ragione, che si possa trovare fra numero, e numero, noi riportiamo tali esempj, perchè non si dubiti, che realmente si diano queste grandezze; che pure hanno luogo anche nella specie della quantità discreta, e le troviamo in quei numeri, che alcuni dei Matematici chiamano *irrazionali*, o *sordi*, ed altri li dicono *ineffabili*, o *Geometrici*, e che noi al suo luogo gli abbiamo denominati *Potenze imperfette* come $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[4]{7}$ &c. purchè non se ne combinino due di loro in tal modo, che essendo ridotte ad una espressione minore, abbiano dopo il segno radicale la medesima quantità, mentre quando ciò segue, anche queste appartengono alle grandezze commensurabili, e si può esprimere il loro riguardo in una ragione di numero a numero, come si vede in questo esempio, in cui ridotte le due potenze $\sqrt{45}$, $\sqrt{20}$ ad una più semplice espressione quale è $3\sqrt{5}$, $2\sqrt{5}$. Si trova, che la loro ragione è la stessa della ragione del 3 al 2.

XVI. In caso che dunque siено date alcune grandezze incommensurabili, perchè si abbia a determinare quella ragione, che può aver luogo fra esse, dee avvertirsi quello, che già sopra si è detto, cioè, che i prodotti di due multiplicazioni fatte con i multiplicanti disuguali, formano una ragione, che corrisponde a quella de i multiplicatori disuguali, che per tanto se le grandezze sono incommensurabili, è bene vedere, se almeno si può venire in cognizione di essi multiplicatori disuguali, perchè la loro ragione è quella, che si trova fra le grandezze incommensurabili. Si è insegnato nel Capitolo IV. del Primo Trattato, come questi multiplicatori si possono ritrovare, e la regola è la stessa, che quella, la quale c' insegna, come si riducono ad una espressione più semplice le radici sorde, mentre, trovata questa espressione, i termini differenti, che precederanno i segni radicali, saranno quelli stes-

si,

ſi, che ci faranno conoſcere la qualità di quella ragione, che può trovarſi fra le due date grandezze incommenſurabili, onde ritorna a verificarſi ciò, che or ora dicevamo in propoſito del dato eſempio $\sqrt{45}$, $\sqrt{20}$, cioè, che in queſto caſo le grandezze date compariſcono in qualche modo avere la natura delle grandezze commenſurabili.

XVII. La commenſurabilità di tali grandezze può ritrovarſi in due modi, o per via della multiplicazione, o per via della diviſione. Se noi multiplicando i termini delle grandezze propoſte veggiamo, che riſulta per prodotto un quadrato, tanto baſta, perchè ſieno queſte grandezze commenſurabili, come pure, ſe dividendoſi una grandezza per l'altra, ci laſcia la diviſione un quoziente, che ſia un numero quadrato, anche in queſto caſo ſi trova la commenſurabilità nelle grandezze; onde per queſti motivi ſi può dire, che ſono commenſurabili fra di loro le due grandezze $\sqrt{8}$, $\sqrt{18}$, e queſte altre due $\sqrt{3}$, $\sqrt{27}$, giacchè il riſultato dalla multiplicazione delle prime due, cioè il 144 è un numero quadrato, come ancora lo è il quoziente 9, che ci è laſciato dalla diviſione del 27 pel 3. Non ſono già commenſurabili queſte altre grandezze $\sqrt{2}$, e $\sqrt{3}$, mentre non ſi può dimoſtrare in qual modo il 2 contenga la $\sqrt{3}$, come ſi può moſtrare, che $\sqrt{8}$ ſta a $\sqrt{18}$ in quella guiſa, che ſta il 2 al 3, e che la ragione di $\sqrt{3}$ a $\sqrt{27}$ è la ſteſſa, che quella dell'uno al 3. Per capire una tal verità biſogna ſtabilire, che il riſultato dalla multiplicazione delle radici di due quadrati è un prodotto, a cui ſe ſi paragona il primo quadrato mette in viſta una ragione, che è ſimile a quella, che ha lo ſteſſo prodotto paragonato al rimanente quadrato. Si prendono perciò i due quadrati 16, 25, la radice del primo è 4, la radice del ſecondo è 5 il riſultato della multiplicazione del 4 per il 5 è 20, al quale il 16 ha quella ragione, che egli ſteſſo ha al 25, cioè la ragione del 16 al 20, è la medeſima della ragione del 20 al 25 per eſſere l'una, e l'altra ſubſuperparticolare, ovvero ſubſeſquiquarta. L'eſempio veramente è sì chiaro, che non ſerve ora ricercare altra prova per aſſicurarci della verità di cui ſi tratta. Queſta niente di meno, ſi vuole aggiugnere per dimoſtrare ſu qual fondamento ſi appoggi. Si prenda per tanto la radice del 16, che è 4, e la radice del 25, che è 5, e manifeſto in primo luo-

go,

go, che la prima radice multiplica due differenti quantità, cioè prima se stessa, e poi la seconda radice, dunque i due risultati 16, e 20, dovranno stare fra loro, atteso quello, che in questo stesso Capitolo si è notato quì sopra, come i termini multiplicati 4, e 5. Similmente la seconda radice 5, multiplica anche essa due differenti grandezze, cioè la prima preparata radice, e poi se stessa; che però per l' accennato motivo li prodotti 20, e 25, dovranno stare fra loro, come le grandezze multiplicate 4, e 5; ma quando due ragioni hanno lo stesso confronto ad una terza o uguale, o simile, sono simili, o uguali fra di loro, dunque le ragioni del 16 al 20, e del 20 al 25, che hanno lo stesso confronto alla ragione uguale del 4 al 5, saranno uguali fra loro. Che è quello, che si voleva provare. Ciò presupposto. Noi nell' esempio dato di $\sqrt{8}$, e di $\sqrt{18}$, come nell' altro di $\sqrt{3}$, e $\sqrt{27}$, siamo nel caso di avere una ragione comune, a cui si possano paragonare le ragioni date, e questa ragione la somministrano nel primo esempio le grandezze 2, e 3, nel secondo le altre 1, e 3, che si considerano, come le radici di quelle grandezze quadrate, che sono state proposte; dunque non è da dubitare, che le prescritte quantità sieno fra loro commensurabili nel modo, che già si è stabilito.

XVIII. Una serie quale è questa fin quì descritta, di varie ragioni, che in diverse maniere si sono vedute fra loro simili, non solo si può fissare in quei termini, che appartengono alla quantità descritta, ma altresì negli altri, che sono i più generali, perchè si applicano a qualunque specie di estensione, voglio dire, che le stesse combinazioni, per vedere le ragioni simili fra di loro, si fanno ancora in una serie di ragioni, delle quali i termini si specificano colle lettere dell' Alfabeto. Non starò ora a numerare di bel nuovo quei molti casi, che si sono già apportati, per farne vedere questa verità colla pratica, ma mi ristringerò a due soli, che si possono ricevere, come fondamenti per tutti gli altri. Quella similitudine, che risulta nelle ragioni, che hanno due antecedenti, e due conseguenti, sembra la più necessaria ad avvertirsi in caso di dovere operare con lettere, siccome quella, che si rileva dalle date grandezze, quando sono della natura delle incommensurabili. Con qual metodo dunque si dovrà operare per conoscere

re la prima similitudine? Il metodo niente è diverso da quello, che si osservò, parlandosi nel Capitolo I. della parte seconda del primo Trattato, del modo di ridurre due frazioni di diverso denominatore ad altre due, che lo avessero il medesimo; che però anche in questo luogo posto in pratica quell' insegnamento, che là si dava, si vedrà la differenza delle due ragioni, se non saranno simili, o sì pure comparirà la loro similitudine. Eccone per tanto un esempio: la prima ragione sia di de ad f, la seconda sia di gb ad i, si hanno da multiplicare in croce i dati termini, e dalla prima multiplicazione risulta dei, siccome dall' altra gbf, e finalmente la multiplicazione de i conseguenti produce fi, dunque le nuove ragioni compariscono dei ad fi, e gbf ad fi, ma gli antecedenti di queste due ragioni date sono affatto diversi; dunque le ragioni date sono affatto dissimili. Sieno date ora due altre ragioni ab a z, ac a d, fatta la riduzione si averanno ne i luoghi loro abd a zd, acz a zd, e perchè negli antecedenti vi sono alcune lettere, che sono le stesse, però le due ragioni date averanno da potersi assomigliare in qualche parte, e rimarrà quello, in cui non potendosi trovare simili, saranno differenti fra loro. Si è dunque veduto, come in questo caso ancora, in occorrenza di avere alle mani quantità espresse per lettere, si può avvertire, se sono simili. Passando ora al secondo caso, si propongano queste due grandezze $\sqrt{c^3 + ccdd}$ e $\sqrt{cdd + d^3}$, e si vuole vedere, se sono commensurabili. Io trovo, che dividendosi la prima di queste $c^3 + ccdd$ per $c + dd$, si ha per quoziente cc. Similmente dividendosi l' altra $cdd + d^3$ per $c + d$, rimane il quoziente dd, ma questi due quozienti sono due quadrati, de i quali le radici sono c, d, dunque le due date grandezze sono commensurabili, e si potrà esprimere il loro riguardo, dopo che saranno ridotte alla espressione più semplice $c\sqrt{c + dd}$, $d\sqrt{c + d}$, con dire, che stanno fra loro come c al d, ed ecco pure, come ancora nel secondo caso proposto, si ha da operare per riconoscere, se le date quantità irrazionali, espresse con lettere, sono commensurabili.

XIX. Abbiamo quì sopra asserito, che una qualche volta è necessario trovare una comune misura per potere conoscere quando le date grandezze sono commensurabili, vogliamo

mo ora aggiugnere quel modo, che è il più facile per riuscire in una tale incumbenza, quando bisogni. In due modi si può trovare la comune misura, il primo insegna a trovare la più grande, che sia possibile, il secondo insegna a trovare la più piccola grandezza, che possa essere divisa dalle due date. Per avere la prima si ha da levare la minore grandezza dalla maggiore, ed osservare se l'avanzo, di cui la maggiore supera la minore, misura questa esattamente. In caso che la misuri, questo avanzo si dice, che è la misura maggiore di tutte quelle, che si possono preparare per quest' effetto. In caso poi, che un tale avanzo non misuri esattissimamente la più piccola grandezza, quello si deve levare da questa, e così di mano in mano ogni altro avanzo si ha da levare sempre dalla minore, finchè lasci una differenza, che esattamente misuri la più piccola grandezza, e questa differenza è quella, che si deve avere per la comune misura più grande, che si possa trovare, per misurare le date grandezze. L' operazione è la stessa, che quella, che da noi si fa quando occorre d' impiccolire una data frazione.

XX. Per trovare adesso quella più piccola grandezza, che deve essere divisa dalle due date, si ha da cercare il più piccolo divisore di queste due grandezze, di poi si ha da multiplicare ciascuna di esse con uno di questi divisori, con tal metodo, che il primo divisore più piccolo multiplichi la grandezza maggiore data, ed il maggiore divisore multiplichi la più piccola; da tali multiplicazioni deriverà un risultato stesso, che sarà quella grandezza la più piccola, trovata capace di essere divisa da tutte due le date grandezze. Il più piccolo divisore del 30, per ragione di esempio, è il 2. Il più piccolo divisore del 45 è il 3, dunque multiplicando il 30 per il 3, risulterà 90, e multiplicando il 45 per il due, risulterà 90. Sicchè il 90 è la più piccola grandezza, che potrà essere esattamente divisa dalle due date, cioè dal 30, e dal 45. Affine però, che questa operazione trovi sempre il numero, che si cerca, è necessario, che i due numeri divisori dati abbiano essi un comune divisore; onde per mancanza di questa condizione non si può trovare colla data regola il più piccolo numero, che sia capace a dividersi dal 27. e dal 55. de quali i minori divisori sono 3, e 5.

CAP.

C A P. II.

Della Proporzione, ſua natura, e ſue differenti maniere.

I. DOpo di avere ſtabiliti quei varj caſi, da' quali riſultano varie ſpecie di ragioni, che ſono ſimili fra di loro, s'intraprende a diſcorrere di ciò, che naſce dal combinare inſieme le ſimili ragioni. Queſta è la proporzione, la quale, quando ſi trova fra le grandezze, eſſe diventano di una condizione più ragguardevole, e ci fanno vedere quel nobile, e quel bello, che da loro deriva in quelle coſe, che ſi dicono eſſere fatte con proporzione. Tratteremo per tanto nel preſente Capitolo della proporzione, e della ſua natura, e perchè non in un ſol modo naſcono le proporzioni nelle coſe, parleremo pure di queſte varie maniere con quell'ordine, e chiarezza, che più converrà ad una tale materia.

II. La proporzione, ſe ſi ha da dire, che coſa è, poſſiamo chiamarla una ſimilitudine di ragioni, e con ciò venghiamo facilmente ad oſſervare, come ella ſi diſtingua dalla ragione, che l'abbiamo definita al ſuo luogo un confronto di due grandezze. Queſta differenza vi è ancora fra la ragione, e la proporzione, che dove due ſole quantità ſervono per ſtabilire una ragione, almeno tre ſono neceſſarie, ſe ſi ha da vedere una proporzione, e queſte ancora non baſta, che ſieno tre quantità in qualunque maniera preſe, ma biſogna, che formino due ſimili ragioni; il 27, il 12, ed il 6 ſono tre quantità, ma non per tanto fra eſſe ſi trova la proporzione, perchè il 27 non ſtà al 12, come il 12 al 6, onde perchè ſi rendano capaci ad eſſere termini di vera proporzione, biſogna ſcemare il 27 di tre unità, che così nell'avanzo ſi ottiene quel termine, che cogli altri due ci ſerve per eſempio di una proporzione.

III. Ha queſto di proprio la proporzione, che ſecondo la varia diſtribuzione de' ſuoi termini eſſa ſi varia, ed acquiſta una nuova natura, per ragione di cui dee dirſi, che ſono tre differenti proporzioni queſte, che nominiamo proporzione *diretta*, proporzione *indiretta*, e proporzione *reciproca*. La prima è tale, quando i termini ſi diſpongono in tal modo,

 che

che il primo stà al secondo, come il secondo al terzo, come il terzo al quarto, &c. ovvero, allorchè la ragione del primo al secondo è la stessa, che la ragione del terzo al quarto, ed ecco perchè una tal proporzione si manifesta ora sotto il nome di proporzione continua, ed ora sotto l'altro di proporzione discreta, e la differenza dell' una, e dell' altra ben subito apparisce, allorchè si osserva, che i termini della proporzione continua formano una serie di ragioni, che sono tutte fra loro simili, quando quelli della proporzione discreta compongono una serie di ragioni, che interrottamente solo sono simili, e non andantemente. In questi termini 16, 8, 4, 2, noi abbiamo una serie di tre ragioni duple, che non le abbiamo in questi altri 10, 5, 30, 15, perchè la ragione di mezzo, cioè del 5 al 30 non è simile alle ragioni estreme del 10 al 5, e del 30 al 15.

La proporzione è indiretta, se i termini suoi sono talmente disposti, che il primo stia al terzo, come il quarto al secondo, onde perchè nella serie di queste quattro grandezze 16, 2, 8, 4 si verifica una tal cosa, però la proporzione, che è fra essi, si ha da dire indiretta. L' ultima proporzione, che abbiamo chiamata reciproca, risulta dalla disposizione de'termini in quest'altra maniera, che il primo stia al secondo, come il quarto al terzo. Si vede tale disposizione in questa serie 16, 8, 2, 4, dunque essa potrà mostrarci l'esempio di una proporzione reciproca.

IV. Vi è una regola per poterci assicurare, quando le date grandezze sono proporzionali, o non lo sono, e ce la somministra la multiplicazione delle medesime, che s' intraprende differentemente, secondo la differente proporzione. Prima dunque di venire a questo di multiplicare le grandezze, bisogna determinarsi ad una proporzione, ed essendo la diretta, noi troveremo, che le grandezze date conserveranno tal proporzione, se i risultati dalla multiplicazione delle estreme, e delle intermedie saranno uguali, in altra maniera non sarebbero proporzionali di proporzione diretta, ed in fatti questi quattro termini 16, 8, 5, 2 non hanno fra loro la proporzione diretta, perchè il 32, che è il risultato degli estremi è differentissimo dal 40, che è il risultato degli intermedj, ma sono bene proporzionali questi altri quattro 16, 8,

4, 2,

4, 2, perchè intrapresa la descritta multiplicazione, risulta nell'una, e nell'altra lo stesso prodotto, cioè il 32. Per riscontrare, se i termini sono proporzionali di proporzione indiretta, si ha da multiplicare il primo pel secondo, ed il terzo pel quarto, e vedere se risultano prodotti uguali, come dovranno risultare, se veramente fra i quattro termini dati si trova tal proporzione. L'esempio di sopra dato 16, 2, 8, 4 è a proposito per far conoscere quello, che ora si dice, riescendo esattissimamente uguali i risultati richiesti.

Nella proporzione reciproca i prodotti, che hanno da essere uguali sono quelli, che derivano dalla multiplicazione del primo termine dato per il terzo, e del quarto per il secondo; e perchè ciò segue appunto, se si multiplicano con questa legge i termini 16, 8, 2, 4, quindi è, che di sopra si chiamarono tali termini reciprocamente proporzionali.

Accade, che non sempre si ha da riscontrare la proporzione di quattro termini, ma una qualche volta ne sono dati tre soli, che però gli troveremo anche questi essere fra di loro proporzionali, se il prodotto dalla multiplicazione degli estremi, corrisponderà al quadrato di quel di mezzo 9, 6, 4, sono veramente tre termini proporzionali, perchè il 36, che è il risultato del 9, preso quattro volte, corrisponde al 36, che è prodotto del 6 multiplicato in se stesso.

V. Quell'insegnamento, che ora si vuole aggiugnere, appartiene al modo di trovare quel proporzionale, che manca in qualunque proporzione. In diverse serie di grandezze può stabilirsi questa ricerca, perchè o si stabilisce nella serie di soli tre numeri, o nella serie di quattro. Se è la prima serie, suppone questa, che sieno sempre dati due numeri, e vuole, che si trovi il terzo proporzionale. Se è la seconda, suppone essa, che sieno sempre dati tre numeri, e dimanda, che si trovi il quarto. Dovendosi operare sul caso della prima serie, il proporzionale, che si vuole trovare può avere tre posti, perchè o può essere il terzo, o può essere il primo, o può essere quel di mezzo. La maniera di trovarlo in qualunque luogo esso manchi, ci vien somministrata dalla multiplicazione, però se manca nel terzo luogo, si multiplicherà il secondo in se stesso, ed il risultato si partirà per il primo,

e nel quoziente si vedrà il terzo proporzionale, se ha da trovarsi nel primo luogo, si multiplicherà parimente il secondo in se stesso, ed il prodotto si partirà per il terzo, ed il quoziente sarà il primo proporzionale; se per ultimo manca il medio, i due estremi termini dati si multiplicheranno insieme, e dal risultato si leverà la radice quadrata, che servirà di medio proporzionale. Ecco gli esempj di tutti i tre casi. Esempio I. 18, 12 *. Esempio II. *. 10. 5. Esempio III. 27. *. 12 si multiplica nel I. Esempio il 12 in se stesso, e risulta 144, che partito per 18 ci lascia l'8 terzo numero proporzionale. Nel secondo Esempio si multiplica il 10, ed il 100 suo prodotto si parte per 5, ed il quoziente 20 è il primo numero proporzionale. Nel terzo Esempio si multiplica il 27 per 12, e dal 324 risultato si estrae la radice quadrata 18, e questa si pone nel luogo del proporzionale di mezzo. Queste sono le regole di operare nella prima serie.

Nell' altra serie dovendosi trovare il proporzionale, che manca, due cose si hanno da avvertire. In primo luogo si dee determinare la proporzione, secondariamente poi si ha da vedere quale è il proporzionale, che manca, potendo essere il quarto, o qualunque degli altri precedenti. Si trovino ora quei proporzionali, che mancano nella proporzione diretta, e sia il primo a mancare il quarto termine, come si vede nella seguente setie 64, 32, 16. *. Si troverà la quarta grandezza proporzionale, multiplicandosi li due ultimi fra loro, poi partendo il prodotto per la prima, mentre il quoziente sarà la quarta grandezza proporzionale. Il 16 multiplicato per 32 rileva 512, il quale partito per 64 lascia l' 8, e questo è il quarto numero proporzionale di proporzione diretta. Se non manca il quarto, ma qualunque altro de' precedenti, per trovare quello, che manca ecco la regola, che invariabilmente si ha da osservare. Nella serie di quattro termini per conoscere, se le grandezze sono proporzionali, già abbiamo detto, che si multiplicano a coppia, ora mancando una delle quattro grandezze, dee pure rimanere imperfetta una di queste coppie. Laonde conosciuta quella grandezza, a cui manca la sua corrispondente, dovremo sempre essa serbarla, perchè ci parta il risultato della multiplicazione della coppia intiera, acciocchè nel suo quoziente comparisca la richiesta gran-

grandezza proporzionale. Con questo avvertimento s'intrapreuda ora la ricerca del terzo proporzionale, che si suppone mancare nella data serie.

Il terzo proporzionale lega insieme col secondo, dunque si multiplicheranno gli estremi, ed il loro risultato si partirà pel secondo, e si avrà nel quoziente il terzo proporzionale 8 via 64 produce 512, il 32 nel 512 vi stà 16 volte, dunque il 16 sarà proporzionale. Si trovi ora il secondo.

Per trovare il secondo, si osserva, che questo lega col terzo, sicchè basterà ripetere l'operazione precedente, e partire il risultato pel 16, acciò si trovi il 32. Se manca il primo proporzionale, si sa, che questo lega col quarto, dunque multiplicheremo i due di mezzo, cioè il 16 per 32, ed il 512 lo partiremo pel quarto, ed avremo il 64 per primo proporzionale. Queste sono tutte le maniere per trovare qualunque termine proporzionale, che possa mancare nella proporzione diretta.

La stessa regola praticata or ora, si osserva, quando accada di dover preparare il proporzionale, che manca nella proporzione indiretta, ne addurremo dunque per brevità gli esempj per tutti i quattro casi nella serie seguente. Si trovi il quarto proporzionale dopo il 27, 8, e 18. Le grandezze, che legano insieme nella proporzione indiretta, sono la prima colla seconda, e la terza colla quarta, sicchè se manca la quarta, la terza grandezza dovrà partire, e le prime due si dovranno multiplicare. Il 27 multiplicato per 8 produce 216, questo partito per 18 lascia il 12 per quoziente, dunque il 12 dee essere nella data serie il quarto proporzionale di proporzione indiretta. Si supponga ora mancare il terzo, questo si troverà nella stessa maniera, che il quarto, solo che il partitore del risultato 216 sarà il quarto numero, che si trova nella serie, cioè il 12, che lascerà per quoziente il 18 terzo numero proporzionale, che si cerca. Se il numero, che si vuole è il secondo, rimarrà nella data serie la prima coppia disciolta, e però le grandezze, che si multiplicheranno saranno le due ultime, e la prima grandezza dividerà il loro prodotto, e nel quoziente si avrà il secondo proporzionale. Come in caso, che manchi il primo, partirà il predetto risultato dalla multiplicazione de' due ultimi il terzo numero, e ciò,

e ciò, che si avrà per quoziente, sarà il primo proporzionale di proporzione indiretta.

Resta finalmente, che si trovino i termini proporzionali, che mancano nella proporzione reciproca. Le grandezze, che a questa proporzione legano insieme sono la prima colla terza, e la seconda colla quarta. Si troverà il quarto numero, se si multiplicherà il primo pel terzo, ed il risultato si partirà pel secondo, e si troverà il terzo, se si multiplicherà il secondo pel quarto, ed il risultato si partirà pel primo; si avrà il secondo, se multiplicato il primo pel terzo il prodotto sarà diviso dal quarto, e comparirà il primo, se il terzo partirà ciò, che produce la multiplicazione del secondo pel quarto. Ecco la serie delle grandezze 24, 12, 3. * = 24, 12. *. 6. = 24. *. 3. 6 = * 12. 3. 6. Manca nel primo esempio il 6, che si trova dal dividere per 12 il 72, risultato del 24 per 3. Manca nel secondo esempio il 3, che si trova dividendo per 24 il 72 risultato del 12 per il 6. Il terzo esempio è senza il secondo termine proporzionale, cioè senza il 12, che noi lo troviamo partendo per 6 il 72 risultato del 24 pel 3. Siccome per ultimo troviamo il 24, che è il primo proporzionale, che manca nel quarto esempio con dividere per 3 il 72 risultato del 12 pel 6.

VI. Tutte queste diverse maniere di stabilire alcune serie di grandezze fra loro proporzionali, se bene si considerano, con facilità si riducono alla prima specie di proporzione diretta, servendo unicamente disporre i termini dati, in modo, che quello, che manca si faccia sempre ritornare nel quarto luogo. Si supponeva per esempio in uno de' predetti casi, che mancasse il terzo proporzionale di proporzione indiretta, perchè questo numero si riduca ad essere quarto proporzionale nella proporzione diretta, si ha da prendere quello, che lega con esso, cioè il primo, e si ha da porre in terzo luogo, e quello, che è nel quarto posto, si ha da porre nel primo, ed il secondo si lascia stare dove è, ed in questa disposizione la regola di proporzione, che era indiretta è diventata diretta, ed il proporzionale, che si cerca è il quarto di questa proporzione; se dunque le date grandezze erano 27, 8. *. 12, si ridurranno con porre il 27 prima grandezza nel luogo della stella, ed il 12 si dovrà porre nel po-

sto

sto del 27, e risulterà questa nuova serie 12, 8, 27 *, che è quella appunto, che manifesta una proporzione diretta. Se il numero cercato fosse stato il terzo nella proporzione reciproca, con più speditezza si sarebbe ridotto ad essere quarto nella proporzione diretta, perchè in questo caso i primi due termini dati in questa serie, si sarebbero lasciati stare, ed il quarto si sarebbe fatto passare nel terzo luogo, onde quello, che si cercasse, per l'appunto tornerebbe nel quarto posto. Così nella data serie 24, 12, *, 6 serve, che il 6 passi nel luogo della stella, che subito l'esempio dato per trovare il terzo proporzionale di proporzione reciproca, conviene con quello, che è dato per trovare il quarto nella proporzione diretta.

VII. Che i risultati poi dalle multiplicazioni de' termini proporzionali, fatti secondo le regole stabilite, abbiano da essere uguali fra loro, non se ne può dubitare, ed eccone perciò la dimostrazione sopra le grandezze espresse nella proporzione diretta 64, 32, 16, 8. Egli è vero, che se multiplico il 16 pel 64, e se ancora multiplico l' 8, i due risultati 1024, 512 staranno fra loro, come le grandezze multiplicate, essendo questa la proprietà di due termini multiplicati per uno stesso termine, di conservare ne' prodotti la stessa ragione, che prima era ne' termini multiplicati, dunque il 1024 starà al 512, come il 16 all' 8, ma la ragione del 16 all' 8 è la medesima, che la ragione del 64 al 32, dunque il 1024. starà al 512, come il 64 al 32, parimente, se il 64 multiplica il 16, se lo multiplica ancora il 32, saranno i prodotti 1024, e 512, come le grandezze multiplicanti, cioè come il 64 al 32, cioè la ragione di questi due secondi risultati, sarà la medesima, che la ragione de' primi due, dunque saranno due ragioni uguali, ma hanno di più il conseguente comune, dunque ancora gli antecedenti saranno uguali; dunque, se quattro termini saranno proporzionali, il risultato dalla multiplicazione degli estremi sarà uguale al risultato dalla multiplicazione degli intermedj, che è quello, che si voleva dimostrare. Serve questa dimostrazione ancora a provare, che se sono tre soli i numeri proporzionali dati, il risultato dalla multiplicazione del primo pel terzo è uguale alla multiplicazione fatta da quel di mezzo in se stesso, perchè basta prendere due

vol-

volte i termini di mezzo, ritorna subito la prima serie di quattro numeri proporzionali, perchè si possa con essi operare nella guisa, che si è operato quì sopra.

VIII. Una cosa abbiamo detta nella dimostrazione, che vogliamo chiarirla, ed è, che quando una grandezza ne multiplica due diverse, i risultati da questa multiplicazione stanno fra loro come le grandezze multiplicate, cioè la ragione de' prodotti è simile alla ragione, che hanno fra loro le grandezze multiplicate.

Per intendere ciò, basta avvertire, che è principio indubitato, che trattandosi di multiplicazione, si opera sempre con questa costante regola: come l' unità stà al numero multiplicante, così stà il numero multiplicato al prodotto. Ora ciò supposto, sieno dati questi due numeri 4, 2, perchè si multiplichino per 16, il primo prodotto ha da essere 64, il secondo dee essere 32, io dico dunque, che il 64 stà al 32, come il 4 al 2. Per essere il 16 numero, che multiplica il 4, l' 1 starà al 16, come il 4 al 64. Similmente per essere il medesimo 16 quello, che multiplica il 2, l' uno starà al 16, come il 2 al 32, dunque il 4 starà al 64, come il 2 al 32, e permutando il 64 starà al 32, come il 4 al 2, che è quello, che si voleva provare. Di quì ne viene, che se due grandezze multiplicheranno una sola, la ragione de' prodotti sarà simile alla ragione delle grandezze multiplicanti, perchè è la stessa cosa, che due grandezze multiplichino una sola, o al contrario, che una sola ne multiplichi due, non accadendo differenza alcuna fra i risultati, che si deducono nel primo modo, e quelli, che derivano dal secondo.

Su queste dimostrazioni tutta è appoggiata la dottrina delle proporzioni, e quanto conseguentemente può dirsi in ordine alla medesima, che però tutto quello, che nel precedente Capitolo si è osservato intorno alle varie combinazioni, fatte per dimostrare differenti casi di simili ragioni, tutto è vero, perchè sono veri i predetti fondamenti, e non sarebbe mai possibile per forza di conseguenza mostrare una qualche similitudine di ragioni, se nella similitudine di ragione, che è lo stesso, che dire, se in una serie di termini proporzionali, non si stabilisce prima la verità delle nostre premesse.

IX. Deriva ancora da questi stessi principj, che se due gran-

grandezze si multiplicano fra loro, il prodotto ha da essere medio proporzionale fra li quadrati delle stesse grandezze multiplicate, ed in fatti il 10, che risulta dalla multiplicazione del 5 per il 2, è medio proporzionale fra il 4 quadrato del 2, ed il 25 quadrato del 5. Similmente, se di due quadrati, come 9, e 16 se ne prendono le radici 3, e 4, e si multiplicano fra loro, il 12, che risulta è medio proporzionale fra gli stessi quadrati. Di più, se sono dati due cubi, come 8, e 27, e si riquadrano le loro radici 2, e 3, ed i loro quadrati si multiplicano respettivamente per le stesse radici cube, questi prodotti hanno da essere medj proporzionali fra i due cubi dati, come in fatti il 12, che è quella grandezza nata dalla multiplicazione del 4 quadrato della prima radice cuba multiplicato per la seconda 3, ed il 18, che è l'altra grandezza prodotta dalla multiplicazione del 9 quadrato della seconda radice cuba multiplicato per la prima, sono medj proporzionali fra i due cubi dati 8, e 27, e finalmente fra due quarte potenze, due quinte, due seste, &c. si troveranno tre, quattro, cinque grandezze proporzionali, &c. se si comporranno le parti loro a tenore di quelle leggi, che si assegnano per ritrovarle. Che per tanto, se della prima quarta potenza data per esempio 16, si prenderà il cubo 8, e si multiplicherà per il 3 radice della seconda quarta potenza 81, si avrà il 24 primo numero cercato. Se si prenderà il quadrato contenuto dalla prima quarta potenza, cioè il 4, e si multiplicherà per il quadrato della radice della seconda, cioè per il 9, risulterà il 36 secondo numero ricercato, e se la radice della prima quarta potenza, cioè il 2, multiplicherà il cubo della seconda, risulterà il 54 terzo numero ricercato, ed in fatti tutta questa serie di numeri 16, 24, 36, 54, 81, contiene cinque grandezze continuamente proporzionali, cioè ha tre medj proporzionali fra due quarte potenze. Li quattro medj proporzionali fra due quinte potenze 32, e 243 così si trovano. Si prende la quarta potenza della radice del 32 dato, cioè il 16, e si multiplica per la radice del 243, cioè per il 3, e si fa il primo termine medio proporzionale. Si prende poi il cubo della stessa radice del 32, e si multiplica per il quadrato della radice di 243, e risulta l'altro medio proporzionale, poi il cubo della radice di 243, cioè il 27 si

multiplica pel quadrato della radice di 32, ed il prodotto 108 è il terzo medio proporzionale, e per ultimo la radice del 32, cioè 2 si multiplica per la quarta potenza del 3, cioè per 81, ed il 162, che si produce è l' ultimo medio proporzionale, che si cerca, ed in tal guisa fra il 32, ed il 243 due prime potenze, si trovano i quattro medj proporzionali 48, 72, 108, 162. Collo stesso metodo si potranno trovare più altri medj proporzionali fra due altre potenze di ordine superiore, onde per facilitarne la pratica, si aggiugne la serie delle operazioni, che si hanno da fare.

X. Cinque medj proporzionali si trovano fra due seste potenze, sei se ne trovano fra due settime, sette fra due ottave, otto fra due none, e nove fra due decime. In tutte queste operazioni, date le due potenze omologhe, bisogna stabilire le loro radici; poi per operare secondo il primo caso, cinque multiplicazioni si dovranno fare per avere i cinque medj proporzionali, sei se ne dovranno fare nel secondo caso, sette, otto, e nove se ne dovranno fare ne i rimanenti.

Multiplicazioni pel primo caso.

I. La quinta potenza della prima radice si multiplica per la seconda radice.

II. La quarta potenza della prima radice si multiplica pel quadrato della seconda.

III. La terza potenza della prima radice si multiplica per la terza potenza della seconda.

IV. La seconda potenza della prima radice si multiplica per la quarta potenza della seconda.

V. La prima radice si multiplica per la quinta potenza della seconda radice.

Multiplicazioni pel secondo caso.

I. La sesta potenza della prima radice si multiplica per la seconda radice.

II. La quinta potenza della prima radice si multiplica per la seconda potenza della seconda.

III. La

III. La quarta potenza della prima radice si multiplica per la terza potenza della seconda.

IV. La terza potenza della prima radice si multiplica per la quarta potenza della seconda radice.

V. La seconda potenza della prima radice si multiplica per la quinta potenza della seconda radice.

VI. La prima radice si multiplica per la sesta potenza della seconda radice.

Multiplicazioni pel terzo caso.

I. La settima potenza della prima radice si multiplica per la seconda radice.

II. La sesta potenza della prima radice si multiplica pel quadrato della seconda radice.

III. La quinta potenza della prima radice si multiplica per la terza potenza della seconda radice.

IV. La quarta potenza della prima radice si multiplica per la quarta potenza della seconda radice.

V. La terza potenza della prima radice si multiplica per la quinta potenza della seconda radice.

VI. La seconda potenza della prima radice si multiplica per la sesta potenza della seconda radice.

VII. La prima radice si multiplica per la settima potenza della seconda radice.

Multiplicazioni pel quarto caso.

I. La ottava potenza della prima radice si multiplica per la seconda radice.

II. La settima potenza della prima radice si multiplica per la seconda potenza della seconda radice.

III. La sesta potenza della prima radice si multiplica per la terza potenza della seconda radice.

IV. La quinta potenza della prima radice si multiplica per la quarta potenza della seconda radice.

V. La quarta potenza della prima radice si multiplica per la quinta potenza della seconda radice.

VI. La terza potenza della prima radice si multiplica per la sesta potenza della seconda radice.

VII. La seconda potenza della prima radice si multiplica per la settima potenza della seconda radice.

VIII. La prima radice si multiplica per l' ottava potenza della seconda radice.

Multiplicazione pel quinto caso.

I. La nona potenza della prima radice si multiplica per la seconda radice.

II. L' ottava potenza della prima radice si multiplica per la seconda potenza della seconda radice.

III. La settima potenza della prima radice si multiplica per la terza potenza della seconda radice.

IV. La sesta potenza della prima radice si multiplica per la quarta potenza della seconda radice.

V. La quinta potenza della prima radice si multiplica per la quinta potenza della seconda radice.

VI. La quarta potenza della prima radice si multiplica per la sesta potenza della seconda radice.

VII. La terza potenza della prima radice si multiplica per la settima potenza della seconda radice.

VIII. La seconda potenza della prima radice si multiplica per l'ottava potenza della seconda radice.

IX. La prima radice si multiplica per la nona potenza della seconda radice.

XI. Si potrebbe proporre un numero maggiore di casi simili a questi, che tutti colla medesima facilità si risolverebbero. Proseguendo ora a far vedere l' uso delle stabilite dimostrazioni, si dice, che di esse pure possiamo servirci per far vedere, che se quattro grandezze saranno proporzionali, ciò che risulterà dalla multiplicazione delle estreme, ovvero delle intermedie, sarà anch' esso medio proporzionale fra il risultato dalla multiplicazione della prima per la terza, e della seconda per la quarta. Siccome poste le stesse cose, che quattro grandezze sieno proporzionali, multiplicandosi o le prime due, o le due ultime in se stesse, e poi la prima per la terza, e la seconda per la quarta, tutti questi risultati produrranno una nuova serie di quattro grandezze fra loro proporzionali, e la ragione del primo dato ella è, che essendo i pro-

i prodotti della prima per la terza, e della prima per la feconda fra loro, come il primo al fecondo, ed i prodotti della feconda per la terza, e della feconda per la quarta, come la terza alla quarta, dovrà (per la dimoftrazione) il prodotto della prima per la terza ftare al prodotto della feconda per la terza, come quefto fteffo prodotto ftà al prodotto della feconda per la quarta, cioè il prodotto dalla multiplicazione delle grandezze di mezzo dovrà effere medio proporzionale fra il prodotto della prima per la terza, e della feconda per la quarta. Nel fecondo dato poi, perchè la prima grandezza ftà alla feconda, come la terza alla quarta, permutando ftarà la prima alla terza, come la feconda alla quarta, dunque la prima grandezza multiplicata in fe fteffa, ftarà al prodotto della prima grandezza, multiplicata per la terza, come la prima alla terza, e la feconda grandezza multiplicata in fe fteffa, ftarà al prodotto della feconda grandezza multiplicata per la terza, come la feconda alla terza, dunque perchè la feconda ftà alla quarta, come la prima alla terza, così il quadrato della prima ftarà al prodotto della prima per la terza, come il quadrato della feconda ftà al prodotto della feconda per la terza, e però i quadrati delle prime due ftaranno fra loro, come i prodotti dalla multiplicazione del primo pel terzo, e del fecondo pel quarto, che è quello, che fi voleva provare. 16, 8, 4, 2 fono i quattro termini proporzionali; 32 è la grandezza rifultata dalla multiplicazione de' due intermedj; 64 è il prodotto della prima per la terza; 16 è quella quantità, che rifulta dalla multiplicazione della feconda per la quarta, ed ecco in fatti, che 64, 32, 16 fono tre numeri continuamente proporzionali, come ftabiliva il primo dato. 40, 20, 12, 6, fono altre quattro grandezze proporzionali. 1600 è il quadrato della prima, 400 è il quadrato della feconda, 480 è il prodotto della multiplicazione della prima per la terza, 120 è il prodotto della feconda per la quarta, e tutti quefti prodotti 1600, 400, 480, 120, fono fra loro proporzionali, come nel fecondo dato fi è potuto provare.

XII. Si paffa ora a proporre diverfe altre ferie di termini, ne' quali fi veggono le medefime proporzioni. Sono quefte quelle ferie, delle quali trattandofi nell' Aritmetica degli

gli Infiniti, si disse, che ci riserbavamo a parlare in altro luogo di ciò, che apparteneva alla maniera di trovare, e di palesare quelle ragioni, che fra le medesime serie si potevano ritrovare, e questo è quel luogo, a cui opportunamente si aggiungono. Queste serie, come al suo luogo si disse, o sono serie infinite di eguali, o sono serie infinite di numeri naturali, o sono serie di quadrati di terze potenze, di quarte, di quinte, &c. ed ognuna di loro paragonata al suo ultimo termine multiplicato pel numero de' termini, ha un particolare rapporto, ed è di uno all' uno nella prima serie, di uno a 2, di uno a 3, di uno a 4 nelle rimanenti, cioè equivalgono ad $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, &c., ovvero tutte queste serie infinite hanno il loro riguardo espresso in una frazione, di cui i numeratori non sono maggiori dell' unità, e i denominatori sono sempre di una unità superiori all' esponente di quella serie, di cui si cerca questo riguardo, ed eccone la dimostrazione.

1. Nella serie infinita degli uguali 1. 1. 1. 1. 1. 1. &c. l' ultimo termine 1. multiplicato pel numero de' termini, produce la medesima serie 1. 1. 1. 1. 1. &c., dunque questa serie sarà eguale all' ultimo termine, cioè all' 1. preso tante volte, quante è ripetuto nella stessa serie, dunque la serie degli eguali starà all' ultimo termine 1. multiplicato pel numero de' termini, come l' 1 stà all' 1, che era la prima cosa, che si doveva provare.

2. Nella serie de' numeri naturali o. 1. 2. 3. 4. 5. &c. la somma di tutti questi numeri è 15, e l' ultimo numero multiplicato pel numero de' termini è 30, dunque la data serie stà all' ultimo numero ingrandito, quanto si vede, come il 15 al 30, cioè come l' 1 al 2. Si prenda la serie o. 1. 2. 3. 4. 5 6. 7. 8. 9. 10. &c. la somma di tutti i termini è 55, ed il prodotto del 10 multiplicato per 11 numero de' termini è 110, dunque ancora questa serie stà all' ultimo suo termine ingrandito pel numero de' termini, come il 55 al 110, cioè come 1 a 2, e così dell' altre, ma la serie data è infinita, dunque nella serie de' numeri naturali o. 1. 2. 3. 4. 5. 6. &c. la somma di tutti i termini stà all' ultimo ingrandito pel numero de' termini, come l' 1 al 2, che era la seconda cosa, che si doveva provare.

3. Nel-

3. Nella ſerie delle ſeconde potenze o. 1. 4. 9. 16. 25, la ſomma de' primi quattro termini è uguale a 14, il quarto termine multiplicato per 4 è uguale a 36, dunque la data ſerie o. 1. 4. 9 ſtarà al quarto numero ingrandito, come il 14 al 36, ovvero come il 7 al 18, ovvero come il 6 al 18 † $\frac{1}{18}$, ovvero come l' 1 al 3 † $\frac{1}{18}$, ſommando ora li 6 termini, la ſomma loro 55 ſtarà all' ultimo termine 25 multiplicato per 6, cioè al 150, come il 55 al 150, ovvero come il 50 al 150 † $\frac{5}{150}$, ovvero come l' 1 al 3 † $\frac{1}{30}$; e perchè inoltrandoſi in queſta ſerie infinita ſempre la ſomma de' termini ſtà all' ultimo ingrandito pel numero degli ſteſſi termini, come l' 1 al 3 con un avanzo infinitamente minore di $\frac{1}{18}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{36}$, &c. finchè affatto ſpariſce, però la ragione dell' 1 al 3 ſarà il giuſto rapporto, che conviene alla ſerie infinita de' quadrati, come in terzo luogo ſi doveva provare.

4. Nella ſerie delle terze potenze o. 1. 8. 27. 64. &c. ſommati i primi tre termini, riſulta il 9, e multiplicato il terzo di queſti termini per 3, riſulta 24; dunque in queſta ſerie la ragione de' primi tre numeri ſtarà al terzo ingrandito, come il 9 al 24, cioè come il 6 al 24 † $\frac{3}{24}$, ovvero come 1 al 4 † $\frac{1}{8}$, ſeguirando la ſomma fino al quarto, riſulterà 36, e il quarto ingrandito per 4 diventerà 108, dunque la data ſerie, preſa fino al quarto numero, ſtarà ad eſſo quarto numero, come il 36 al 108, cioè come il 27 al 108 † $\frac{9}{108}$, cioè come l' 1 al 4 † $\frac{1}{12}$, e così in infinito, tanto che la ragione di 1 al 4 ſi manterrà coſtantemente, ed in infinito ſcemerà la frazione, che è ſopra più di $\frac{1}{4}$, cioè $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{16}$, &c. dunque anche in queſta ſerie bene è ſtabilita la ragione della ſomma di tutti i termini di queſta ſerie all' ultimo ingrandito pel numero de i termini, come l' 1 al 4, che è quello, che in queſto luogo ſi voleva provare; e perchè in tutte le altre ſerie infinite di più alte potenze collo ſteſſo ordine ſi può far vedere, che la ragione delle ſomme di tutti i termini ſtà all' ultimo ingrandito pel numero de' termini, come l' 1 al 5, l' 1 al 6, l' 1 al 7, &c. però riſulta vero quanto ſi è propoſto di voler dimoſtrare in tutti i caſi, che abbiamo ſtabiliti quì ſopra.

XIII. Di quì s' inferiſce, che ſe ſi paragoneranno i conſeguenti delle ragioni omologhe alle ragioni delle nominate ſerie, al conſeguente della ragione omologa alla ragione delle ſe-

le ſerie degli uguali, ed al conſeguente della ragione omologa alla ragione della ſerie infinita delle radici delle ſeconde, delle terze, delle quarte potenze, &c., ſi vedrà, che queſto ultimo notato conſeguente ſarà, nel primo caſo, medio proporzionale di proporzione Aritmetica, e negli altri caſi ſarà il primo di due, di tre, di quattro proporzionali, &c. fra gli altri due nominati conſeguenti, ed eccone la dimoſtrazione. Qualunque ſerie infinita di radici di ſeconde, di terze, di quarte potenze, &c. ella è ſempre queſta o. 1. 2. 3. 4. 5. &c. ed il conſeguente di quella ragione, che è ſimile alla ragione, che la ſomma di eſſa ſerie ha all' ultimo ſuo termine ingrandito pel numero de' termini, è coſtantemente il 2; dunque queſto 2 ſi troverà ſempre in mezzo al conſeguente della ragione omologa alla ragione della ſerie degli uguali, ed a qualunque altro omologo alla ragione delle ſerie rimanenti, cioè ſi troverà fra l' 1, ed il 3 nel primo caſo; fra l' 1, ed il 4 nel ſecondo, fra l' 1, ed il 5 nel terzo, e così ſempre. Ma queſti tre termini 1. 2. 3. ſono proporzionali aritmeticamente, dunque nel primo caſo il 2 ſarà medio proporzionale, ma fra l' 1, ed il 3: nel ſecondo caſo ſarà il primo proporzionale di due medj, e fra l' 1, ed il 4: nel terzo ſarà aritmeticamente proporzionale di tre medj fra l' 1, ed il 5, e così ſempre, dunque abbiamo dimoſtrato ciò, che ſi voleva dimoſtrare.

XIV. Reſta da poterſi deſiderare, che ſi trovi la ragione, che ſia ſimile a quella, che la ſerie infinita delle radici ſeconde terze, &c. de numeri o. 1. 2. 3. 4. 5. ovvero la ſerie infinita delle radici quarte de cubi o. 1. 8. 21. &c. conſerva al ſuo ultimo termine multiplicato pel numero de i termini, e ſi riſponde, che ſi trova, ogni qual volta ſi ſappia trovare anche in queſta occaſione o un medio proporzionale, o il primo di due, o di tre medj proporzionali di proporzione Aritmetica, fra il conſeguente della ragione ſimile alla ragione della ſerie degli uguali, ed il conſeguente della ragione ſimile alla ragione della ſerie de i numeri naturali, o delle ſerie delle terze potenze, cioè fra l' 1, e il 2, ovvero fra l' 1, ed il 4 &c. Il medio proporzionale aritmetico ſi conoſce, ſe ſono conoſciuti gli eſtremi, perchè poi come moſtreremo al ſuo luogo egli è uguale alla metà della

la somma degli estremi, onde se sossero dati questi due numeri 4, e 8, perchè si trovasse in mezzo ad essi il proporzionale aritmetico, questo dovrebbe essere il 6, perchè è per l'appunto la metà del 12, che è la somma degli estremi, se poi se ne dovessero trovare due, ecco la regola di operare in questo caso, il minore de i termini dati si dovrebbe levare dal maggiore, poi l'avanzo si partirebbe per il numero de termini, che precedono l'ultimo: per esempio per 3, se l'ultimo fosse il quarto, per 7, se l'ultimo fosse l'ottavo; ed il quoziente di questa divisione mostrerebbe la differenza, che ogni termine dovrebbe avere in questa proporzione aritmetica. Sia dato il 12, ed il 24, perchè in mezzo ad essi si trovino due medj proporzionali aritmetici, levato il 12 dal 24, resta 12, e perchè si hanno da osservare due soli medj proporzionali, il 24 dato sarà il quarto numero; dunque l'avanzo trovato si dividerà per 3, ed il quoziente 4 sarà la differenza, che il primo medio proporzionale dovrà avere sopra del 12, e questo sarà il 16, come il 20 sarà il secondo medio proporzionale. Se tre dovessero essere i medj proporzionali, prima si troverebbe il termine di mezzo al numero de termini da trovarsi, che sarebbe la metà della somma degli estremi, poi gli altri due si troverebbero colla stessa maniera, colla quale si è detto, che si trova fra due termini il medio proporzionale. Gli ultimi termini, nel mezzo a i quali se ne hanno da trovare tre altri, sono dati 12, e 48, troverò prima in questa serie il numero, che ha da essere il terzo, e questo lo trovo con prendere il 30 che è la metà della somma de i numeri dati, poi fra il 12, ed il 30, trovo il medio, che è il 21, e similmente l'altro medio fra il 30, ed il 48, che è il 39, e dico, che la serie è ben preparata, perchè realmente tutti questi numeri 12. 21. 30. 39. 48. mantengono la proporzione aritmetica.

XV. Tutto questo avvertito con brevità per l'intelligenza di ciò, che si dice, ecco in qual modo si troverà la prima ragione, che si cerca simile alla ragione, che conserva la serie infinita delle radici seconde de numeri naturali 0. 1. 2. &c. all'ultima grandezza multiplicata pel numero de' termini. Il conseguente della ragione simile alla ragione degli uguali, cioè l'1, si risolve in , ed il conseguente della ragione, simile alla ragio-

 gio-

gione della ſerie de numeri naturali cioè 2, ſi riſolve in $\frac{8}{4}$, il medio proporzionale aritmetico fra il 4, e l'8, per quello, che ſi è inſegnato è il 6, dunque il conſeguente della ragione che ſi cerca, ſarà queſto 6, cioè la ſerie infinita delle radici $\sqrt[2]{0}$. $\sqrt[2]{1}$. $\sqrt[2]{2}$ &c. ſtarà all' ultimo multiplicato per il numero de i termini, come $\frac{4}{4}$ a $\frac{6}{4}$, ovvero come $\frac{2}{2}$ a $\frac{3}{2}$, ovvero come il 2 al 3.

XVI. Se ſi vuole ora trovare la ſteſsa coſa per la ſerie delle radici cube de medeſimi numeri 0 . 1 . 2 . 3 . &c. in vece di trovare un ſolo medio proporzionale, ſe ne troveranno due fra li dati conſeguenti, e queſti ſi troveranno così. Il conſeguente della ragione della ſerie degli uguali, cioè l' 1 . s' ingrandirà fino a $\frac{12}{12}$, e l' altro conſeguente, cioè il 2 fino a $\frac{24}{12}$, poi ſervendoſi della regola data per trovare i due medj proporzionali aritmetici, ſcriveremo $\frac{16}{12}$, e $\frac{20}{12}$, e il primo di queſti moſtrerà la ragione della ſerie infinita delle radici cube de numeri 0 . 1 . 2 . 3 . &c. Dunque queſta ſerie ſtarà al ſuo ultimo termine ingrandito per il numero de termini, come $\frac{12}{12}$ a $\frac{16}{12}$, ovvero come $\frac{3}{3}$ a $\frac{4}{3}$, ovvero come il 3 al 4.

XVII. Che ſe ſi voglia trovare la ragione corriſpondente alla ragione della ſerie delle quarte radici de cubi 0 . 1 . 8 . 27 &c. al loro ultimo termine multiplicato per il numero de termini, in queſto caſo ſi hanno da trovare tre medj proporzionali aritmetici fra il ſolito conſeguente 8, ed il conſeguente della ragione ſimile alla ragione de cubi, cioè il 4, che poi ingrandito l' 1 fino a $\frac{12}{12}$, ed il 4 fino a $\frac{48}{12}$. Si ricorrerà alla deſcritta regola, che inſegna trovare tre termini medj proporzionali aritmetici, e ſubito ſi fiſſeranno i ſeguenti $\frac{21}{12}$, $\frac{30}{12}$, $\frac{39}{12}$, e di queſti ſcelto il primo ſi dirà, che la ſerie infinita delle quarte radici ſta al ſuo ultimo termine, come il $\frac{12}{12}$, al $\frac{21}{12}$, cioè come $\frac{4}{7}$, ovvero come il 4 al 7. Da queſti tre caſi ſtabiliti, ſarà facile prendere una regola generale per quelle operazioni, che poteſſero biſognare in qualunque altra congiuntura.

XVIII. Quella proporzione, che ſi è ſtabilita per le nominate ſerie infinite, ſi può ancora conſiderare nelle altre, che riſultano, ora dalla ſomma, ora dalla multiplicazione, ed ora dalla diviſione vicendevole di altre ſerie: quindi è, che ſi può dire, che le ſerie derivate dalla ſomma, dalla multiplicazione, e diviſione, ſtanno al loro ultimo termine multiplicato pel nu-

numero dei termini, come ſtà l' unità all' eſponente di quelle ſerie, che riſultano, quando però queſti eſponenti ſi accreſcono di una unità per quella oſſervazione, che ſi fece allora, che ſi cominciò a trattare di queſta materia; dunque ſe una ſerie infinita di terze potenze ſi multiplicaſſe per un altra di quinte, perchè dalla operazione riſulterebbe una ſerie, il di cui eſponente ſarebbe 8, come ſi diſſe altrove, però la ragione di queſta ſerie infinita al ſuo ultimo termine, ingrandito per il numero degli steſſi termini, ſarebbe ſimile alla ragione dell' 1 al 9. Parimente ſe una ſerie infinita di ottave potenze ſi divideſſe per una di quinte, ſarebbe il quoziente una ſerie, che avrebbe per eſponente il 3, ed il ſuo rapporto corriſponderebbe ad $\frac{1}{4}$, cioè avrebbe all' ultimo termine ingrandito la ragione del 1 al 4.

XIX. Una proporzione reciproca avrebbe luogo fra un quoziente, che aveſſe l' eſponente negativo, ed una ſerie il di cui eſponente foſſe uguale all' avanzo rimaſto dopo la ſottrazione dell' eſponente della ſerie, che fu diviſa dall' eſponente di quella, che la diviſe, perchè diſpoſti li termini di tali ſerie ſi oſſerva, che il ſecondo termine della ſerie, che ha l' eſponente negativo ſtà al terzo reciprocamente, come il terzo termine dell' altra ſerie ſtà al ſecondo; e ſi riſcontra, che la proporzione è quella, che ſi determina, ſe de i quattro termini ſtabiliti ſe ne prendono tre ſoli, e con eſſi ſi cerchi il quarto, mentre operandoſi a tenore delle leggi di queſta proporzione già date nel principio di queſto capitolo, ſi viene a trovare il quarto, che è quello appunto, che ſi era tralaſciato per fare queſta operazione. Sia o. $a.^{-1}$ $b.^{-1}$ $c.^{-1}$ $d.^{-1}$ &c. la ſerie, che ha l' eſponente negativo derivata dalla diviſione della ſerie o. $a.^2$ $b.^2$ $c.^2$ $d.^2$ &c. per la ſerie o. $a.^3$ $b.^3$ $c.^3$ $d.^3$ &c. e l' altra ſerie, a cui quella ſi paragona, ſia o. $a.^1$ $b.^1$ $c.^1$ d^1 &c., che è quella, che eſprime l' avanzo rimaſto dopo la ſottrazione della o. $a.^2$ $b.^2$ &c. dall' altra o. $a.^3$ $b.^3$ &c. dico, che queſte due ſerie hanno fra loro i termini reciprocamente proporzionali. Come altrove ſi ſcriſſe, la ſerie o. $a.^{-1}$ $b.^{-1}$ &c. è la ſteſſa, che la ſerie o. $\frac{1}{a^1}$, $\frac{1}{b^1}$, $\frac{1}{c^1}$, $\frac{1}{d^1}$ &c e la ſerie o. $a.^1$ $b.^1$ &c. è la medeſima che queſta o. $\frac{a^1}{1}$, $\frac{b.^1}{1}$,

 $c.^1$,

$\frac{c^1}{1}$, $\frac{d^1}{1}$, dunque lasciati nell' una, e nell' altra il primo termine, la ragione di $\frac{1}{a^1}$ ad $\frac{1}{b^1}$ nella prima serie è la medesima, che la ragione di $\frac{b^1}{1}$ ad $\frac{a^1}{1}$ nella seconda, ma questi termini sono fra loro reciprocamente proporzionali, dunque è fuor di dubbio, quello che si è stabilito in ordine al paragone di queste due serie.

XX. I paragoni, che rimangono a farsi appartengono agli avanzi, che risultano dalla sottrazione di una serie dall' altra, onde si propongono diversi casi per stabilire in tutti quella proporzione, che vi è fra li predetti avanzi, e l' ultimo loro termine ingrandito pel numero de precedenti. Tre casi si possono ordinare per questa operazione. Comprende il primo quegli avanzi, che restano dopo fatta la sottrazione della serie delle prime, delle seconde, delle terze potenze &c. dalla serie degli uguali. Nel secondo si mostra la ragione, che hanno al loro ultimo termine la serie degli avanzi, dopo che si sono sottratte dalla serie degli uguali, quelle delle radici seconde, terze &c. Il terzo poi contiene quegli avanzi, che nascono dalla sottrazione dei quadrati, de cubi delle quarte potenze &c. dalla serie delle prime.

La proporzione, che si trova per il primo caso corrisponde a quella dell' 1 al 2 nell' avanzo della prima sottrazione; negli altri susseguenti è come il 2 al 3, il 3 al 4, il 4 al 5, e così di mano in mano a tenore di quelle serie di potenze, che si sottrarranno dalla serie degli uguali, anderanno avanzandosi queste proporzioni. Nel secondo caso la ragione sarà dell' 1 al 3 la prima volta, poi dell' 1 al 4, dell' 1 al 5 &c. e finalmente nel terzo caso la proporzione degli avanzi corrisponde prima alla ragione di 1 al 6, poi di uno al 30, nella serie de quadrati, e di 1 al 140 in quella de cubi.

XXI. Ritornando ora al primo caso egli è evidente, che sottraendosi dalle serie degli uguali le serie delle prime potenze, l' avanzo sarà una serie composta di due, cioè di quella, che è sottratta, che è una serie negativa, e di quella da cui è fatta la sottrazinne, che è positiva, ma la ragione della serie degli uguali è la stessa, che dell' 1 all' 1, cioè di $\frac{1}{1}$, e la

e la ragione delle prime potenze equivale ad $\frac{1}{2}$; dunque l'avanzo avrà una ragione, cho corrifponderà alla ragione di $\frac{1}{1}$, meno la ragione di $\frac{1}{2}$, cioè levato da un intero un mezzo, la ferie che rifulta dal primo avanzo ftarà al fuo ultimo termine multiplicato per il numero de i termini, come l'altro mezzo, che refta, cioè come l' 1 al 2, e perchè nell' isteffa maniera in tutte le altre fottrazioni, che comprende il primo cafo, fempre rifulta un avanzo, compofto di due ferie, una pofitiva, e l'altra negativa, però i valori di ciafcheduna di loro in particolare compariranno nell' avanzo della ferie de i quadrati, fottratta da quelle degli uguali; laonde fe il valore della ferie degli uguali è $\frac{1}{1}$, e delle feconde potenze è $\frac{1}{3}$, il valore dell' avanzo comprenderà la ragione di $\frac{1}{1}$ — la ragoine di $\frac{1}{3}$, cioè corrifponderà alla ragione di $\frac{2}{3}$, ovvero del 2 al 3, e perchè il valore della ferie delle terze potenze, delle quarte &c. è $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, perciò gli avanzi, fatte le fottrazioni dalle ferie degli uguali, conterranno la ragione di $\frac{1}{1} - \frac{1}{4}$, e di $\frac{1}{1} - \frac{1}{5}$, cioè di $\frac{3}{4}$; onde $\frac{4}{5}$, cioè la ferie del primo avanzo, ftarà all'ultimo fuo termine multiplicato per il numero de termini, come il 3 al 4, e la ferie del fecondo avanzo ftarà all' ultimo fuo termine, come il 4 al 5.

XXII. Se accadeffe, dopo fatta la fottrazione dalla ferie degli uguali della ferie delle prime potenze, doverfi fublimare l'avanzo alla feconda, alla terza, o alla quarta potenza, fi potrebbe trovare la proporzione di quefte nuove ferie, con avvertire al numero delle ferie, dalle quali rifulterebbe qualunque di quelle, che foffero fublimate, per la qual cofa fi dice, che fe l' avanzo fi riquadra, fi produce una ferie compofta di tre altre, cioè di una ferie degli uguali, e di una doppia di quefta, e della terza, che è di quadrati, la prima, e l'ultima pofitiva, quella di mezzo negativa; fe l'avanzo s'inalza alla terzà potenza, rifulta una ferie compofta di quattro altre, due pofitive, cioè la prima e la terza, e le rimanenti due negative, la prima è degli uguali, la feconda è tripla di effa, la terza è tripla di quefta dei quadrati, e l'ultima è quella de cubi, e così delle altre. Per tanto conofciuti tutti i valori di quefte ferie componenti, farà pur conofciuto il valore dell' avanzo fublimato, che la prima volta corrifponderà ad $\frac{1}{3}$, la feconda ad $\frac{1}{4}$, la terza ad $\frac{1}{5}$, la quarta ad $\frac{1}{6}$, &c.

XXIII. L'offervazione ifteffa fi ha da fare, fe fi tratta di fa-

ſapere la proporzione, che al ſuo ultimo termine ha una ſerie di più alte potenze, alle quali ſi ſono fatti ſalire gli avanzi di una ſerie, o di quadrati, o di cubi, o di quarte potenze de numeri o. 1. 2. 3. &c. che è ſtata ſottratta dalla ſerie degli uguali, perchè ciaſcuno di queſti avanzi comparirà in una ſerie compoſta, la prima volta (cioè quando la ſerie levata è di quadrati, e l'avanzo ſi alza alla ſeconda, e terza potenza) di tre ſerie, cioè della ſerie degli uguali, della negativa doppia de quadrati, e della poſitiva delle quarte potenze, e poi di quattro, ſe ſi eleverà alla terza, cioè della ſerie degli uguali, della negativa tripla de quadrati, della poſitiva tripla delle quarte potenze, e della negativa delle ſeſte potenze; come ſi vedrà la ſeconda volta (cioè quando la ſerie levata ſarà di terze potenze, e l'avanzo ſi inalzerà o al quadrato, o al cubo) una ſerie compoſta o di tre, cioè della poſitiva degli uguali, della negativa dupla delle terze potenze, della poſitiva delle ſeſte; o di quattro, cioè della poſitiva degli uguali, della negativa tripla delle terze potenze, della poſitiva tripla delle ſeſte, e della negativa delle none, e finalmente la terza volta (cioè quando la ſerie levata ſarà di quarte potenze, e ſi innalzerà l'avanzo al quadrato, o al cubo) ſi dovrà oſſervare una ſerie compoſta, o di tre, cioè della ſerie degli uguali, della negativa dupla di queſte potenze, e della poſitiva di ottave, ovvero di quattro, cioè di quella degli uguali della negativa tripla delle quarte, della poſitiva tripla di ottave, e della negativa delle duodecime; dunque conoſciuto il valore di tutte le ſerie componenti, che ſi poſſono conoſcere da quanto ſi è detto fin quì, reſta pur conoſciuta la proporzione, che ha tutta la nuova ſerie al ſuo ultimo termine in ciaſcuno di queſti caſi ingrandito, o multiplicato per il numero de medeſimi termini.

XXIV. Paſſando ora al ſecondo caſo, in cui ſi dice, che ſe dalla ſerie degli uguali, ſi leva quella delle radici ſeconde, terze &c. de i numeri o. 1. 2. 3. 4 &c. riſulta un avanzo, che al ſuo ultimo termine multiplicato pel numero de i termini, ſtà come l'1 al 3, o come l'1 al 4 &c. ciò non cagiona difficoltà alcuna, perchè queſta è coſa, che per ſe ſteſſa è nota per eſſere noti i valori delle ſerie, che compongono queſto avanzo, che ſono $\frac{1}{3}$ della ſerie degli uguali, e $\frac{2}{3}$ della ſerie delle radici de dati numeri, dunque il primo avanzo, fatta la prima ſottrazione, cor-

ri-

riſponderà ad $\frac{1}{1}-\frac{2}{3}$, o come più ſu ſi diſſe a $\frac{3}{3}-\frac{2}{3}$, ovvero ad $\frac{1}{3}$, ed il ſecondo avanzo equivalerà ad $\frac{1}{1}-\frac{3}{4}$, ovvero a $\frac{4}{4}-\frac{3}{4}$, cioè $\frac{1}{4}$, anzi ſi troveranno ancora, ſecondo le precedenti regole i rapporti degli ſteſſi avanzi ridotti a ſeconde, o terze potenze, mentre corriſponderanno nella prima ſottrazione ad $\frac{1}{6}$, e ad $\frac{1}{10}$, e nella ſeconda avranno fra loro la ragione dell' 1 al 10, é dell' 1 al 20, e perchè quello, che nel ſecondo caſo propoſto ſuccede ſi oſſerva pure nel terzo, in cui compariſcono gli avanzi, che naſcono dalla ſottrazione di ſeconde, di terze, di quarte potenze &c. dalla ſerie delle prime, cioè a dire ſi oſſervano degli avanzi compoſti della ſerie delle ſteſſe prime potenze, e di diverſe altre, perciò ſtabiliti i proprj loro valori, ha da riſultare per il primo avanzo una ragione, che corriſponde ad $\frac{1}{6}$, per il ſecondo un altra, che equivale ad $\frac{1}{4}$, e per il terzo ſi trova una ragione ſimile a quella, che ha l' 1 al 10. Quando poi la ſerie, da cui ſi levaſſe un' altra foſſe di quadrati, o di terze potenze, e quelle, che ſi ſottraeſſero, foſſero di terze nella prima, e di quarte nella ſeconda ſuppoſizione, i valori degli avanzi ſarebbero $\frac{1}{12}$, ed $\frac{1}{15}$, e con queſt' ordine ſi troverebbero le proporzioni de nuovi avanzi, che poteſſero naſcere dalla ſottrazione in qualunque delle due ſuppoſizioni di altre ſerie di potenze più alte, cioè nella prima ſuppoſizione $\frac{2}{15}$, $\frac{3}{18}$, e $\frac{4}{24}$ &c. ſarebbero i valori, che conterrebbero le ragioni degli avanzi dopo fatta la ſottrazione delle quarte, quinte, e ſeſte potenze. E nella ſeconda ſuppoſizione $\frac{2}{24}$, $\frac{3}{28}$, $\frac{4}{32}$ &c. ſarebbero gli altri per le ragioni de reſti, da che foſſero levate le quinte, le ſeſte, e le ſettime potenze. Si ſupponga poi, che dalla ſerie delle radici o. $\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}$ $\frac{1}{b^{\frac{1}{2}}}$ $\frac{1}{c^{\frac{1}{2}}}$, &c. ſi levi la ſerie delle prime, ſeconde, e terze potenze, che i reſti loro corriſponderanno a $\frac{2}{15}$, $\frac{6}{18}$, $\frac{10}{24}$ &c. come dalla ſerie delle radici cube o. $\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}}$ &c. levate le prime potenze, le ſeconde, e le terze, corriſponderanno i loro avanzi a $\frac{6}{24}$, $\frac{15}{30}$, $\frac{24}{48}$ &c. e così in queſta guiſa ſi può operare per avere in pronto gli equivalenti per moltiſſimi altri avanzi rimaſti per la ſottrazione di diverſe ſerie da diverſe potenze. Per tutto queſto terzo caſo non ſi ſono prodotte quelle ragioni, alle quali ſono ſimili quelle delle ſerie degli avanzi ridotte a

ſe-

seconde a terze, o a quarte potenze, perchè la maniera di ritrovarle non è differente da quella, che abbiamo seguitata fin' ora ne i precedenti simili casi.

XXV. Per compimento di tutta questa dottrina delle proporzioni, rimane che si cerchi quella proporzione, che deve trovarsi in una serie, la quale risulti dalla multiplicazione di una serie di prime potenze, fatta per se medesima, o per un altra con una maniera inversa, cioè a dire, che il primo termine della prima si multiplichi per l' ultimo della seconda, il secondo della prima per il penultimo della seconda, e così degli altri. Siccome rimane, che si aggiunga la proporzione di un altra serie, che risulta dalla multiplicazione di altre due serie, nelle quali una sia il risultato di due serie aggiunte insieme, e l' altra l'avanzo di una di quelle sottratta dall' altra, e dico, che la proporzione per il primo quesito corrisponde ad $\frac{1}{6}$, e nel secondo non è minore di $\frac{2}{3}$. Corrisponde ad $\frac{1}{6}$, la prima a motivo, che il risultato è un composto di due serie, cioè di una di prime potenze, e di un altra di seconde, la prima positiva, e l' altra negativa, quella equivalente ad $\frac{1}{2}$, questa a $-\frac{1}{3}$, ma $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$ è uguale ad $\frac{1}{6}$, dunque la proporzione per il primo quesito è bene stabilita in $\frac{1}{6}$. Nel secondo poi non è minore di $\frac{2}{3}$, atteso che le due serie del risultato sono, una degli uguali positiva, e l' altra delle seconde potenze negativa, che però essendo i valori loro $\frac{1}{1}-\frac{1}{3}$, rendono esattamente la proporzione stabilita in $\frac{2}{3}$. Tanto il primo, quanto il secondo quesito può determinare diversi altri casi, come per esempio, il primo quesito può supporre in luogo delle prime le seconde potenze, o pure se si suppongono le prime potenze, si può intraprendere la multiplicazione inversa colle seconde, o sì vero può supporsi la serie delle radici multiplicata per quella delle prime potenze, o questa multiplicata per quella. In tutte queste supposizioni i risultati si avranno composti di più differenti serie, perchè il primo deriverà da tre serie, due positive, cioè l' estreme, e negativa l' intermedia, la prima sarà di seconde potenze, l' altra sarà doppia delle terze, e l' ultima sarà di quarte, che però il valore si esprimerà in questi termini $\frac{1}{3}-\frac{2}{4}$ † $\frac{1}{5}=\frac{1}{30}$. Il secondo risultato lo comporranno parimente tre serie, la serie degli uguali, la negativa doppia delle seconde potenze, la positiva

delle

delle terze, onde il ſuo equivalente ſarà $\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \dagger \frac{6}{4} = \frac{8}{6}$. Il terzo riſultato comprenderà due ſerie, una poſitiva, e l'altra negativa, la prima ſarà di radici ſeconde di prime potenze, l'altra di radici ſeconde di terze potenze, le quali equivalgono a $\frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$. Il riſultato dell'ultima multiplicazione non ſi può eſprimere con alcuno equivalente, perchè eſſendo la ſerie multiplicante una ſerie di radici quadrate della ſerie o. *a*. *b*. *c*. &c. i ſuoi termini preſi inverſamente, ſarebbero le radici quadrate de termini delle prime potenze preſi inverſamente; e comecchè queſte radici non ſono radici di una potenza, che ſi manifeſti ne i numeri o. 1. 2. 3. 4. &c. così non ſi può conoſcere la proporzione, che può aver luogo in queſto ultimo riſultato, ed in molti altri delle ſerie delle radici compoſte di due termini.

Per quello poi, che riſguarda il ſecondo queſito, può darſi il caſo, che la ſerie degli uguali ſi aggiunga alla ſerie delle prime potenze, e che ſimilmente da quella ſi faccia la ſottrazione della ſerie delle radici quadrate delle prime potenze, e che queſto avanzo abbia da multiplicare quella ſomma; però ſi avverte, che quando un tal caſo ſuccede, il prodotto ſarà una ſomma, compoſta di queſte ſerie, ed il ſuo valore ſi avrà in $\frac{11}{10}$ Non ſi troverebbe il valore, o la proporzione dimandata, quando fatta la ſottrazione delle prime potenze dalla ſerie degli uguali, e aggiunta queſta a quella, le radici quadrate di queſta ſomma ſi voleſſero multiplicare per le radici quadrate del primo avanzo trovato, perchè quando queſto valore, o queſta proporzione ſi poteſſe trovare, ſi troverebbe nel tempo ſteſſo il valore del circolo riquadrato, e delle altre ſerie delle radici compoſte di due termini, come quì ſopra ſi diceva.

C A P. III.

Delle Regole di Proporzione ridotte alla pratica.

I. L'Uſo delle Regole di Proporzione ſomminiſtrerà a queſto III. Capitolo una materia, più che abbondante, e molto a propoſito per farci conoſcere di quanto gran giovamento ſia l'eſſere in eſſe bene eſercitati, giacchè da queſte di-

pende l'intelligenza d' infiniti problemi, che da ogni parte di Matematica ci sono proposti, e la soluzione di molti quesiti, che la scienza de numeri ci prepara in varie occorrenze. Intraprenderemo per ora a discorrere dell' uso delle regole di proporzione nella scienza de i numeri, che poi in altro luogo opportunamente mostreremo la stessa cosa nella soluzione de problemi Matematici. Il metodo, che vogliamo seguitare, ce lo prescrive la diversa natura di quei casi, che possono accadere, ne quali tutti dovendosi ricercare quella parte, che è incognita, vi è di bisogno ricorrere ad una regola di proporzione più, o meno imbarazzata, a misura delle altre parti, che si suppongono conosciute. Pertanto accenneremo distintamente le principali operazioni, che sopra di detti casi si possono fare, e a tenore di queste risolveremo i quesiti, che giudicheremo i più utili, ed i più belli, e che sono soliti risvegliare in noi della brama di restare in tali cose mediocremente instruiti. Molte sono quelle operazioni, che quando si fanno vi è di bisogno delle regole di proporzione. Da tutte queste ne facciamo scelta di quattro, e i nomi loro sono.

1. *La Regola del tre, o regola aurea.* 2. *La Regola d'interesse.* 3. *La Regola di allegazione.* 4. *La Regola di falsa posizione.*

Della Regola del tre.

§. I.

II. La regola del tre prende il suo nome dal numero di quei tre termini, che sono dati, perchè con essi si scuopra il quarto termine, che è incognito. Si pratica questa regola in una maniera, se la proporzione và dal più al più, o dal meno al meno, e l' uso di essa è un altro, se la proporzione va dal più al meno, o dal meno al più. Queste quattro grandezze 100. 25. 200. 50. osservano la proporzione del più al più, ma se si prendono in questa guisa 200. 50. 100. 25. la loro proporzione si cambia, e si dice dal meno al meno; che se sono date queste altre quattro grandezze 1800. 12. 2700. 8. si vede in esse la proporzione, che è dal più al meno, e si risolve in quella del meno al più, se tale si pone la serie delle

le grandezze 1800. 12. 900. 24. Per più chiarezza della nostra espressione si avverta, che la quarta grandezza, che si cerca, dipende sempre dalla terza già data, in ordine alla quale ha da risultare, o piccola, o grande, a proporzione, che quella si trova piccola, o grande, ovvero tanto deve esser piccola, a misura che quella è grande, o a proporzione, che ella è piccola, deve la quarta essere maggiore. Ne i primi due casi la regola del tre si dice diretta, negli ultimi due è indiretta, ed il quarto termine, che manca, si trova nel modo istesso, con cui si trova, dopo tre numeri proporzionali dati il quarto, tanto della proporzione diretta, quanto dell' altra indiretta, delle quali si parlò nel I. Capitolo di questo II. Trattato. Per la pratica della regola del tre, è necessario formarne il quesito, che quando è diretta si propone, quasi che in tal maniera: se dalla prima grandezza data deriva la seconda, quale dovrà risultare dalla terza. E se la regola è indiretta si può esprimere così: se valendo *a*, tanto, per il prezzo *b* si ha da avere tanto, se *a* varrà assai più, quanto si dovrà avere per l' istesso prezzo *b*? Ovvero se un numero di truppe coll' assegnamento *a* può mantenersi per tanti giorni, col medesimo assegnamento un numero minore di uomini quanti giorni si manterrà? E' certamente utilissima la regola del tre, perchè di lei ci serviamo nella mercatura per fermare i prezzi alle robe, ne traffichi per sapere il guadagno delle monete, negli scomparti, nelle tare, nella riduzione delle misure, in cui bisogni fare scoperta di un quarto termine proporzionale, anzi sono dati talvolta certi quesiti, che in un tratto non si vede con qual regola si possano risolvere, che poi meglio considerati, si trova, che con questa regola del tre si può avere, e realmente si ottiene una molto adequata soluzione; quindi è, che lasciati da parte diversi esempj, che quì si potrebbero portare per far vedere l' uso della descritta regola, uno solo se ne ha da proporre, in cui appieno apparisce la predetta cosa, e si dà nel seguente quesito.

Si fabbrica una fontana, che ha da gettare cinque spilli di acqua, e si vuole, che la sua vasca in 12 ore si riempia dell' acqua, che esce dal primo: e che in 18 ore si empia da quella, che esce dal secondo; in 27 da quella del terzo; in

36 da quella del quarto, ed in ore 54 da quella del quinto. Si dà intanto l'acqua alla fonte per tutti i 5 spilli, e si lascia, che se n' esca dalla vasca per cinque bocche; ciascuna delle quali in un intervallo di tempo determinato la fa vedere asciutta; cioè in 2 ore, in 4, in 6, in 9, ed in 12 ore se ne anderà tutta l'acqua. Si cerca in qual tempo si voterà, se tutti in una volta si aprano i condotti, che la portano nella vasca, e le bocche, che la lasciano escire.

Questo è uno di quei quesiti, che per risolverlo è molto a proposito la regola del tre; prima però di porla in uso sono necessarie le seguenti preparazioni. In primo luogo si ha da porre in chiaro quanta acqua in un ora da tutti gli spilli si deponga nella vasca. In secondo luogo si ha da trovare quanta acqua da tutte le aperture della vasca in un ora si scoli.

Si trova la prima delle due cose in questa guisa: se in 12 ore si riempie la vasca di quell' acqua, che esce dal primo spillo, in un ora ne somministrerà una dodicesima parte, e fissata la proporzione per gli altri, la quantità dell' acqua, che da tutti gli spilli passerà nella vasca in un ora di tempo, corrisponderà ad $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{18}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{36}$, $\frac{1}{54}$. Tutte queste differenti frazioni si ridurranno alla medesima denominazione o per le regole ordinarie, o con trovare un numero, che possa essere diviso da tutti i denominatori delle frazioni, e si trova il 108, dipoi diviso il 108 per tutti i denominatori, si rilevano queste altre frazioni $\frac{9}{108}$, $\frac{6}{108}$, $\frac{4}{108}$, $\frac{3}{108}$, $\frac{2}{108}$, e nella loro somma $\frac{24}{108}$, si ha tutta la quantità dell'acqua, che in un ora da tutti i cinque spilli si deposita nella vasca.

Si determina la seconda cosa nella maniera, che si è determinata la prima, con trovare quel numero, che può essere partito da tutti i tempi dati, quale è lo stesso 108, e si formano cinque nuove frazioni, che sono $\frac{54}{108}$, $\frac{27}{108}$, $\frac{18}{108}$, $\frac{12}{108}$, $\frac{9}{108}$, le quali sommate insieme rilevano $\frac{120}{108}$, che è quella quantità di acqua, che in un ora uscirà da tutte le aperture della vasca, ma ne entravano in un ora $\frac{24}{108}$, dunque saranno $\frac{96}{108}$ quelle parti di acqua, che in un ora esciranno dalla vasca. Compite queste due operazioni, s' intraprende ad operare colla regola del tre, per la soluzione del quesito. Di questa regola il primo termine proporzionale è $\frac{96}{108}$, il secondo è 1, cioè la misura di un ora, il terzo proporzionale è $\frac{108}{108}$, quantità di tutta l'acqua

che

che ha da ſcolare dalla vaſca. Dunque multiplicato l' 1 per $\frac{108}{108}$, riſulta lo ſteſſo, queſto riſultato partito per 96, laſcia per quoziente 1, che eſprime la miſura di un ora. L'avanzo 12, ſi multiplica per 60, e ſi produce 720, che di nuovo ſi parte per il 96, ed il ſecondo quoziente è il 7, che manifeſta 7', e perchè dalla ſeconda diviſione rimane 48, queſto di nuovo ſi multiplica per 60, ed il riſultato 2880. ſi parte per 96, e laſcia 30'' ſenza avanzo, però ſi dice, che verificandoſi quanto è ſtato ſtabilito nel queſito, la vaſca reſterà affatto aſciutta nel termine di un ora, 7' 30''.

III. Un alrra regola del tre ſi chiama compoſta, perchè contiene in ſe molte altre regole del tre, ed allora di eſſa ci ſerviamo, quando li termini dati ſono cinque, ſette, o più. Nel praticarla ſi avverte, che una qualche volta il caſo propoſto ſi ha da riſolvere con due, o con più regole del tre dirette, e ora colle regole del tre indirette, e queſti caſi ſuccedono, quando, come dianzi ſi oſſervò, la proporzione ſi fa dal più al più. Eſſendo dunque date cinque grandezze può ricercarſi la ſeſta, e può ancora volerſi trovare la quinta, o la quarta, e ciò dipende dalla diſtribuzione de i termini, che è onninamente arbitraria. Un queſito, che ſi ſcioglie con queſta regola è il ſeguente. Cento Opere hanno fatto in 5 giorni una foſſa lunga 800 braccia, larga 4, e profonda 3, in quanto tempo le ſteſſe Opere ne faranno una altra lunga 2400, larga 6, profonda 5. Si riſponde, che biſognerà un lavoro di giorni $37\frac{1}{2}$, come ſi rileva dalle ſeguenti operazioni, che s'intraprendono con tre regole del tre dirette.

Io dirò dunque primieramente, ſe braccia 800. ſi fanno in 5 giorni, braccia 2400 in quanti giorni ſi faranno?

R. Giorni 15.

Dipoi continuando l'operazione aggiugnerò. Se eſſendo larga 4 braccia ci vuogliono giorni 15, eſſendo larga braccia 6 quanti ce ne vorranno? R. Giorni $22\frac{1}{2}$.

Finalmente per compimento di eſſa dovrò dire. Se per farla profonda braccia tre s'impiegano giorni $22\frac{1}{2}$, per farla braccia 5 quanti ſe ne impiegheranno? R. Giorni $37\frac{1}{2}$.

Le queſtioni propoſte alcune volte comprendono alcuni termini, che nella ſerie delle prime operazioni non ſi valutano, e ciò ſuccede quando queſti termini appartengono unicamente

mente alla cosa, che si ricerca. Eccone un esempio per mostrare, come si ha da operare in altre simili circostanze.

Per addobbare una facciata, 46 braccia lunga, $35\frac{1}{2}$ alta, si sono impiegati 14 teli di panno lunghi 50 braccia, alti $2\frac{1}{3}$, si dimanda per coprire una muraglia 80 braccia lunga, alta 50 quanti teli ci vorranno, se quelli che si hanno sono lunghi 55 braccia, e alti $2\frac{3}{4}$.

I Termini espressi nel quesito non possono tutti impiegarsi nella serie di quelle operazioni, che si distribuiscono in due regole, per tanto quelle, che sopprimiamo sono le misure date a teli, che si sono posti in opra la prima volta, e quelle, che si stabiliscono per gli altri, che si cercano.

Ecco dunque la prima operazione. Se braccia 46 vogliono teli 14, braccia 80 quanti ne impiegheranno? R. 24 teli, e $\frac{8}{23}$.

II. Operazione.

Se una altezza di braccia $35\frac{1}{2}$ vole teli $24\frac{8}{23}$, un'altezza di 50, quanti ne vorrà? R. $34\frac{478}{1633}$ teli.

L'operazione sarebbe compiuta, se non vi fosse differenza alcuna nelle misure de' teli adoprati, ed in quelle degli altri, che si hanno da porre in opra, per tanto è necessario ripigliare la soluzione intera del quesito, con altre nuove operazioni, che intraprenderemo sopra il seguente quesito. Se 50 braccia di larghezza, $2\frac{1}{3}$ di altezza, che sono le misure dei teli, che addobbarono la prima facciata, e che si supposero le stesse per gli altri teli cercati, esigono, che s' impieghino teli $34\frac{478}{1633}$, quanti ne esigerà una lunghezza di 55 braccia, ed un altezza di $2\frac{3}{4}$.

I. Operazione.

Se 50 di lunghezza vogliono teli $34\frac{478}{1633}$, quanti ne vorranno 55? R. $37\frac{1179}{1633}$ teli.

II. Operazione.

Se braccia $2\frac{1}{3}$ altezza, impiegano teli $37\frac{1179}{1633}$, quanti ne impiegheranno $2\frac{3}{4}$ altezza. R. $44\frac{748}{1633}$ teli.

Dunque dal risultato delle operazioni si apprende, che ci vorranno 44 teli di 55 braccia l'uno, e più 25 braccia, 3 soldi, e quasi undici danari.

L'esempio, che segue si dà per la regola del tre composta indiretta, acciocchè si apprenda in esso la maniera di operare con questa regola in qualunque altro caso. Sono lasciate

te 19200 lire, perchè si distribuiscano a 800 poveri nel termine di 60 giorni, dando ogni giorno 8 soldi per ciascheduno. Sopraggiugne un ordine, che nel termine di 25 giorni si faccia la distribuzione del denaro suddetto a 320 poveri. Si cerca quanto si deve dare per giorno a ciascun povero.

Soluzione del quesito.

Se 800. poveri hanno 8 soldi, quanti 320 poveri ne dovranno avere? R. 20 soldi.

Continuazione dell' operazione.

Se a 60 giorni si debbono 20 soldi, quanti a 25 giorni si dovranno? R. 48 soldi.

Praticano alcuni diversamente nella soluzione de i quesiti assegnati alla descritta regola del tre composta, e la differenza è, che se la soluzione si deve fare per la regola diretta, multiplicano tutti insieme li tre ultimi termini dati, uno per l'altro, ed il prodotto lo serbano per dividerlo col risultato dalla multiplicazione de i primi due. Che se la soluzione del quesito appartiene alla indiretta, moltiplicano i primi tre, e partono il risultato col prodotto della multiplicazione de due ultimi, ed i quozienti, che da queste espressioni compariscono, sono i termini, che si vogliono sapere. Dovendosi dunque per questa strada trovare la risposta al primo quesito, se ne ripete la serie de termini per avvertire le loro multiplicazioni.

(Opere) (B di lung.) (B. di larg.) (B. di prof.) (Gior.
100. , 800. 4. 3. , 5.
(Opere) (B. di lung.) (B. larg.) (B. prof.) (Gior.
100. , 2400 6 5 , x

Le virgole inscritte fra termini manifestano ciascuna parte del quesito; che però tutte le parti del secondo, si dovranno ridurre in una sola, e la stessa cosa si dovrà operare intorno alle parti del quinto, e la nuova serie sarà

100 , 9600 , 5] [100 , 72000 , x

Il risultato de primi due termini è 960000. Il risultato degli ultimi tre 36000000, il quoziente della divisione è $37\frac{1}{2}$, che appunto corrisponde al risultato posto nella risposta già data al quesito.

Si

Si potrebbe pure risolvere lo stesso quesito con una sola regola del tre diretta, che succederebbe, se le 7 parti prese nel quesito tali quali in esso si riscontrano, lung. larg. prof. G.
lung. larg. prof. .800, 4, 3, 5,
2400., 6, 5 si riducessero a sole tre in questo modo. Si multiplicano uno per l'altro 800, 4, 3, e risulta 9600, poi si multiplicano gli altri tre 2400, 6, 5, ed il prodotto è 72000., e questi prodotti diventano il primo, ed il terzo proporzionale, il 5 si lascia stare il secondo, onde distribuiti in tal modo i nuovi termini 9600, 5, 72000. si trova il $37\frac{1}{2}$, come prima per quarto termine proporzionale.

Queste maniere di risolvere il primo quesito, si adattano ugualmente al secondo, ed unicamente si osserva, che a motivo delle parti tralasciate nella serie delle prime operazioni, bisogna due volte intraprendere la stessa operazione. Si applichi pure l'insegnamento dato al quesito proposto per la regola del tre indiretta alla composta, mentre l'esito risulterà il medesimo, e le risposte si vedranno concordi. Quello, che talvolta accade ne quesiti, che per le predette regole si propongono è, che li paragoni delle parti loro riescono tali, che una lor parte ha di bisogno di essere scoperta con una regola del tre diretta, la rimanente con un altra indiretta. Ed ecco per qual ragione la regola del tre è stata ancora chiamata *mista*, perchè in congiuntura di un qualche quesito di tal sorte, la soluzione si ha da intraprendere con una regola del tre una volta diretta, e poi l'altra indiretta. Il quesito poi, allora ci necessita a ricorrere ad una operazione di questa sorte, quando ciò che si cerca, deriva da due combinazioni, in una delle quali la proporzione và dal più al più, o dal meno al meno, e nell' altra si prende dal più al meno, o dal meno al più. Eccone un esempio.

Se una fossa lunga 800 braccia, larga 4 profonda 3, si fa in 5 giorni da 100 Opere, perchè una fossa lunga 2400 braccia, larga 6 profonda 5, si faccia in 37 giorni e mezzo, quante Opere ci vorranno?

Soluzione.

I. Regola diretta.

96000 72000

Se 800. 4. 3. la fanno 100 Opere. 2400. 6. 5.
quante la faranno? R. 750. *III. Re-*

II. Regola indiretta.

Se in Giorni 5., lavorano Opere 750.) Giorni $37\frac{1}{2}$, in quante Opere lavoreranno? R. 100. Opere.

Ho voluto proporre l'esempio di sopra adoprato, perchè nel tempo, che si è fatto servire alla presente regola, si osservi, che dipende dalla sola disposizione de' termini, che la questione si abbia a risolvere per una regola del tre, composta o diretta, o indiretta, o mista; quando la distribuzione è fissata, come sta nell'esempio, non si può più risolvere la questione, nè con ridurre tutti i termini dati a due soli, nè con ridurli a tre, come si è detto, che si può fare in qualunque altra distribuzione, attesa la varietà della proporzione, che si introduce nella serie de termini preparati, che non si può mantenere nei risultati delle multiplicazioni, che si dovrebbero intraprendere.

IV. Si dà un altra regola del tre più composta delle precedenti, e di essa ce ne serviamo, quando si tratta di voler sapere, dopo fatto il paragone di grandezze fra loro distinte in specie, che ragione abbia la prima di esse all'ultima, in ordine al loro valore. Affine però, che una tal regola possa adoprarsi, conviene disporre in tal guisa i confronti delle grandezze intermedie, che quella grandezza, alla quale si fa il primo paragone, sia poi essa, che si paragona alla terza, come questa terza si deve paragonare alla quarta, e così sempre, fintanto, che non si arriva all'ultima, di cui si prepara il valore con quello della prima. Se dunque noi diremo così.

Quattro Macchine Idrauliche sono costate 35000. lire.
24 lire sono il valore di - - - - - 4. Tolleri.
10 Tolleri equivalgono a Ruspi - - $4.\frac{1}{2}$

Si dimanda quanti Ruspi sono importate queste 4 Macchine. In questa distribuzione di parti abbiamo l'esempio di questa regola, dalla quale per averne la risposta adequata al quesito così si deve operare.

Si hanno da multiplicare i primi tre termini fra di loro 4 per 24. per 10. e poi gli altri tre nella stessa maniera. Il risultato dalla multiplicazione de' primi si serba per primo termine di questa regola del tre, il risultato dalla multiplicazione de i secondi serve per secondo termine, il numero delle macchine fatte fare è il terzo, dunque il quarto, che si tro-

verà, darà la rispoſta al queſito, e moſtrerà il compimento della nuova operazione fatta con queſta nuova regola del tre. Il primo riſultato è 960, il ſecondo è 63000, che multiplicato per 4 produce 252000, il quale diviſo per 960, dà per quoziente Ruſpi $262\frac{1}{2}$, e queſto è appunto il prezzo delle 4 Macchine Idrauliche.

La preſente regola, perche congiugne in una ſola più regole del tre, per queſto è chiamata regola del tre multiplice, e quando non ſi voglia fare nel modo deſcritto, ſi deve fare in queſt' altra maniera. Li due ordini nei quali ſi ſono diſtribuite le grandezze del propoſto queſito, ſi dovranno ora ſpartire in un altro modo, perchè ci ſomminiſtrino i termini per riſolvere tre regole del tre.

Per riſolvere dunque la prima, ſi prende il 3500 per il primo termine, di poi il 4, che è il numero delle macchine, finalmente il 24, e multiplicati i due ultimi, il riſultato 96 ſi parte per il primo, ed il quoziente $\frac{96}{3500}$, ſarà il primo quarto termine proporzionale trovato nella prima regola.

Per riſolvere la ſeconda ſi prenderà il 4, che è il numero de Tolleri, e ſarà il primo proporzionale, poi il quarto di ſopra trovato $\frac{96}{3500}$, finalmente il 10, e queſti ultimi due multiplicati fra loro, daranno $\frac{960}{3500}$, ovvero $\frac{48}{175}$, da partirſi per il 4, ed il quoziente $\frac{48}{700}$, ovvero $\frac{12}{175}$, ſarà il ſecondo quarto termine proporzionale trovato colla ſeconda regola.

Finalmente per riſolvere la terza regola ſi prenderà per primo proporzionale l' ultimo trovato $\frac{12}{175}$, per ſecondo il $4\frac{1}{2}$, numero di Ruſpi, per terzo il numero del queſito, cioè il numero delle macchine, che è 4, e di nuovo il riſultato dalla multiplicazione degli ultimi due, che è 18, partito per il primo $\frac{12}{175}$, produrrà $262\frac{1}{2}$, che ſarà il quarto proporzionale trovato con queſta regola, e l' ultimo di tutta l' operazione, che ſi vede eſſere lo ſteſſo, che quello già ritrovato colla regola precedente. Quello, che ſi è avvertito ſu queſto eſempio, ſi può applicare a qualunque altro. Anche queſta regola del tre multiplice, come ſono tutte l' altre, o è diretta, o è indiretta; ſe ſi verifica la prima proprietà per riſolvere il queſito con eſſa, nulla meno, ne nulla di più ſi ha da porre in opera di quello, che ſi è poſto nell' eſempio dato. Se poi è indiretta, che ſegue quando, dopo avere diſtribuite le grandez-

ze

ze nel modo predetto, si cerca quanto si può acquistare della prima, con una determinata quantità dell'ultima grandezza; se la soluzione s' intraprende nel primo modo, si preparano i tre termini proporzionali, come dianzi, poi nel far l' ultima operazione colla regola del tre si opera, come s'insegnò doversi operare nella regola del tre indiretta. Che se la soluzione al quesito si dà con intraprendere l' altra operazione, le prime regole si fanno, come si è veduto nel descritto esempio, e solo nella disposizione dei termini per l' ultima vi è qualche differenza; e questa consiste in porre in secondo luogo quello, che fu posto nel primo, e porre nel primo quella grandezza, che fu posta nel secondo, del rimanente la multiplicazione dei termini si fa come nella diretta. Ma di questa regola del tre, abbiamo a bastanza parlato, onde si può passare a discorrere di un altra regola di quelle già stabilite per la materia delle proporzioni.

§. II.

Della Regola d'interesse.

I. QUesti interessi, che possono considerarsi in diverse specie di Traffichi, si determinano con diverse regole, delle quali parleremo in appresso. Fra queste noi scegliamo 1. la regola detta di meriti, e sconti. 2. la regola di cambio. 3. la regola delle tare, e baratti, e la regola delle Compagnie.

Cominciando dunque dalla prima, io avverto, che sotto nome di merito, viene qualunque frutto, e guadagno, che si può riportare dall' impiego del danaro, dalla vendita di robe, dalle società, che si instituiscono fra diverse persone con sborso di uguali, o disuguali somme, o da qualunque altra convenzione non contraria alle leggi, e accordata dal consenso libero, e scambievole delle parti; essendo, che dunque per tanti titoli può derivare un giusto guadagno a differenti persone, ed in tutti questi si ha da avere riguardo ad una tal qual proporzione fra le sostanze, che sono date, ed i frutti, che si hanno a ricercare; per ciò è bene notare questa proporzione, e quei differenti casi, ne quali si suol trovare, non

 già

già con animo di proporli tutti, che sarebbe impossibile, ma alcuni soli, perchè poi dalla osservazione di questi si possa facilitare l' intelligenza degli altri, e da quello, che in essi si trova di particolare si possa fermare una fondata Idea di quello, che può universalmente accadere. E per venire a spiegare la natura del frutto, che derivar suole da qualche somma di denaro dato ad altri per questo effetto, cioè, perchè abbia da fruttare, si dice, che questo frutto può considerarsi, come semplice, o può considerarsi come già passato in natura di capitale, capace esso ancora di produrre un nuovo frutto. Inteso dunque, che il frutto sia semplice, il merito è chiamato semplice, e quel denaro, che si è dato a cambio, o a censo, a capo a tanto tempo, lo somministra, e però passato tal tempo se ha fruttato 5, se quattro, se 6, questo guadagno si ha dà ritirare dal proprio denaro, e sebbene non si ritiri il capitale, resta lo stesso, e lo stesso frutto riproduce in un altro tempo simile al primo, quindi se si vuol sapere quanto abbiano da fruttare 7000 lire, fatto un censo a cinque per cento, basta dire se un cento di lire fruttano 5, 70 centinaia quanto frutterebbano, ed il frutto sarà di 350 lire, ovvero, se sapendosi, che il 5 è frutto di un cento di lire si volesse sapere di quante centinaia fossero il frutto 350, si troverebbe con un altra regola del tre, che sarebbero frutto di 70 centinaia, ma su questa qualità di frutto non è solito, che naschino molte difficoltà.

Quel frutto poi, che per essere passato in capitale produce un nuovo guadagno, richiede una maggiore attenzione, perchè con aggiustatezza si determini a quanto ascenda, principalmente quando già è passato molto tempo, da che il capitale cominciò a utilizzare col frutto suo proprio, e coll' utile de' frutti; per la qual cosa è necessario prima determinare il guadagno del capitale, mentre poi colle seguenti regole si arriva a sapere quanto si dovrà rendere al fine del passato tempo fra il merito del frutto, e il frutto del capitale. La Regola, per cui si opera in un tal caso è chiamata *del meritare a capo d' anno, o di altro termine*, che non vuol dir altro, se non che saldar la ragione ad ogni fine dell'anno, e meritando 5 per cento, 6, 7, ovvero 10 in capo all' anno tornano 105, 106, 107, e 110 scudi fra capitale, e guadagno, e que-

e questo guadagno è quello, che non pagato diventa capitale, e non sono 100 scudi quella somma, di cui si ha da riportare il frutto nel secondo anno, ma sono 105, 106 &c. Quello dunque, che ora si cerca è la proporzione, che si osserva in questo merito, tanto per ciò, che riguarda al guadagno, quanto per ciò, che appartiene allo sconto, cioè a quella diminuzione di denaro, che tutto si dovrebbe pagare dopo uno stabilito tempo, fatta a ragione opposta al merito di un tanto per quella quantità di denaro, che si è contrattata a causa di presente pagamento. Per due differenti tempi può ricercarsi questa tal cosa, perchè il quesito si può proporre dentro un termine di anni interi, senza spezzatura, ovvero si può proporre unitamente con queste.

Se si cerca quanto ha da pagare in 3 anni, chi ha ricevuto per esempio 300 scudi a ragione di 5 per cento, essendo passato il merito di tutti i 3 anni in capitale, questo quesito appartiene al primo caso; che se oltre i tre anni si aggiungessero 10 mesi, e 20 giorni, sarebbe il quesito della seconda natura. Per risolvere il primo non vi è bisogno d' altro, se non della regola del tre, da ripetersi tre volte, perchè tre sono gli anni, che si suppongano passati. I primi due termini di queste tre regole saranno sempre gli stessi. La somma data nella prima regola sarà il terzo proporzionale, e nell' altre il risultato dalla prima regola, occuperà sempre il terzo posto in quella, che segue, ed in questa guisa il quarto proporzionale, che si troverà con l' ultima regola, sarà il merito, o il frutto, che si dovrà pagare, passato il tempo, che nel quesito si è stabilito. Dunque tutto l' artificio di questa operazione consiste in trovare quei due primi termini, che sempre si hanno a rivedere ne medesimi posti, e questi si trovano con prendere per primo quella somma a cui si assegna il frutto, che si dimanda, e che nel quesito dato la formano 100. scudi, e poi con porre in secondo luogo questa stessa somma, unita insieme col suo frutto, cioè per stare nel dato quesito il 100 col 5, che fa 105. Preparati per tanto questi due termini si ordinerà la prima regola di proporzione in tal modo: se scudi 100. diventano 105., quanti diventeranno scudi 300. e si trova per il primo, che diventeranno 315. scudi. Si ordina poi la seconda, e si dice se 100. diventano 105. 315.

quanti

quanti diventeranno? Si vede che diventeranno 330. scudi, e $\frac{1}{4}$, cioè lire 5. e 15. soldi. Finalmente si ordina la terza regola, e si dice: se 100. diventano 105. 330. e $\frac{1}{4}$, quanti diventeranno? E si trovano $347\frac{21}{80}$, cioè diventeranno scudi 347., 2. lire soldi 0. e tre denari, quelli, che si dovranno pagare tra capitale, e frutti passati i tre anni.

Per la soluzione del secondo quesito si deve prima operare, come si è operato nel precedente, per trovare la somma del merito, e del capitale, che si ha da pagare per gli interessi per gl' interi tre anni passati, poi perchè oltre a questo tempo vi sono di più dieci mesi, e 20. giorni, si potrà seguitare la prima operazione per trovare il merito, che corrisponderebbe al quarto anno se fosse intero, dal quale preso quello, che appartiene a 10. mesi, e 20. giorni, questo si aggiugnerà al capitale, e frutti di tre anni, e si vedrà in tal guisa tutto quello, che si dovrà pagare fra meriti, e capitale, dopo tre anni, e 10 mesi, e giorni 20. passati dalla creazione del censo, o del cambio. Avendo noi dunque trovato colla passata operazione, che il merito col capitale dopo tre anni ascende a 347 scudi, lire 2., soldi 0. denari tre, con un altra regola del tre si troverà, che nel quarto anno la somma salirà a scudi 364., lire 4., soldi 9, denari 2., cioè che il merito di 12. mesi arriva a 17. scudi, 2. lire, 8 soldi, 11. denari. Dunque, perchè il quesito propone oltre i tre anni un intervallo di 10. mesi interi, si dovrà levare dal predetto merito l' equivalente ad un sesto, cioè 2. scudi, 5. lire, 4. soldi, 9. denari, e $\frac{5}{6}$, e rimarranno 14 scudi, 3. lire, 4. soldi, 1 denaro, e $\frac{1}{6}$ per il merito di 10. mesi, ma oltre i 10. mesi sono numerati di più 20. giorni, cioè due terzi di un mese, però presi questi dal merito di un mese, che ascende ad 1. scudo, 3 lire, 2 soldi, 4. denari, e $\frac{11}{12}$, si avranno lire 6., soldi 14., denari 11 e $\frac{5}{18}$, e questi due ultimi meriti posti in una sola somma rileveranno scudi 15., lire 2., soldi 19, denari 0 e $\frac{2}{3}$ da aggiugnersi a scudi 347. lire 2., soldi 0., denari 3. è tutta la somma, cioè scudi 362. 4. 19. 3., lasciato il rotto, produrranno il merito, ed il capitale, che stando noi nel proposto quesito, si dovrà rendere nel termine di tre anni, mesi 10., e 20. giorni.

Da quello, che risulta dalla soluzione de' due quesiti, deriva nuova materia per formarne un terzo, ed è, se scudi 347. lire

lire 2., soldi o, derari 3 sono una somma di merito, e di capitale, prodotta da un frutto di 5. per cento nel termine di 3 anni, si dimanda primieramente dà qual capitale si è prodotta una tal somma, in secondo luogo, essendosi trovato il capitale, ed insieme sapendosi il merito di tre anni, si vuol sapere a quanto per cento il capitale fu dato a frutto.

Per avere la soluzione della prima parte del quesito si deve trovare a qual somma sale fra merito, e capitale, quella, che nel termine di tre anni deriva dalla somma di soli 100. scudi, e trovato, che in capo a tre anni sarebbero scudi $115\frac{61}{80}$. Si ordina la regola del tre diretta in questa guisa, se scudi $115\frac{61}{80}$ risultano da 100. da qual somma deriveranno scudi $347\frac{23}{80}$. e si trova, che deriveranno da scudi 300.

Ciò, che in secondo luogo si cerca, richiede una operazione, che qualche volta può riuscire difficile, mentre si tratta di dovere trovare più medj proporzionali, per esempio ora due, ora 3. 4. &c. cosa, che o non sempre co' numeri si può fare, o riesce difficilissima. Servirà dunque accennare la maniera di procedere in essa, ed è, che il capitale supposto, sempre è primo proporzionale, la somma pagata nell' ultimo anno, che propone il quesito, è sempre l'ultimo proporzionale, sicchè, se il conto si fa in capo a due anni, bisognerà trovare un medio solo, se in capo a tre, occorreranno due medj proporzionali, se si fa in capo a quattro, a cinque &c. i proporzionali medj, che si dovranno cercare, saranno 3. 4. &c. Or come dunque potrà giudicarsi facile la soluzione di questo quesito? Stando noi sul caso proposto richiede la nostra operazione la ricerca di due medj proporzionali fra il 300., ed il $347\frac{23}{80}$, che sono i numeri conosciuti, cioè a dire si hanno da trovare 2 numeri, che multiplicati fra loro producano $104186\frac{1}{4}$, che è il risultato de' due numeri dati multiplicati l'uno per l' altro, ma si trova, che 315. multiplicato per $330\frac{3}{4}$, fa la predetta somma, dunque questi due saranno i due medj proporzionali. Ora si prenderà il primo 315., e si leverà dal capitale, cioè dal 300. e dell' avanzo ci serviremo per averlo secondo termine proporzionale in una regola del tre ordinata in tal guisa, se 300. guadagnano 15, che cosa guadagneranno 100. e si trova, che il guadagno di 5. scudi, dunque si è trovata la soluzione alla terza parte del nostro

ſtro queſito, e ſi è ſaputo, che il denaro dato a cenſo ſi è dato a meritare 5. per cento a capo d'anno. Se il merito non foſſe di queſta natura, ma foſſe merito ſemplice ſarebbe molto più facile il trovare il frutto, perchè ſervirebbe levare il capitale dalla ſomma pagata in capo a 3 anni, e il reſto ſarebbero i frutti di queſto tempo da dividerſi per 3., affine di avere l' intereſſe del primo anno, il quale trovato ci ſomminiſtrebbe la ſoluzione del queſito colla regola del tre ultimamente indicata.

VI. Serve di prova al merito a capo d' anno lo ſconto, quale ſi fa colle regole di proporzione nella maniera, che ſegue. Si rilevò dal primo de' precedenti queſiti, che 347. ſcudi, e $\frac{21}{80}$ erano la ſomma del capitale, e del merito, che fruttavano ad un mercante nel termine di 3 anni 300 ſcudi a ragione di 5 per cento. Si vuol ſapere quanto ſi dovrà sborſare ora per ſaldo al mercante de' predetti ſcudi $347\frac{21}{80}$. Se ſi contenterà di ſcontarli a 5. per cento facendo a capo d' anno.

Diventando 100. ſcudi dati a merito per un anno una ſomma fra capitale, e merito di 105. ſcudi, ſi oſſerva qual parte ſia di queſta ſomma il frutto ſtabilito del 5. per cento, e perchè ſi trova, che corriſponde ad $\frac{1}{21}$, per 21 ſi parte l' intera ſomma di ſcudi $347\frac{21}{80}$, ed il quoziente $16\frac{41}{80}$ ſi leva da $347\frac{21}{80}$, e l'avanzo $330\frac{3}{4}$, è la ſomma del primo anno; queſta prima ſomma ſi parte ancora eſſa per 21, ed il quoziente $15\frac{3}{4}$, che da quella è ſottratto, laſcia nell' avanzo 315 la quantità del denaro, che appartiene al ſecondo anno; finalmente ſi parte il 315 per 21, e fatta la ſottrazione del quoziente 15 dalla ſteſſa ſomma reſtano ſcudi 300, che ſono la quantità di denaro, che è dovuta al terzo anno, cioè quella quantità del denaro, che nel primo queſito ſi ſupponeva data col merito a capo d' anno del 5 per cento.

Quando ne ſconti a capo d' anno ci ſono de' meſi, e giorni, oltre gli anni interi, per fare queſto ſconto, acciocchè rieſca di prova al merito fatto, è forſe una delle più ſpedite maniere, quello, che inſegna di operare in tal guiſa. Prima ſi fa lo ſconto per i meſi, e giorni, trovandoſi di eſſi il merito; per eſempio nella ſomma di ſcudi 100 a tenore del frutto, che ſi è dimandato, e queſto merito trovato ſi aggiugne

a ſcudi

a scudi 100, poi si dice, se scudi cento, e tanti fra capitale, e merito tornano 100. collo sconto, quanti scudi torneranno tutta la somma data? e trovato il quarto numero proporzionale, questa somma è quella, su cui si opera collo sconto nella maniera di sopra descritta, per trovare le somme, che convengono, a ciascheduno degli anni assegnati. Così dunque per stare nel caso del secondo quesito, in cui si rilevò, che 362 scudi, 4 lire, 19 soldi, 3. denari furono la somma del capitale, col merito di scudi 300. a 5 per 100. in 3 anni 10 mesi, e giorni 20., si troverà, che cento scudi nel termine di mesi dieci, e giorni venti avranno di merito 4 scudi con $\frac{4}{9}$, e però la regola di proporzione, che si dovrà ordinare si proporrà in tal guisa. Se scudi $104\frac{4}{9}$ ritornano 100., ovvero se scudi 104., lire 3., 2. soldi, e 3 denari ritornano 100. scudi, quanti ritorneranno $362\frac{7}{15}$, ovvero scudi 362, lire 4, soldi 19, denari 3, e si trovano $347\frac{23}{60}$, ovvero 347 scudi, 2 lire, soldi 0, denari 3 sopra de' quali ripetuta l' operazione per lo sconto fatto sopra il precedente quesito, confronta il risultato con quello, che si cerca, e che si propose nel nominato secondo quesito.

Del Cambio.

VII. Il Cambio si può considerare in ordine a due fini, perchè, o si prende per lo stesso, che commutare una sorte di moneta in un altra, o si considera come una commutazione di moneta in un luogo, in altra d' altro luogo; quello si chiama cambio minuto, questo secondo si dice cambio reale. L' uno, e l' altro di questi cambi ha le sue regole, e tutte queste dipendono da proporzione. Presuppone il primo di questi cambi la notizia delle monete, pesi, e misure, che si hanno da commutare scambievolmente, perchè poi col partire, o col multiplicare si risolvano tutti i quesiti, che in questa materia si possono preparare.

Il secondo cambio si suppone, che sappia per quanto una moneta di un luogo si cambi con la moneta di un altro, e questa notizia si prende da quelle liste, che di settimana in settimana spedisce la fiera a' luoghi corrispondenti.

Ora è cosa facile il risolvere i cambj, perchè ciò si fa con una regola di proporzione. In questa pertanto si pone per primo termine proporzionale la moneta di quella piazza,

dalla quale parte il cambio. Poi per secondo proporzionale si prende la moneta corrispondente dell'altra piazza, dove il cambio si riceve. E il terzo proporzionale ha da essere la moneta, che corrisponde alla prima, che si rimette; ed il quarto proporzionale, che si troverà, mostrerà quel cambio, che si dovrà fare. L'uso delle piazze, che cambiano è, che una dà il fisso, e l'altra dà il danaro variabile. 1, e 100 sono le monete fisse, che danno, se ne danno più, o meno di 100, sono quelle piazze, che si dicono dare il vario, e sebbene ad ogni piazza è assegnato il prezzo, che si dee dare, o il variabile equivalente, tuttavia può succedere, che si dia qualche volta il variabile a quella, di cui il fisso era stato assegnato con proporzione. Ecco un esempio di cambio.

Se 100 scudi d'oro cambia Firenze con Bologna per bolognini 106, si dimanda per scudi d'oro 5733 quanti bolognini si averanno.

Regola di proporzione.

100. 106. 5733. 6076 $\frac{49}{50}$ *Bolognini*.

VIII. Perchè è di molta importanza il sapere ragguagliare i prezzi de' cambj, che le piazze di tanto in tanto variano a vicenda, come si rileva da quelle note, che ogni tre mesi manda la Fiera, si avverte ancora una tal cosa, che dipende da una regola di proporzione, che suole essere quella del tre, o la multiplice. Dovendosi dunque fare il ragguaglio colla prima, si osserverà, che la moneta, che dà prezzo variabile dee porsi in secondo luogo, la moneta, che rende l'equivalente si colloca in primo luogo, e nel terzo la moneta simile alla prima. Perchè meglio s'intenda una tal cosa, notisi, che non meno, che fra tre piazze si può instituire il ragguaglio di cambio. Per esempio cambia Firenze per Roma con Venezia, ecco le tre piazze. Firenze cambia, e dà per Roma scudi d'oro 100. di lire 7 $\frac{1}{2}$ per scudi stampe 74 $\frac{1}{10}$, e Roma dà a Venezia scudi stampe 54 per ducati di banco 100, questi sono i prezzi, de' quali lo stabile sono ducati 100, il variabile sono gli scudi d'oro 100, perchè Firenze con Venezia dà sempre prezzo variabile, il prezzo di Ro-

Roma è l' equivalente agli ſcudi d' oro, dunque la regola del tre avrà per primo termine proporzionale gli ſcudi ſtampe 74 $\frac{1}{10}$ per ſecondo gli ſcudi 100 d' oro a lire 7 $\frac{1}{2}$, e per terzo la moneta ſimile a quella, che è ſtata poſta nel primo luogo, cioè gli ſcudi ſtampe 54, e il quarto termine proporzionale, che ſi troverà ſcudi d' oro 72. 17. 6. ſarà la ſomma da pagarſi in Firenze per ducati 100. di banco, ſenza comprendere la provviſione.

Dovendoſi trovare il ragguaglio con una regola multiplice, ſi opera con eſſa nel modo, che s' inſegnò al ſuo luogo; e così, ſe l' operazione precedente ſi vuole riſolvere con queſta regola, biſogna dire: ducati di banco

100 di Venezia corriſpondono a ſcudi ſtampe ———— 54.
74 $\frac{1}{10}$ ſcudi ſtampe corriſpondono a ſcudi d'oro di Firenze 100.

Cento ducati di banco di Venezia, a quanti ſcudi d'oro di Firenze corriſponderanno? e fatta l'operazione con multiplicare fra loro i termini, che ſono nella prima colonna, poi gli altri, che ſono nella ſeconda, ſi ſaranno preparati il primo, ed il ſecondo termine proporzionale della nuova regola del tre, che ſi ha da fare, nella quale il terzo termine conterrà li 100 ducati, e finalmente ſi troverà il quarto 72 $\frac{648}{741}$, che è la ſomma degli ſcudi d'oro trovata nella prima operazione, ſenza comprendere la provviſione, la quale ſuole eſſere di $\frac{1}{3}$ per 100 per ogni tratta, o rimeſſa di denaro, che fanno, o di $\frac{2}{3}$ per 100, facendo tratta, e rimeſſa, perchè d' ordinario ſi dee aggiugnere, o levare al prezzo di rimeſſa o di tratta. Si aggiungono li $\frac{2}{3}$, ſe il prezzo trovato pel ragguaglio non è moneta di chi riceve l' ordine, ed eſeguiſce la commiſſione, ed è di rimeſſa, ſi leva, ſe è di tratta. Per lo contrario, ſe la moneta è di chi riceve la commiſſione, ed è di rimeſſa, cioè da rimetterſi, li $\frac{2}{3}$ ſi ſottrano, come ſi aggiungono, ſe è di tratta, cioè da ritirarſi, dovendoſi pertanto far queſto accreſcimento, o queſta diminuzione di provviſione da tutto il capitale, biſognerà trovarla a quanto aſcende, e ciò avverrà, ſe dovendoſi prendere $\frac{1}{3}$ per 100, ſi partiranno le figure della ſomma del denaro trovato in tal modo, cioè prima ſi partirà la figura delle centinaia per 3, e accompagnato l' avanzo, ſe vi è con i numeri ſeguenti, che appartengono alla ſomma degli ſcudi, queſto ſi partirà per 15,

dipoi l' avanzo si multiplicherà per 12, ed al risultato si aggiugneranno denari 3 per ogni 5 soldi, che sieno nella dimanda, e si partirà il prodotto per lo stesso 15, ed ecco, che i tre quozienti derivati da questa operazione, daranno la provvisione domandata. Si prenda dunque una tal provvisione da scudi stampe 908. 15. 4. si parte il 9 per 3, ed il quoziente è 3 senza avanzo. Le due rimanenti figure non si possono partire per 15, onde il secondo quoziente sarà zero, e avanzerà 8, che multiplicato per 12 sarà 96, a cui aggiunti 19 denari a motivo di soldi 15, che si trovano nella somma data, diventeranno 105, e si divideranno per 15, ed il quoziente sarà 7, sicchè la provvisione sarà di scudi 3, soldi zero, denari 7, la qual provvisione risulterà pure, se si dividerà la data somma 908. 15. 4. per 10, ed il risultato di nuovo si partirà per 10, e finalmente, se l'ultimo prodotto si dividerà per 3, diviso dunque il 908. 15. 4. per 10, il quoziente, che viene è 90. 17. 6. $\frac{2}{5}$, questo diviso anche esso per 10 lascia 9. 1. 9. $\frac{1}{25}$, e finalmente diviso un tal quoziente per 3, ci rende 3. 0. 7. $\frac{1}{75}$, che torna colla provvisione di sopra trovata, ed in cui si è lasciata la frazione.

Che se non $\frac{1}{3}$, ma due si hanno da prendere, si può operare secondo la precedente maniera, solo che l'ultima volta non si partirà per 3, ma per 5, e poi si raddoppierà il quoziente, ed in questo risultato si avrà la provvisione, che conviene, perchè si aggiunga, o si levi nel modo, che si è insegnato.

Della regola delle Tare, e Baratti.

IX. Questa è un altra di quelle regole, che si fondano sulla proporzione de' termini, su' quali con essa si opera. Si adopra, come apparisce dal titolo, in due congiunture, cioè quando si tratta di stabilire la somma di qualche tara, o il valore delle mercanzie, che si esitano con baratti. La tara è uno sbasso nel peso fatto della mercanzia venduta a un tanto per libbra, per cento, per migliaio, secondo la convenzione delle parti, che talvolta si accordano a due terzi di oncia per libbra, ovvero a 5, o a 6 per cento, e talvolta a libbre 46, o 73 per migliaio. Qualunque sia la convenzione, si trova colla regola del tre tutta la somma tarata, ordinandosi i termini in questo modo. Se 12 oncie, per stare nel-

nella prima tara, tornano 11 $\frac{1}{3}$, 6000 quante torneranno? ovvero se 100 libbre tornano 95, o se 1000 tornano 927, presa la tara di 73 libbre, quante torneranno libbre 800 nel primo caso, o 5699 nell' altro? e trovato il quarto numero proporzionale, in esso si vede la tara toccata a tutto il peso delle libbre date, e quella somma di denaro si ha da sborsare per la mercanzia contrattata.

La stessa regola di proporzione ha luogo ne' baratti i quali si fanno quando una mercanzia si commuta in un altra, o con dare tutta mercanzia, o con dare parte denaro, e parte roba; qualche volta però, ed ancora spesso si trova il ragguaglio de' baratti colla regola del tre multiplice, di cui però l' uso dee preferirsi, quando non si possa per via più breve ottenere l' intento. Se il baratto si fa tutto di roba con roba, il costume è di apprezzare la mercanzia ad un prezzo più alto per non dovere poi scapitare nell' esito, che si ha da fare a contanti; nell' apprezzare la propria roba, che si dee dare in baratto, è necessario avere la notizia del prezzo, che per la sua si è alzato dal mercante, con cui si è fatto il baratto, perchè per ragione d' esempio, se quello, che il mercante a contanti vendeva 100, in baratto lo valuta 150, di questo ricrescimento ancora chi ha da barattare con un tale mercante, dee ricrescere il prezzo della sua roba, che a contanti la vendeva 36; dunque per dargli un prezzo equivalente, dirà se il prezzo 100 sale a 150, il 36 a quanto dovrà salire? Si trova, che dovrà salire a 54, e però il mercante, che vendeva la sua roba in contanti per 36, in baratto la dovrà valutare 54.

Il secondo modo di barattare parte a contanti, e parte a roba, ha esso pure la sua regola per ragguagliare i prezzi con i quali si dovrà vendere la mercanzia, e questa consiste in partire il prezzo stabilito da quello, che riceve il baratto, per il contante, che si vuol pagare, per ragione d' esempio per $\frac{1}{3}$, se si vuol dare $\frac{1}{2}$ per $\frac{1}{5}$, per $\frac{1}{4}$, &c. questo quoziente poi si leva dal giusto prezzo, che si riceve in contanti per la sua roba dal mercante, che acconsente al baratto, e si leva dal prezzo inalzato, e si serbano i due avanzi, il minore per porlo primo proporzionale, il maggiore per porlo in secondo luogo, e nel terzo posto si dee porre il prezzo, con cui

in

in contanti vende chi fa il baratto la ſua mercanzia; poi operandoſi come nella regola del tre diretta, ſi troverà il quarto proporzionale, cioè quel prezzo, a cui dee ſalire il valore della roba, che ſi vuol dare da chi offeriſce il baratto. Sia il prezzo in contanti della roba, che vende A 80, il prezzo, che vale in contanti la roba di B ſia 42, vuol barattare B con A, offeriſce B $\frac{1}{4}$ in contanti, alza A il prezzo della ſua mercanzia fino ad 88, ſi dimanda a qual prezzo debba far ſalire B la ſua roba, perchè non ci perda nel baratto.

R. Si divida l'80 per $\frac{1}{4}$, il quoziente è 20, queſto ſi leva da 80, e da 88, reſteranno 60, 68, e ſi dica ſe 60 in contanti aſcendono a 68 in baratto, a quanti aſcenderanno 42? e ſi trova, che aſcenderanno a 47 $\frac{3}{5}$, ed a queſto prezzo B dovrà barattare la ſua mercanzia. La ragione è manifeſta, perchè B, che paga il quarto de' contanti di tutta la mercanzia, che compra, non reſta debitore, che di 60, quali dovrebbe pagare per ſaldare il ſuo conto fino a 80, dunque ſe queſti 60 gli vuol pagare con baratto, dovrà ſuperargli col ricreſcimento fatto dal mercante, cioè in ragione di 68.

Della regola di compagnia.

XI. La preſente regola riſguarda generalmente tutti quelli, che fanno inſieme una ſocietà per un determinato tempo, e che per fare un fondo mettono a proporzione della loro poſſibilità chi più, e chi meno per poi col tempo ſpartire e il guadagno, e la perdita, quando la ſocietà ſarà ſpirata, o a ragione del capitale di ciaſcheduno, o a ragione del capitale, e del tempo inſieme, ſe non ſi ſono uniti tutti d'un tempo a fare queſta ſocietà, o ſivvero, ſe qualcheduno di loro ſi vuol ritirare prima, che giunga al ſuo termine il tempo preſcritto, ed ecco di dove naſce, che queſta regola porta due nomi. Se nello ſparto del guadagno, o della perdita ſi ha da avere riguardo ſolo al capitale, ſi chiama regola di compagnia ſemplice, ſe poi, oltre al capitale, ſi dee pure avere riguardo al tempo, ſi chiama regola di compagnia a tempo. L'una, e l'altra dipende dalla regola di proporzione, cioè dalla regola del tre, la quale nella compagnia ſemplice ſi ripete tante volte, quanti ſono gli aſſociati, col me-

metodo, che quì segue. In primo luogo si pone la somma di tutto il denaro, che risulta dallo sborso particolare di tutti quelli, che sono entrati nella compagnia; in secondo luogo il guadagno comune, o la perdita; in terzo luogo lo sborso di ciascheduno in particolare, e questo è quello, che variato, secondo le diverse quantità, che diverse persone hanno somministrato, mostra quanto di guadagno abbia da toccare ad ognuno degli associati, e a quanto di perdita hanno tutti da soggiacere. Se ne' capitali sborsati vi fossero de' soldi, e de' danari, e se tali spezzature si trovassero, oppure nel guadagno fatto, o nella perdita, prima di ordinare le regole di proporzione, si dovrebbero ridurre tutte le somme a danari, e poi si opererebbe come si è stabilito, siccome se nell' operare la regola del tre si trovasse, che il quoziente della divisione avesse qualche frazione, questa non si ha da trascurare, ma si dee registrare insieme col proprio quoziente, che poi servirà per la riprova della operazione, che consisterà in sommare insieme tutti i guadagni, e le perdite spartite per ciascheduna persona, la qual somma dee corrispondere all'intero guadagno, e all' intera perdita, colla quale si è operato.

Una regola del tre si pone in uso ancora, quando la compagnia è a tempo, e solo si hanno da preparare i suoi termini in una maniera differente dalla passata. La somma dunque, che ciascuno degli associati ha posta in società, si dee multiplicare pel tempo, in cui ha voluto ognun di loro perseverare in essa, se per due anni, si dee multiplicare per due, se per quattro, per quattro, e così degli altri, e da i risultati da questa operazione sommati insieme, si cava il primo proporzionale, si pone poi per secondo proporzionale il guadagno, o la perdita fatta, e così si seguita questa regola, come è stata ordinata la precedente.

Può talvolta la società a tempo instituirsi con questa condizione, che abbia da durare per 25 anni, nel qual tempo si può volere negoziare una somma messa insieme in questo modo, cioè, che il primo degli associati sborsi 27650. scudi, il secondo 14800., il terzo 8000., il traffico di una tal somma di denaro guadagna 23000. scudi. In questo tempo viene un urgenza al primo di ritirarne parte del suo sborso, ed in fatti dopo 12. anni si fa rendere 15000. scudi, per lo

lo contrario il secondo degli associati, passati 10. anni accresce il suo capitale pel traffico di altri 6000. scudi, e per ultimo il terzo anche esso, passati 6. anni, ripiglia 3500. scudi dalla sua somma. Se si volesse sapere in questo stato di cose quanto dovrebbe riportare ciascheduno di guadagno a ragione dello sborso, e del tempo, servirebbe operare così. La somma del denaro somministrata dal primo associato, cioè li 27650. scudi, si dovrebbero multiplicare per 12., e nascerebbe il risultato 331800., e perchè dopo i 12 anni ritira una parte dello sborso, che ha fatto, cioè 15000. scudi, ne seguirà, che per i 13. anni seguenti, non resterà nel suo capitale, se non che la somma di 12650. scudi, la quale multiplicata per tredici, produrrà 164450. che è un composto di tempo, e capitale, ed unita questa somma all' altra 331800. si averà questo composto 496250. per il primo.

Perchè il secondo ha sborsato 14800. scudi, e nel termine di 10. anni ne aggiugne 6000. si multiplicheranno gli 14800. per 10. ed il risultato 148000. si serba: indi si aggiungono li 6000. scudi alla prima somma di scudi 14800. e diventeranno 20800. scudi per gli 15. anni, che rimangono alla società, che per tanto multiplicata questa ultima somma per 15. rileverà 312000. composto di tempo, e capitale, da aggiugnersi all' altro composto serbato 148000., acciocchè dal risultato 460000. comparisca la somma del secondo degli associati.

Finalmente si multiplicherà lo sborso di 8000. scudi, che fa il terzo per 6., e verrà il composto 48000., perchè di 8000. scudi, che ha pagati dopo 6. anni, ne ritira 3500. per gli 19. anni, che rimangono lascerà un capitale di soli scudi 4500., multiplicandosi dunque questi 4500. per 19. tornerà il prodotto 85500., che unito all' altro 48000. produrrà la somma 133500., che è la somma, che corrisponde al terzo associato.

Compite queste operazioni, si ordinerà la regola del tre, nella quale il primo termine proporzionale lo somministrerà l' unione delle tre somme trovate colle tre precedenti operazioni, che si rileva 108975. Il secondo proporzionale sarà il guadagno fatto di scudi 23000. Il terzo sarà uno per volta ciascuna delle tre precedenti somme, composte di tempo, e

ca-

capitale di ognuno degli associati, cioè nella prima regola saranno 496250. scudi, nella seconda 460000., e nella terza 133500., ed in questa guisa si troverà la rata del guadagno, che dovrà darsi ad ognuno degli associati.

Operazione I.

1089750 . 23000 . 496250 . R. scudi 10473 $\frac{3193}{4359}$

Operazione II.

1089750 . 23000 . 460000 . R. scudi 9708 $\frac{2828}{4359}$

Operazione III.

1089750 . 23000 . 133500 . R. scudi 2817 $\frac{2697}{4359}$

Della regola d'allegazione.

§. III.

XII. Il nome, che porta questa regola esprime abbastanza a quale uso ella serva. Diverse qualità di persone hanno bisogno di apprenderla per la necessità, che hanno di praticarla nell' unire insieme o solidi, o fluidi di differente valore per trovare de' misti, che risultano, un sol prezzo, o la quantità di quelle parti, che essi hanno da prendere da diverse sostanze per farne risultare da tutte insieme una sola, che sia differente da tutte. Gli argentieri, gli orefici, e fonditori, e molti altri di essa si servono ne' lavori, che giornalmente hanno per le mani, e contribuisce assaissimo a praticarla con perfezione la perizia, che essi hanno dell' intrinseco pregio de' metalli, che pongono in opera in que' lavori, che sono di loro inspezione; in pochi precetti faremo vedere, come questa regola si adopri, e fino a qual termine ci conduca l' essere noi bene informati delle regole di proporzione, che hanno il principal luogo, ancora quando si tratta di unire insieme diversi metalli, per farne risultare uno di quella lega, e di quella perfezione, che noi vogliamo.

Possono queste leghe volersi fare in diverse maniere, e sebbene colla regola del tre si risolvono tutte, nientedimeno prima di operare con essa si richiede qualche preparazione, che è diversa, secondo la diversità di quei casi ne' quali si dee operare.

1. Il primo caso propone, come si ha da operare, se con diverse leghe di argento, e di differenti prezzi se ne voglia fare una di tante marche per esempio 80., e che vaglia un prezzo, che non lo vale nessuna di quelle, perchè o vagliano più, o vagliano meno.

2. Il secondo caso risolve la maniera di trovare quella quantità di oro, e di argento, che compone una sola massa di libbre 50. dall'avere osservato, che posta dentro dell' acqua ne ha fatto travasare un peso di 30. libbre, dopo che si era già osservato, che 50. libbre d'oro poste dentro dell' acqua, ne facevano uscire 33. libbre, e 50. libbre d'argento ne facevano uscire 27.

3. Il terzo caso finalmente si ha in due metalli, che sotto il medesimo volume pesano uno 120. libbre, e l'altro 56., e si cerca quanto se ne abbia da prendere per formare un terzo corpo, che sotto lo stesso volume pesi 100. libbre. Questi sono li tre casi, che noi scegliamo, perchè ci servano di esempio per poi operare negli altri, secondo le occorrenze.

Regole per risolvere il primo caso.

XIII. Le diverse leghe, che si suppongono nel primo caso indicate con i loro prezzi, si dispongono a due a due in tal modo, che una sia la inferiore nel prezzo a quella, che si ha da preparare, e la seconda sia superiore, si nota quanto ha di meno l'inferiore per arrivare a quella, che si vuol fare, e quanto ha di più la maggiore, e queste differenze trovate si scrivono con quest'ordine. Prima si scrive la lega inferiore, e appresso ad essa nel medesimo rigo si pone la differenza della maggiore, poi in un altro rigo sotto la lega minore si scrive la maggiore, e appresso si aggiugne la differenza della minore, e con questo metodo medesimo a due a due si accomodano i prezzi delle altre leghe, quante sono rimaste per la nostra operazione, e si trovano le altre differenze.

2. Tut-

2. Tutte le differenze trovate sono quelle, che in secondo luogo si hanno da rilevare in una sola somma per intendere, che se si volesse fare un lavoro di tante marche (la marca in Firenze è di 8. once, ciascuna delle quali risulta da' 24. danari, come ogni danaro nasce da 24. grani, similmente un grano numera 24 scrupoli, 3. scrupoli fanno una dramma, e 8. dramme fanno l'oncia, e di queste 8. fanno una marca) quante nella somma di queste differenze si rilevano, bisognerebbe di ciascheduna delle distribuite leghe prendere quelle marche, che manifesterebbero i numeri delle differenze loro posti appresso.

Ma perchè le marche richieste sono 80. però si dovranno in terzo luogo ordinare tante regole del tre, quante saranno le date leghe, ed in queste regole sempre il primo numero proporzionale sarà il risultato dalla somma delle differenze; il secondo sarà di mano in mano una delle differenze trovate; il terzo sarà inmutabilmente l' 80., e con tali termini si troverà in ciascheduna operazione il quarto termine proporzionale, che mostrerà quante marche si dovranno levare da ogni lega data per fare quella, che importi lo stabilito prezzo nel lavoro di 80. marche, le quali compariranno dalla somma di tutti i quarti termini proporzionali, che si saranno trovati.

Il presente caso può darsi con un numero pari di leghe, che hanno un prezzo, e maggiore, e minore del richiesto, e ciò si è supposto nell'assegnare le regole per risolverlo, cioè, che le leghe, che l' argentiere aveva, fossero o quattro, o sei, due delle quali, o tre di un prezzo maggiore del dimandato, e che le rimanenti fossero apprezzate con un prezzo minore. Che se dunque fosse dispari il numero delle leghe, l'operazione in questo solo si differenzierebbe dalla precedente, che risguarda il determinare quale si abbia da scegliere delle leghe date per accoppiarla con quella, che è rimasta; per la qual cosa si dice, che la lega rimasta nel prezzo o supera il prezzo dimandato, o gli è inferiore, se lo supera, si ha da unire col minimo di tutti, nel contrario si ha da unire col massimo, se è minore; ciò adempiuto, in tutto il resto l'operazione si fa, come la precedente. Eccone i due Esempj.

Esempio I.

Sono quattro leghe di 13. 18. 30. 35. lire per ogni marche. Si ha da fare un lavoro di 80. marche a lire 26. la marca.

					Regole di Proporz.			
I. L.	13.	4.	differ.	34.	4.	80.	$9\frac{14}{34}$
II. L.	30.	13.		34.	13.	80.	$30\frac{20}{34}$
III. L.	18.	9.	differ.	34.	9.	80.	$21\frac{6}{34}$
IV. L.	35.	8.		34.	8.	80.	$18\frac{28}{34}$
Som. delle dif. 34.						Somma 80.	

Esempio II.

Sono cinque leghe di 13. 18. 20. 30. 35. lire per ogni marche, il lavoro, si ha da fare di 80. marche a lire 26. la marca.

					Regole di Proporz.		
I. L.	13.	4.	differ.	49.	4.	80.	$6\frac{26}{49}$
II. L.	30.	13.		49.	13.	80.	$21\frac{11}{49}$
III. L.	18.	9.	differ.	49.	9.	80.	$14\frac{34}{49}$
IV. L.	35.	8.		49.	8.	80.	$13\frac{3}{49}$
V. L.	20.	9.	differ.	49.	9.	80.	$14\frac{34}{49}$
VI. L.	35.	6.		49.	6.	80.	$9\frac{39}{49}$
Somma delle diff. 49.						Somma 80.	

Regole per risolvere il secondo caso.

XIV. Chi ha da risolvere il secondo caso bisogna supporlo informato di quell'insegnamento, che danno i Matematici intorno alla quantità del fluido, che esce dal vaso, che ne è pieno fino a non poterne ricevere una sola stilla, allorchè dentro di esso si pongono due corpi un dopo l'altro, le quali quantità già tutti concordemente confessano, che corrispondono alla differenza de' volumi di essi corpi. E' pure altresì cosa buona, che sappia, che il peso dell'acqua, che scola al di fuori è tanto, quanto è quello, che perde il corpo, allorchè si pone dentro l'acqua, per la qual cosa, se 27, 30, e 35 libbre sono quelle dell'acqua, che esce, per egual numero i corpi, che sono posti entro l'acqua gli considereremo come scemati del loro peso. Con queste riflessioni dunque, che si sono

sono fatte per vedere la soluzione del caso, si viene a stabilire la presente regola, la quale si riduce a questa di voler trovare un composto di oro, e di argento, che posto dentro dell'acqua perda 30 parti del suo peso, quando l'argento solo ne perderà 27, e l'oro 35, e vuole determinare quante libbre d'argento si hanno da prendere per fare questo composto, e quante d'oro.

In questa regola si opera, come nella passata. Due sono le materie, argento, e oro, perde il primo 27, il secondo 35, ora si vuole, che non si perda nè 27, nè 35, ma 30. Dunque si porrà nel primo rigo 27, ed appresso si porrà il 5, che è la differenza del peso maggiore per arrivare al 30, poi nel secondo rigo si porrà 35, ed appresso si porrà il 3. che e l'altra differenza del peso minore, e sommate queste due differenze, risulterà 8, il qual numero esprimerà, che per fare una allegazione, che pesi 8 libbre, è necessario prenderne 5 d'argento, e 3 di oro, ed in questo composto si farà fatto quel corpo, che posto dentro dell'acqua perderà sole 30 libbre.

Operazione.

27.	5.	) diff.
35.	3.	)
Som. di dif.	8.	

Regole del tre.

8.	5.	50.	41. $\frac{2}{8}$
8.	3.	50.	18. $\frac{6}{8}$
	Somma 50.		

Si ponga adesso nelle regole del tre, e nel luogo del terzo proporzionale il 50, che è il peso sì dell'oro, che dell'argento, e fatta l'operazione, come dianzi, risulterà la prima volta 31 $\frac{1}{4}$, e la seconda 18 $\frac{3}{4}$, questi due termini si sommino insieme, e si vedrà per l'appunto il 40, che ha da tornare, e nel tempo stesso si saranno trovate quelle parti d'oro, e d'argento, che si dovranno unire insieme, perchè resti fatto quel corpo, che posto nell'acqua ha da perdere il solo peso di 30 libbre. Su questo fondamento fabbricò il grande Archimede la risposta, che diede a Hierone, e con questo artificio, quanto giovò a se stesso, tanto pregiudicò all'artefice sfortunato, che non lavorò fedelmente la corona, che doveva aver fatta al Re tutta d'oro, mentre, levata parte di esso, vi mescolò altrettanto d'argento, che potesse servire ad uguagliare il peso dato dell'oro.

Re-

Regola per risolvere il terzo caso.

XV. La regola da praticarsi pel terzo caso, si può dire, che sia la stessa, che l'una, e l'altra delle due precedenti, e però le 120 libbre del primo metallo, e le 56 del secondo, che si suppongono appartenere a due corpi di eguale estensione, e che in parte si vogliono trasferire in un terzo, che abbia la stessa estensione de' due primi, si dovranno distribuire nella maniera ordinaria. Solo per riguardo alla estensione, bisognerà per bene operare, stabilire le parti, nelle quali la comune estensione dee essere divisa; per la qual cosa, se l'estensione dovesse essere un braccio quadrato, o un braccio cubo, &c. si dovrebbero mettere in vista quanti soldi compongono il braccio quadrato, e quanti fanno il braccio cubo; cioè li soldi 400 per la prima misura, e li soldi 8000 per la seconda, per poter poi di essa servirsene nella buona esecuzione di questa regola.

Dispongansi dunque i due differenti pesi nella maniera ordinaria. Sopra la prima linea si pongano le libbre 120, e appresso si trovi la differenza fra il peso minore, cioè 56, e quello, che si dee trovare, cioè 100, che è il 44. Poi nel secondo verso si ponga il peso minore, che contiene le libbre 56, ed appresso si aggiunga l'eccesso del peso maggiore sopra lo stesso 100, che è 25; le due differenze si sommino, e nel risultato 64 si conosce, che per fare una allegazione di 64 libbre, sono necessarie 44 libbre del primo metallo, e 20 del secondo. Quindi si dica, se su 64 ve ne vogliano 44 del primo metallo, quante ce ne vorranno su 100? e trovato quel, che ci vuole, si ripeta un altra regola di proporzione, che per primo termine abbia lo stesso 64, per secondo il 20, per terzo lo stesso 100, che in questo modo si troverà l'altra quantità del secondo metallo, che uniremo alla prima trovata per far risultare quel corpo, che ha da avere quel peso richiesto di 100 libbre.

Operazione.

I. Metallo libb. 120. 44.)	*I. Reg. di prop.*
peso dato 100.) *diff.*	64. 44. 100. 68 $\frac{3}{4}$
II. Metallo libb 56. 20.)	*II. Reg. di Prop.*
Somma delle diff. 64.	64. 20. 100. 31 $\frac{1}{4}$
	Somma 100.

Da

Da questa operazione dunque si rileva, che il corpo composto dee avere libbre $68\frac{3}{4}$, di quelle delle quali il primo metallo ne contava 120, e libbre $31\frac{1}{4}$ delle 56. del secondo. Resta ora, che si provi, che questo preparato misto nella sua estensione conviene ancora con quelle degli altri due dati metalli, cioè, che non ha maggiore estensione di un braccio cubico.

Se questo è vero, perchè un braccio cubico contiene 8000 soldi, questa stessa misura dovrà trovarsi nel nuovo misto.

E per rilevare una tal cosa col mezzo di qualche operazione, la stessa regola del tre può essere molto a proposito con ripeterla in questo caso due volte. I termini della prima sono il 120, che è il peso del primo metallo, l'8000, che è il numero de' soldi cubici, che esso contiene il $68\frac{3}{4}$, che è la quantità del primo metallo, che dee adoperarsi nella allegazione, e con questi tre termini si troverebbe il quarto $4583\frac{1}{3}$. Per ordinare la seconda regola, il primo termine dee essere il peso dato dell'altro metallo, che sono 56 libbre, il secondo rimane lo stesso numero 8000, per avere i due metalli dati la stessa misura, ed in terzo luogo si pone il $31\frac{1}{4}$, cioè la misura di quelle libbre, che si hanno da prendere dal secondo metallo, e fatta l'operazione, risulterà per quarto proporzionale $4464\frac{2}{7}$. Ora che le due regole del tre sono fatte, si sommano insieme i due termini ritrovati, ma che? questa somma non altrimenti rileva 8000, ma un numero assai maggiore, cioè $9047\frac{13}{21}$, dovrà dunque dirsi, che l'operazione sia mal fatta, e che non altrimenti dalle quantità de i due metalli si abbiano da prendere le descritte somme? Non si dee dir questo, ma se la cosa attentamente si esamini, la regola è bene stabilita, e l'operazione è ben fatta, attesochè quella differenza di parti, che sopra le 8000 si trovano, non rende l'estensione del corpo, che si è formato col peso di 100 libbre più esteso degli altri due, ma sibbene la maggior gravità del primo metallo colla sua pressione tiene più coerenti, o più unite le parti del secondo, e fa sì, che queste non abbiano da occupare spazio maggiore di quello, che è occupato dalle $51\frac{1}{4}$, che rimangono al primo metallo, toltene le $68\frac{3}{4}$, ma lo spazio, che le $51\frac{1}{4}$ occupano, comprende $3416\frac{2}{3}$ di quelle parti, delle quali le libbre 120 ne contentcn-

tengono 8000, come apparisce, se se ne voglia fare una terza regola del tre con questi tre numeri 120, 8000, 51 $\frac{1}{4}$, dunque le libbre 31 $\frac{1}{4}$ prese dal secondo metallo, si estenderanno solo per tanto spazio, ed in questa guisa il misto preparato si dirà non eccedere nella sua estensione la misura di un braccio cubo, che si è assegnata e per esso, e per gli altri due metalli dati per farsene una determinata allegazione.

Della regola di falsa posizione.

§. IV.

XVI. Di questa regola comunemente noi ci serviamo, quando vogliamo trovare un numero, che abbia le condizioni, che sono state richieste, e che non è sì facile scuoprirle tutte in qualunque incontro di numero. Si abbia da trovare per esempio un numero, di cui la metà, la quarta parte, e la quinta contenga il 60, certamente quale abbia da essere questo numero, si può scuoprire, ma non senza qualche pratica, che opportunamente ci è somministrata da questa regola. Porta essa il nome di falsa posizione, ovvero ipotesi falsa, perchè con un numero, che non è quello, che si vuole, si scuopre l'altro, che si dimanda, e però, se nel caso proposto si supponesse, che il 20 fosse quel numero, di cui la metà, la quarta, e la quinta parte sommate insieme rilevassero il 60, si supporrebbe il falso, perchè non altrimenti dalla somma di queste parti risulta il 60, ma il 19; nientedimeno con questo falso supposto numero si troverebbe il 63 $\frac{3}{19}$, che è il vero, mentre la sua metà, cioè 31 $\frac{11}{19}$, il quarto 15 $\frac{15}{19}$, ed il quinto 12 $\frac{12}{19}$, raccolte insieme compongono 60.

In due modi si pratica questa regola: se si fa una sola falsa ipotesi, questa comprende il primo, se se ne propongono due, risulterà il secondo modo di praticarla. Li quesiti, che si risolvono colla prima maniera si dicono sciolti colla regola di *semplice*, ovvero di *una falsa posizione*. Gli altri, che si risolvono nella seconda maniera, si dicono sciolti colla regola di *due false posizioni*. La necessità di stabilire queste due regole è derivata dalla natura di certi quesiti, che oltre le parti proporzionali, esigono numeri di più, o di meno, ovvero estrazione di radici razionali, o irrazionali. Noi tratteremo

remo di tutte due, applicandole a' proprj casi, e solo tanto quanto ci può servire per mostrarci anche nell' esercizio di questa regola la pendenza, che ella ha dalle regole di proporzione.

Della regola di una falsa posizione.

XVII. Sopra diversi oggetti può cadere questa regola, come sarebbe, se si volesse sapere la somma delle porzioni di un capitale stabilito, essendo note le proporzioni delli sborsi fatti, o sivvero, se occorresse conoscere la quantità di questi stessi sborsi, e di più le proporzioni de' loro frutti, essendo noto tanto il capitale, che i frutti, come anco per trovare un qualche numero, che dovesse nascere da diverse operazioni, intraprese sopra di un altro, e per sapere varie altre cose appartenenti a sì fatte materie. Quindi è, che un qualche esempio, che si proponga su tali cose, la buona condotta, per riuscire nella scoperta, che si determina di voler fare, può servire di norma alle altre molte, che siamo obbligati a tralasciare per non essere di nostra inspezione il diffondersi troppo a lungo su tali materie.

1. Noi abbiamo un capitale di 589 scudi, che risulta da tre differenti sborsi, o pagamenti, che sono stati fatti, con questa proporzione, cioè, che il primo è concorso per $\frac{1}{3}$, il secondo per $\frac{2}{5}$, il terzo per $\frac{3}{8}$, occorre per tanto fissare il preciso, che sarà stato dato da ognuno per stabilire la data somma di 589. scudi.

2. Il guadagno, che è stato ritratto dal traffico di 35698 scudi ascende a 27900 scudi, il capitale, che si mise a frutto, si preparò dagli interessati colla proporzione della precedente dimanda. Si vuole determinare quanto sia stato posto da ognun di loro, e quanto frutto abbia da ritirare.

3. Occorre di dover preparare un numero, di cui la metà, la quarta, e la quinta parte faccia 60., si cerca in questo terzo luogo, come si abbia da operare per riuscire in questa ricerca.

Per rispondere alla prima dimanda, è necessario prima trovare un numero, che si possa dividere in tutte quelle parti, che essa contiene, cioè per $\frac{2}{3}$, per $\frac{2}{5}$, per $\frac{3}{8}$. Se non è subito in pronto tal numero, si ha da preparare con multiplicare i denominatori delle date frazioni uno per l'altro, e siamo sicuri, che il risultato è quel numero, a cui convengono tutte

 le

le parti richieste; multiplicandosi dunque 3 per 5, risulta 15, il quale multiplicato per 8, produce 120, che è quel numero, da cui si può levare la terza, la quinta, e l'ottava parte.

Trovato in tal modo il numero, si dee secondariamente dividere qualunque delle parti dimandate, e tutti i quozienti si hanno da prendere in una somma, la quale somministrerà il primo termine di una regola del tre, che si dee ordinare. Si ordinerà dunque in terzo luogo questa regola, con dare ad essa per primo termine il numero ora preparato, per il secondo si prende quel numero, che è stato diviso, ed il terzo ha da essere il 589, che è quel numero, che contiene la somma del capitale supposto nella prima dimanda, quindi trovato il quarto termine proporzionale, che è 298 $\frac{54}{79}$, questo quarto numero proporzionale si divide prima per 3, poi per 5, finalmente per 15, ed i tre quozienti, cioè 298 $\frac{18}{79}$, 178 $\frac{74}{79}$, 111 $\frac{66}{79}$ Sono que' numeri, ne' quali resta sciolta la dimanda, e trovata la quantità del denaro, che ha da pagare chi è concorso nel capitale per $\frac{1}{3}$, per $\frac{1}{5}$, e per $\frac{1}{8}$. La ragione di questa regola è, perchè avendo il 120 numero, che si è supposto nella soluzione della dimanda le sue parti aliquote proporzionali a quelle, che si cercano sopra il numero dato, dovrà il supposto numero avere ragione a ciascheduna di quelle, o a tutte prese insieme, come il dato numero ha ragione alle sue corrispondenti; che però, se la regola del tre ci mette in vista quali sono queste parti, e la loro somma nel quarto termine proporzionale, che ella ci scuopre, non si ha da fare altro, se non che dire: se il 79, che è la somma delle parti aliquote viene da 120., il 589., che è la somma delle parti aliquote corrispondenti nel numero dato, da qual verrà? e si vede, che viene dal numero 298 $\frac{54}{79}$, come già abbiamo osservato.

La seconda dimanda, comecchè risguarda due cose, si risolve con due operazioni simili alla precedente, e che non hanno altra differenza fuori che nel terzo termine proporzionale, che non è lo stesso in tutte due le regole del tre, che si pongono in uso per ritrovare ciò, che si cerca. Per tanto essendo le parti proporzionali le stesse, che le supposte nella prima dimanda; li due numeri, cioè 79, 120 in quella stabiliti per primo, e secondo proporzionale, avranno lo stesso luogo anche in questa; il terzo poi sarà la somma del capi-

capitale nella prima regola del tre, cioè 35698, e nella seconda il guadagno seguito 27900, e con queste preparazioni si troverà la prima volta 54224 $\frac{[illegible]}{79}$, e la seconda risulterà 42379 $\frac{59}{79}$, le quali somme divise per 3, per 4, e per 8, daranno 18074 $\frac{77}{79}$, 10844 $\frac{76}{79}$, 6778 $\frac{8}{79}$ per le porzioni del denaro, che ognuno dei tre obbligati dovrà porre per fare il capitale, e queste altre tre somme 14126 $\frac{46}{79}$, 8475 $\frac{75}{79}$, 5297 $\frac{17}{79}$ mostreranno quanto a ciascheduno toccherà per sua parte dell' acquistato frutto.

La risposta alla terza dimanda mette in vista un numero, che contiene tutte le parti richieste, quale è il 20, da cui si leva il 10, che è la metà, il 5, che è la quarta parte, ed il 4, che è la quinta: somma poi queste parti, e dice se il 19 viene da 20, da chi ha da venire il 60, e si trova, che viene da 63 $\frac{3}{19}$, perchè la metà, la quarta, e la quinta parte di questo numero sommate insieme, lo produrranno, che è la regola universale per conoscere, se l' operazione è ben fatta, perchè la somma delle parti trovate, se si è bene operato, hanno sempre da essere uguali al numero dimandato. La metà del 63 $\frac{3}{19}$ è 31 $\frac{11}{19}$, la quarta parte è 15 $\frac{15}{19}$, e la quinta parte sono 12 $\frac{12}{19}$, e perchè tutte queste parti trovate producono 60, però si dice, che si è bene operato. Se si volesse, che il numero da trovarsi avesse oltre il terzo il settimo, il decimo di un altro numero, anche 6 unità di più, prenderei il 210 da esso levate le parti proporzionali 70, 30, 21, la loro somma 121 la leverei da 210, e resterebbe 89, poi direi, se 89 è l' eccesso del 210 sopra le parti aliquote, il 6 di qual numero sarà l' eccesso, e fatta la regola del tre, troverei, che 14 $\frac{14}{89}$ è quel numero, il quale sopra le parti proporzionali ha di più 6 unità, come si vede, perchè il terzo di questo numero è 4 $\frac{64}{89}$, il settimo è 2 $\frac{2}{89}$, il decimo è 1 $\frac{37}{89}$, raccolte queste parti in una somma sola, questa viene 8 $\frac{14}{89}$, che paragonata al numero trovato 14 $\frac{14}{89}$, si vede, che un tal numero ha 6 unità di più delle parti proporzionali dimandate.

Della regola di due false posizioni.

XVIII. Già, come abbiamo avvertito, dove nel quesito, oltre le parti proporzionali, vi sono altre parti di più, o di meno, la soluzione sua d'ordinario si fa colla regola di due false posizioni; ecco dunque come con essa si opera, quando

lo porta il bisogno, che veramente non è sempre tale, ma però frequente anch'esso, perchè meglio si accomoda a molti casi, che poi realmente non appartengono alla semplice falsa posizione. Per risolvere la questione con questa regola, è d'uopo supporre primieramente un numero ad arbitrio, come se questo fosse il vero, e capace di risolvere la dimanda in tutte le sue circostanze, che se questo numero non si riscontra, che sia il vero, ciò sarà per essersi errato o nel più, o nel meno, e questo errore si ha da notare appresso al numero dato con questo segno † se si è errato nel più, o con quest'altro — se si è errato nel meno. Scoperto così il primo errore, si prende un altro numero, sopra del quale operandosi, come sul primo, l'operazione, o lo scuoprirà per vero numero, o per falso, ed ancora in questo caso l'errore si noterà colli stessi segni, e nella maniera precedente. Quindi è, che accadendo tali errori, o si sarà tutte due le volte errato nel più, o nel meno, o una volta sarà stato l'errore nel più, e l'altra nel meno, per la qual cosa questa regola in diverse maniere procederà nello scuoprimento di quello, che si cerca a tenore de i differenti errori, che saranno occorsi nelle ipotesi false, colle quali si è stabilito il principio della operazione.

Si sia dunque tutte due le volte errato nel meno, ovvero nel più, si dovrà in questo caso procedere nella seguente maniera. Il primo numero della falsa posizione si dovrà multiplicare colla differenza del secondo, e così il secondo numero supposto si multiplicherà per la differenza del primo; dipoi il risultato minore si leverà dal maggiore, siccome si sottrarrà dalla maggiore la differenza minore, ed in questi due avanzi si avranno due numeri, che si divideranno uno per l'altro, ed il quoziente sarà il vero numero, che si desidera sapere.

Si supponga ora, che l'errore sia una volta nel meno, e la seconda nel più. Si dovranno multiplicare, come per l'avanti i quattro termini preparati, in croce, ed i loro risultati si sommeranno, siccome pure si sommeranno tutte le due differenze trovate, e questa ultima somma darà il partitore alla prima, ed il quoziente, che risulterà, sarà il vero numero ritrovato con questa operazione. La bontà di queste due operazioni è fondata su quel principio, che altrove si stabi-

ſtabilì, cioè, che il numero partitore di un altro ſtà all' unità, come quel numero, che è partito ſtà al ſuo quoziente, ma l'unità non multiplica, come inſegna Euclide nella 19. del VII. dunque ſervirà trovare col partitore il quoziente, che in eſſo ſi ſarà trovato il numero di quella proporzione, che ſi vuole trovare capace a ſciorre il dato queſito. Ecco l' eſempio, che io propongo per l'intelligenza della regola.

Sono ſtati dati 5675. ſcudi per far correre in quattro piazze. Correrà nella prima il doppio di quella ſomma, che ſi farà correre nella ſeconda, e un quarto meno di queſta ſi ſpenderà nella terza, e due terzi meno della precedente ſomma correranno nella quarta, ſi dimanda quanto denaro ſi dovrà far girare per ciaſcuna piazza.

Io ſuppongo, che nella prima piazza ſi abbiano da far correre 80. ſcudi, il denaro, che ſi porterà nelle tre altre ſarà in queſte ſomme 40, 30, 10, ma tutte queſte ſomme raccolte in una ſola, non fanno 5675, che è la ſomma data, ma ſolo 160; dunque nel ſuppoſto numero l'errore è nel meno, e però ſi eſprimerà in tal modo 80. —— 5515.

Suppongo ora, che nella prima piazza poſſano correre 112. ſcudi, ne ſegue per la proporzione fiſſata, che 56. ſcudi correranno nella ſeconda, 42, e 14. Si ſpediranno nelle due altre, ma ancora in queſte quattro ſomme non ſi vede la ſomma, che ſi ha da ſpendere, ma una ſomma minore della giuſta, mentre mancano 5451. ſcudi, dunque l' errore, che ſi troverà in queſto ſecondo ſuppoſto ſarà eſſo pure nel meno, e però col ſegno ſteſſo con cui fu ſcritta la precedente, ora ſi ſcriverà la differenza preſente, e ſarà 112 — 5451, alla quale porremo ſotto la prima, come quì ſegue 80 — 5515 per potere queſti quattro termini preparati multiplicarli in croce.

Multiplicandoſi il 5451 per l'80, riſulta 436080, multiplicandoſi il 5515 per 112, riſulta 617680, da queſto riſultato ſe li leva il primo, reſta 181600; ſiccome, ſe dalla differenza maggiore 5515 ſi leva la minore 5451, reſta 64, ora ſi ha da partire il primo avanzo per il ſecondo, e ſi trova per quoziente $2837\frac{1}{2}$, che è il vero numero de' denari, che ſi hanno da far correre nella prima piazza, e ſe di queſta ſomma ſi prenderà la metà, cioè $1418\frac{3}{4}$, queſti denari ſi dove-

veranno ſpendere nella ſeconda, ſiccome 1064 $\frac{1}{16}$, che è una ſomma, che è meno $\frac{1}{4}$ della precedente, s' impiegherà nella terza, e per ultimo ſi avranno ſcudi 354 $\frac{4}{16}$, che è una ſomma, che ha due terzi meno della precedente, perchè s' impieghino nella piazza, che è rimaſta, come appariſce dalla unione di tutte le ſomme, che giuſtamente rilevano la data ſomma di 5675. ſcudi.

XIX. Il ſecondo eſempio, che ora ſi aggiugne, parte contiene la dottrina quì ſopra inſegnata per il modo di operare, quando gli errori ſono uno del più, e l' altro del meno, e parte ancora propone un caſo, in cui cade l' eſtrazione di radice razionale, perchè ſi noti, come ſi abbia da operare in ſimili congiunture. Si vogliono pertanto trovare due numeri, che ſtieno fra loro in ragione ſeſquialtera, e che multiplicati fra loro producano 384. Preparo ſubito la prima ſuppoſizione, che conſiſte in dare due numeri, che fra loro abbiano la proporzione dimandata, e queſti ſono il 9, ed il 6, multiplico l' uno per l' altro, e trovo, che il 54 prodotto non è il 384., ma ha di meno 330. unità, ſicchè queſto è il primo errore trovato, che pongo da parte, per fare un altra ſuppoſizione.

Nella ſeconda ſuppoſizione prendo il 27, e 18, e multiplicati fra loro queſti numeri, trovo il riſultato 486, che è maggiore di 102 unità del dato numero 384, dunque anche la ſeconda ſuppoſizione contiene l' errore, che è del più. Con queſte ſuppoſizioni fatte ora, così diſpongo i termini per proſeguire l' operazione.

Prendo il quadrato del 9, cioè l' 81, e pongo ad eſſo appreſſo col ſegno meno la prima differenza trovata 330, ſcrivendo così 81—330. in un verſo ſotto dirimpetto a' deſcritti numeri, ſcrivo il quadrato del 27, che è 729, ed aggiungo appreſſo col ſegno del più la ſeconda differenza trovata † 102. Multiplico queſti quattro termini in croce, ed i due prodotti 8262, e 240570 li ſommo inſieme, per eſſere le differenze notate con ſegni diverſi, e riſulta 248832, che io parto per 432, che è l' avanzo della differenza maggiore 330. ſopra la minore 102. Da queſta diviſione naſce il quoziente 576. da cui io eſtraggo la radice quadrata 24, ed in eſſa leggo il primo numero dimandato.

Col-

Collo ſteſſo metodo accomodo li quadrati del 6, e del 18, che ſono 36, 324. colle predette differenze — 330, † 102, e fatta la multiplicazione in croce di queſti altri quattro termini, i due prodotti 3672, 106920. li ſommo inſieme per dividere il riſultato 110592 per 432, cioè per la ſomma delle due differenze, e dal quoziente 256 levata la radice quadrata, che riſulta 16, in queſta ſeconda radice trovo il ſecondo numero dimandato, che però, ſe io multiplicherò il 24. già trovato per queſto 16, riſulterà per l' appunto il 384, che è quello, che ſi voleva far riſultare colla preſente operazione. Se il numero, che ſi ha da produrre doveſse riſultare da una multiplicazione di tre numeri geometricamente proporzionali fra loro, l' operazione non ſarebde diverſa dalla paſsata, ma in vece di eſtrarre la radice quadrata, ſi dovrebbe levare la radice cuba; ſiccome in luogo de' numeri, che ſi foſsero ſuppoſti, ſi dovrebbero prendere i loro cubi; qualche volta pure i numeri ſuppoſti ſi riducono a quarte, e a quinte potenze, e nel compimento delle operazioni ſi eſtraggono queſte radici in vece delle quadrate e cube, e tali coſe ſuccedono, ſe il numero, che è dato è tale, che ſi voglia far riſultare da quattro numeri talmente preſi, che il primo abbia al ſecondo una ragione ſubſeſquialtera, che il terzo ſia la ſomma de' due precedenti, ed il quarto paragonato al ſecondo, ſia ad eſso in ragione dupla, ovvero, ſe il numero propoſto ſi voglia far derivare dalla multiplicazione di cinque altri così dati, che il primo ſia ſubſeſquialtero al ſecondo, il ſecondo ſubduplo al terzo, il quarto abbia al ſecondo una ragione multiplice dupla ſeſquiterza, e che la ragione del quinto parimente al ſecondo ſia tripla. Ma di queſti caſi occorrerà altrove parlarne.

XX. Si avverte per compimento di queſta materia, che l' eſtrazione delle radici nominate ſi uſa ancora nella regola della ſemplice falſa poſizione, che però, ſe ſi propone un queſito in tal modo. Sono 4116. ſcudi, che ſi hanno da dividere in tre perſone con queſta proporzione, che il terzo abbia la metà del ſecondo, e il ſecondo la metà del primo. Si dimanda quanti ne ha da avere ciaſcun di loro. Si trova la riſpoſta di queſto queſito con una ſemplice falſa poſizione, in cui ſi vede l' uſo della eſtrazione della radice quadrata, ed

ecco

ecco come si fa. Si prendono i numeri secondo la proporzione stabilita 8. 4. 2. ognuno di quei si riquadra, e risulta 64. 16. 4. sommati questi quadrati, fanno 84, che è un numero molto minore al 4116. Ora questo numero maggiore si parte per il minore, e dal quoziente 49. si leva la radice quadrata 7, per la quale si multiplicano i supposti numeri 8. 4. 2. e tutti i risultati 56, 28, 14, si riquadrano, ed i prodotti loro 3136, 784, 196. saranno le somme, che toccheranno nella divisione di tutta la somma 4116, per essere compita l'operazione, e ben fatta, giacchè da tutte le distribuite somme risulta esattamente la somma nel quesito assegnata.

L'uso della estrazione della radice cuba nella falsa posizione ha il suo luogo, se il numero. che si pone nel quesito risulta da due multiplicazioni, come se risulta da tre, vi avrà luogo l'estrazione della radice quadratoquadrata, si dice, che il numero risulta da due multiplicazioni, quando si fa nascere dalla multiplicazione di tre parti, che si suppongono come le vere, ma che poi in realtà si scuoprono false; siccome si dice, che risulta da quattro, se si fanno quattro parti, e si multiplicano fra di loro. Sieno 9878400. scudi da dividersi in quattro persone, e si dica, che il primo abbia da avere il terzo di questa somma, il secondo $\frac{1}{4}$, il terzo $\frac{1}{5}$. Si vuole sapere quanto sia quello, che rimane da darsi al quarto. Si suppone subito, che il denaro lasciato sia 120 scudi, dunque il primo ne dovrà avere 40; il secondo 30, il terzo 24, il quarto il resto. Ora si multiplica il 40 per il 30, e questa si dice la prima multiplicazione, poi si multiplica 1200 per il 24, e questa è la seconda multiplicazione, da cui risulta 28800. numero, che è minore del vero 9878400, che se alle due multiplicazioni fatte se ne aggiugnerà un altra, multiplicandosi il 28800. per 26. che è ciò, che resta del danaro supposto per distribuirsi al quarto, il risultato 748800; che è minore anche esso del numero vero, che per questo caso è 69148800, si direbbe derivato da tre multiplicazioni. Ecco dunque perchè si abbia da aver bisogno della estrazione della radice cuba, o di una quarta potenza, in occasione di dover tirare avanti nell'uno, e nell'altro caso l'operazione, questa nelle sue parti si conduce a compimento dal quoziente della divisione del vero numero.

Estrat-

Eſtratta nel primo caſo la radice cuba, e nel ſecondo la radice quadratoquadrata dal quoziente della diviſione del vero numero 9378400. per il 28800. e dal quoziente della diviſione di 69148800. per 748800. per eſſa, che nell' uno, e nell' altro eſempio è il 7. ſi multiplica il 120, cioè il numero ſuppoſto degli ſcudi, e riſultano 840 ſcudi da dividerſi in quattro perſone. Si troverà per tanto nel primo caſo ciò, che di queſti dovrà toccare alla quarta perſona, cioè 182. Se da 840. ſi leveranno le tre ſomme 280, 210, 168, derivate dalla multiplicazione del 40, 30, 24 (che ſono le parti aſſegnate alle prime tre) per la radice 7, ſiccome nel ſecondo caſo ſi troverà la ſteſſa quantità di denaro, ſe per il medeſimo 7 multiplicheremo il 26, che è l'avanzo del 120, levati da eſſo il 40, 30, 24, ora con queſto ritrovato s' intavola la regola del tre in queſta guiſa. Se del 120 ſi dà 182, che ſi darà del 9878400, e ſi trova la vera quantità del denaro, che dee toccare alla quarta perſona nel primo caſo, perchè per trovarla nel ſecondo caſo, ſi dee nel luogo del terzo proporzionale porre 69148800; e così reſta terminata l' operazione con l'uſo della eſtrazione di diverſe radici, coſa che una volta era creduta impoſſibile, e che il primo di tutti poſſibile la dimoſtrò Gemma Friſio in una delle ſue propoſizioni, che ci laſciò, e diverſi altri, che dopo di lui la praticarono.

C A P. IV.

Della ragione compoſta, e dell' uſo della proporzione nella ſoluzione de' problemi Geometrici.

I. QUella ragione, di cui in queſto Capitolo ſi ha da parlare, è di una ſpecie diverſa da tutte le altre, e non meno di quelle frequente ad incontrarſi. Non ſolo queſta ſi trova fra le grandezze, nelle quali nulla più vedeſi, che la mera lunghezza, ma conviene ad ogni condizione di ſuperficie, e di corpo, ed a quelle entità ancora, che l' intelletto noſtro conſidera, come aggiunte a' corpi, quali ſono il numero, la miſura, la gravità, il tempo, il moto, lo ſpazio, e tutto ciò, che è ſubordinato a qualunque ſorte di diviſione, o

che per qualsivoglia motivo può avere relazione a grandezza. Si chiama essa *ragione composta*, nome, che ce la distingue dalla *semplice*, di cui si è parlato fin ora, e che in oltre ci pone in vista un modo di prepararla sì proprio di lei, che a nessuna altra conviene. A molte operazioni sono soggette le ragioni, perchè si possono sommare insieme, sottrarre scambievolmente, ed a vicenda dividere, ma però da nessuna di queste operazioni si fa la ragione composta, la quale unicamente risulta dalla multiplicazione degli antecedenti di diverse ragioni, e dalla multiplicazione de' loro conseguenti, da che poi ne segue, che sono dette ragioni componenti quelle, delle quali si multiplicano i termini per avere la ragione composta, e che le ragioni componenti, quantunque possono essere di più, non possono nientedimeno essere meno di due. Dalla multiplicazione degli antecedenti di diverse ragioni nasce l'antecedente della composta, e dalla multiplicazione de i conseguenti deriva il conseguente, e se le ragioni componenti saranno simili, la ragione composta sarà *razionale*, e si dirà *irrazionale*, se le componenti saranno dissimili. La ragione del 24. al 6. si dice ragione composta, perchè nasce dalla ragione del 6. al 3., e da quella del 4 al 2. Si dice in oltre *razionale*, perchè le due componenti sono simili, che se fosse data la ragione del 32. al 10. sarebbe certamente composta, ma irrazionale, mentre le ragioni dell' 8. al 5., e del 4. al 2., dalle quali risulta, non sono due ragioni simili. Il motivo perchè qualche ragione si dice razionale, e qualche altra irrazionale è, perchè la prima ha le sue voci, col mezzo delle quali si distingue a differenza dell' altra, che non si può esprimere con alcuna voce, e che per questo ancora si dice ragione sorda.

II. Anche ogni ragione composta porta gli stessi nomi della ragione semplice, per la qual cosa si considera come una ragione di *egualità*, quando i termini delle ragioni componenti sono reciprocamente proporzionali, o come una ragione di *inegualità* talvolta *maggiore*, chiamata però, o *moltiplice*, o *superparticolare*, o *superpaziente*, &c. e qualche altra *minore*, e così detta *submultiplice*, *subsesquialtera*, *subsesquiterza*, &c. ma questi però non sono i nomi suoi proprj, come sono i suoi veri nomi quelli, a cagione de' quali si chia-

si chiama ora *dupiata*, o duplicata *triplata*, o triplicata *quadruplata*, o quadruplicata, &c. i quali nomi non servono ad altro, se non che a farci conoscere quando la ragione composta risulta dalla multiplicazione di due ragioni, di tre, di quattro, di cinque, &c. che sono tutte ragioni simili fra di loro; per questo riguardo la ragione del 64. al 16 si dice duplicata, e quella del 64. all' 8. triplicata, e l'altra del 64. al 4. quadruplicata; e finalmente quella del 64. al 2. quintuplicata, perchè in ciascuno di questi esempj comparisce una ragione composta, la prima volta di due, poi di tre, poi di quattro, e finalmente di cinque ragioni simili fra di loro.

III. Oltre a queste differenze di ragione composta, ve ne è anche un altra, che si chiama ragione composta *sesquiplicata*, o sesquialtera composta, pensata, e postaci in vista dal perspicacissimo Isacco Neuton, ed appropriata alla condizione del moto periodico de' pianeti, per rapporto a i tempi loro, quando dice, che la ragione de' tempi periodici dei pianeti è sesquiplicata delle distanze dal Sole ne' primarj, e delle distanze dal centro di Giove, e da quel di Saturno ne' secondarj. Nasce questa ragione dalla multiplicazione di due altre, una delle quali è composta subduplicata, e la rimanente è una ragione semplice della natura di una di quelle, che compongono la subduplicata, e solo da essa diversa in questo, che dee essere di maggiore inegualità, cioè nasce da tre ragioni simili fra di loro, due delle quali sono di minore inegualità, e la terza dee essere di maggiore inegualità; tale è la ragione, che ha il 90. al 192. perchè risulta dalla multiplicazione della ragione del 2. al 4., dell' 8. al 16., che sono le due ragioni di minore inegualità, e submultiplici duple, e dalla ragione del 6. al 3., che è quella di maggiore, e multiplice dupla.

IV. Le ragioni composte non meno, che le semplici, si possono paragonare fra di loro, cosa, che quando accade, fa conoscere, se le ragioni composte sieno *simili*, o *dissimili* fra di loro. Dipende la similitudine delle ragioni composte dalla similitudine delle componenti, onde non potendo essere queste meno di quattro, cioè due per ciascheduna ragione delle composte, è necessario, che tutte quattro sieno simili fra di loro, che se non fossero simili, neppure simili si direbbe-

Tt 2 ro le

ro le composte, ma sibbene dissimili, e la loro dissimilitudine si conoscerebbe dalla dissimilitudine delle componenti. Più speditamente si conoscerà la similitudine delle composte, se applicheremo ad esse quella regola, di cui ci siamo serviti nel terzo confronto delle ragioni semplici per conoscerle simili, o dissimili, multiplicandole, cioè in croce, per vedere, se i prodotti nuovi antecedenti vengono uguali, o disuguali per decidere, come sopra della similitudine, o dissimilitudine delle date composte ragioni.

V. Quanto si è avvertito fin ora, facilmente si può applicare alle superficie, ed a' corpi, fra' quali sempre si trova la ragione composta, se si paragonano fra di loro. Per nome di *superficie* s' intende uno spazio compreso da varie linee, siccome il *corpo* è una quantità terminata da varie superficie. Tanto quelle, che questi si dividono in varie specie, e le prime comprendono ogni sorte di figure, siccome ogni figura può considerarsi come un *poligono*, che poi dal numero de i suoi lati acquista nuova denominazione, come di *triangolo equilatero*, se ha tre lati, e tre angoli eguali, di *triangolo isóscele*, o *equicrure*, se soli due lati sono uguali, ed i due angoli sopra la base opposti alli stessi lati, di *triangolo scaleno*; se tutti tre i lati, ed i tre angoli sono disuguali, di *parallelogrammo*, quale *rettangolo*, se i lati opposti sono uguali, e se tutti quattro gli angoli sono retti, quale *quadrato*, se oltre ad avere tutti gli angoli retti ha di più tutti i quattro lati uguali fra loro, quale *rombo*, o *romboide*, se due degli angoli opposti sono acuti, e due ottusi, di *pentagono*, se ha cinque lati, di *esagono*, se ha sei lati, di *decagono*, se dieci, di *quintidecagono*, se quindici, di *chiliagono*, se ne ha mille, e di *circolo* finalmente, se da' lati infiniti risulta. I corpi poi o sono *prismi*, o *cilindri*, o *piramidi*, o *coni*, o *parallelelipedi*, o *sfere*, o altri.

VI. Parlandosi ora della ragione delle figure, si dice, che in esse se si paragonano fra di loro, si osserva la ragione. In quattro modi si possono fare li paragoni delle figure, perchè o si paragonano due figure, le quali hanno le altezze uguali, e le basi uguali, o si paragonano due figure, che hanno le basi uguali, e le altezze disuguali, o quelle, che hanno le altezze uguali, e le basi disuguali; o finalmente si parago-

go-

gonano due figure le quali hanno e basi, e altezze disuguali. Se si fa il primo confronto, la ragione delle figure si chiama di ugualità, cioè a dire la prima figura è uguale alla seconda. Se si fa il secondo, la ragione delle figure è simile alla ragione delle altezze, cioè quel nome, con cui la ragione delle altezze si chiama, per esempio sesquialtera, sesquiterza, denomina ancora la ragione delle figure. Se si fa il terzo confronto si risponde, che le figure stanno fra loro, come le basi, spiegandosi la risposta, come nel secondo confronto, e per ultimo nel quarto confronto si trova, che la ragione delle figure è composta della ragione delle basi, e di quella delle altezze, che sono quelle due parti, che in ogni figura si incontrano.

VII. Questa ragione composta delle figure con tre nomi suole contrassegnarsi, perchè o si chiama ragione di *ugualità*, o *duplicità*, o *sorda*. Ella è d' ugualità, se la ragione delle basi è reciproca alla ragione delle altezze, o al contrario, se le altezze sono reciprocamente proporzionali alle basi. E' duplicata, se la ragione delle basi è simile alla ragione delle altezze; e la ragione si dice sorda, se fra le altezze, e le basi non vi è proporzione. Si può porre l' esempio per tali osservazioni in due parallelogrammi per essere figure, dalle quali facilmente si prende la notizia de' triangoli, ne' quali poi si risolvono tutti i poligoni di qualunque numero di lati essi sieno; Sieno [a] *ABC*, *DEF* due parallelogrammi, *AB*, che è l' altezza del primo sia 9. *DE* altezza del secondo sia 6. *BC* che è la base del primo sia 8. *EF* base del secondo sia 12., se si rileva la misura di questi due parallelogrammi, si trova, che è la medesima, risultando lo stesso numero dalla multiplicazione del 9. per l' 8., e dalla multiplicazione del 12. per il 6., e questo è, perchè la ragione delle altezze 9. 6. è reciproca alla ragione delle basi 8. 12. Che se lasciata l' altezza [b] *AB* 9. si fa la base *BC* 6., e l' altezza *DE* 12., e la base *EF* 8., questo è il secondo caso, in cui le misure de' parallelogrammi 96. 54., si osservano produrre una ragione duplicata, perchè risulta dalla multiplicazione della ragione delle altezze, che è simile alla ragione delle basi, cioè dalla ragione del 12. al 9. e del 8. all' 6., che sono due sesquiterze. In fine poi se lasciate le misure di tre de' precedenti lati, si muta quella della base *EF* [c], con porre il 7. in luogo dell' 8.; il primo rettangolo

(a) TAV. I. Figura I. n. 1. n. 2.

(b) Fig. 2. n. 1. n. 2.

(c) Fig. 3.

golo misurato col 54. al secondo, la di cui misura è 84. non avrà altra ragione fuori della irrazionale, e sorda, perchè mancano ad esse quei requisiti, senza dei quali non può determinarsi alcuna ragione razionale.

La ragione dei circoli, dei quadrati, e delle figure simili è sempre ragione duplicata, nei primi dei raggi, nei secondi, e nelle terze dei lati omologhi, cioè simili, cioè proporzionali, e se la ragione di queste figure si dovesse esprimere in un altra corrispondente si potrebbero esprimere in tre termini continuamente proporzionali per esempio 9. 6. 4. essendo appunto la ragione del primo 9. all'ultimo 4. ragione duplicata, perchè è la stessa, che la ragione del 54. al 24. ridotta a più piccoli termini; per lo schifo fatto col 6., la quale ragione risulta dalla multiplicazione delle due ragioni simili, cioè dalla ragione del 9. al 6., e del 6. al 4., che sono due ragioni sesquialtere.

VIII. Le *figure simili* si dicono quelle, che hanno il medesimo numero di lati, e di angoli, con questo, che non è necessario, che i lati sieno uguali, ma sibbene, che gli angoli corrispondenti a i lati sieno uguali, e così se i poligoni hanno ugual numero di lati, o l'istesso nome, come due esagoni[(a)] *ABCDEF*, due pentagoni *ABCDE*, sono sempre simili; e simili sono i triangoli, se sono equiangoli *ABC*,[(b)] ed i parallelogrammi[(c)] *ACB*, *DEB*, che sono intorno al medesimo diametro *DA*, e che intorno ad un angolo uguale *C*,[(d)] hanno i lati *AC*, *CB* proporzionali a lati *DC*; *EC*, e molte altre figure, delle quali altrove occorrerà ragionare.

(a) Fig. 4. 5. (b) Fig. 6. (c) Fig. 7. (d) Fig. 8.

IX. Siccome la ragione del primo termine proporzionale al terzo l'abbiamo detta duplicata, così la ragione del primo al quarto è triplicata, al quinto è quadruplicata, al sesto è quintuplicata, &c. è però generalmente si può inferire, che la ragione, che si trova fra il primo termine proporzionale, e l'ultimo è una ragione composta di tutte le intermedie, le quali tante sono, quanti sono i numeri de' termini dati meno uno. Che vuol dire, se nove sono i termini dati continuamente proporzionali, fra il primo, e l'ultimo si contano otto ragioni simili, come quì si vede in questa serie.

512. 256. 128. 64. 32. 16. 8. 4. 2.

che

che distribuita per le sue ragioni si divide in otto ragioni le quali sono

512. 256. 128. 64. 32. 16. 8. 4.
256. 128. 64. 32. 16. 8. 4. 2.

e la ragione del 512. al 2., sarà la medesima, che una ragione ottuplicata, che risulta dalla multiplicazione di tutti gli antecedenti, e conseguenti, i quali impiccoliti ritornano li stessi, che il primo, e l'ultimo.

Dovendosi per tanto conoscere la qualità di una data ragione per determinare, se sia duplicata, triplicata &c. ovvero sorda, la regola è di cercare quanti termini medj proporzionali si possono ritrovare, e dal numero di questi, trovati secondo le regole stabilite, si scuopre il nome, che conviene alla ragione, che sarà quello, che si dà alla ragione composta di tante componenti, quanti sono i numeri medj proporzionali trovati, con una di più, laonde se si trova un solo medio proporzionale, la ragione data sarà duplicata, se se ne trovano due sarà triplicata, se se ne trovano cinque sarà sestuplicata, e così delle altre, e quando non se ne può trovare alcuno, che mantenga esattamente la proporzione con gli altri dati, allora la ragione si deve dire irrazionale, e sorda. Da tutti li stabiliti fondamenti dipendono quelle misure, che ora siamo per aggiugnere di varie superficie, o figure, e di varj corpi, che possiamo considerare come principj di *pratica Geometrica*, e *Stereometria*, e perchè, come abbiamo detto, ogni figura è un poligono, si potrebbe intraprendere la misura da quel poligono, che ha il minor numero di lati, cioè del triangolo, per passare poi grado per grado a quelli, che ne hanno un numero maggiore, e a quelli, che ne hanno infiniti, come sono li circoli, che si chiamano perciò poligoni d' infiniti lati. Ci astenghiamo niente di meno dal dare le misure di qualunque triangolo, perchè le abbiamo riservate in altro tempo, e ad un luogo più proprio; quelle ancora de' parallelogrammi le tralasciamo per essere a tutti noto, che si hanno dalla multiplicazione delle loro altezze per le basi, e tralasciamo quelle di qualunque altro poligono regolare, che si rilevano dalla multiplicazione della metà del *Cateto*, cioè di quella linea, che dal centro del poligono scende perpendicolare ad un lato di esso, nel suo *perimetro*,

cioè

cioè nella somma di tutti i suoi lati; onde quelle, che quì ora riporteremo, apparterranno ad altre figure, delle quali prima misureremo i contorni, e poi li spazj racchiusi; e perchè quelle figure, delle quali i contorni li fanno alcune curve, si apprendono, come di un ordine superiore alle altre, per questo motivo, sotto diversi problemi daremo le misure di esse, con farne scelta di alcune, che noi abbiamo giudicate, e le più belle, e le più accreditate nelle Scuole dei Matematici.

§. I.

Misura delle Curve linee. Misura della Circonferenza del Circolo.

Problema I.

X. Si misura la circonferenza del circolo, presupponendosi la notizia del diametro, e questo si misura presupposta la notizia di quella. Dato dunque il diametro si dice, come il 7. al 22. o per renderla più esatta, come il 113. stà al 355. così deve stare il diametro dato ad un altro. In questo quarto proporzionale si nota la misura della circonferenza del circolo.
(a) Fig. 9. Sia per tanto 16. [a] la misura del diametro AC, si multiplica questo 16. per 22., ed il risultato 352 si dividerà per 7., ed il quoziente $50\frac{2}{7}$ potrà considerarsi, come la misura della circonferenza del circolo: ovvero multiplicandosi il 16. per il 355. risulterà 5680., che diviso per 113. lascierà per quoziente $50\frac{30}{113}$, che sarà la più giusta misura della circonferenza. Che se si dovesse misurare un pezzo di arco, la misura dell'angolo al centro mostrerebbe la quantità di esso arco.

Misura della Curva Cicloidale, o Tautocrona.

Problema II.

Dalla misura del diametro, e della circonferenza del circolo, si passa alle misura della cicloide, [b] che è una curva AEB
(b) Fig. 10. prodotta dalla revoluzione di un circolo $DFEG$ sopra di un piano AB, quando il circolo arriva a toccare il medesimo

piano

piano con quel punto ſteſſo, con cui ſopra di eſſo cominciò il ſuo moto; eſſendo dunque noto il diametro di queſto circolo lo quadruplicheremo, ed in queſto riſultato avremo la miſura della curva cicloidale, per eſempio, ſe il diametro del circolo genitore foſſe 16. la curva cicloidale ſarebbe 64. In tanto poi queſta curva è chiamata *Tautocrona* in quanto, che è una di quelle linee, per le quali, quando ſi muove un qualche corpo, per qualunque porzione di arco della medeſima nel tempo ſteſſo diſcende. Talvolta poi la ſteſſa curva è chiamata *Brachyſtochrona*, *Oligochrona*, perchè fra tutte le curve queſta è giudicata la più opportuna a rendere più veloce, e ſpedito il movimento dei corpi; come altre volte porta il nome di *Curva* di *Equilibrio*, perchè trovandoſi in eſſa un qualche peſo, mantiene coſtantemente l'equilibrio, deve però in queſto caſo la Cicloide eſſere deſcritta dal rivolgimento di una ruota ſopra un altra ruota uguale.

Miſura della Spirale Logaritmica.

Problema III.

Se nel piano del circolo BCH[a] ſi trovi la curva $BDEIPC$, Fig. 11.[a] che la ſeghino al medeſimo angolo obliquo i raggi CB, CL, CM, CN, tirati dal centro del circolo C, queſta curva è quella, che è chiamata Spirale Logaritmica, perchè eſſendo preſi gli archi infinitamente piccoli, ed uguali LM, MN &c. cioè aritmeticamente proporzionali agli archi BL, BM, BN, i raggi DC, EC, IC ſono ancora geometricamente proporzionali, a cauſa, che i triangoli DCE, ECI &c. ſono ſimili.

Intorno al medeſimo centro ſi deſcrivano gli archi EF, IG, QP, e tirate le rette CH, CS, QR perpendicolari alle CB, CD, le quali ſeghino le tangenti dalla curva BH, DS, in H, S, R, ſi vedranno i triangoli DFE, EGI ſimili, avendo gli angoli EDF, GEI in ipoteſi uguali, e DFE, EGI retti, dunque CD ſtarà a DS, come FD a DE, oppure GE ad EI, oppure come $FD + GE$ a $DE + EI$ &c. cioè come DC a $DIPC$: dunque DS ſarà uguale a $DIPC$, e perchè nel medeſimo modo ſi moſtra $DIR = DIP$, così ancora RS dovrà eſſere uguale a PC.

Miſura della curva Loxodromica.

Problema IV.

Nella precedente figura ſi prenda $BLDC$, come ſuperficie della sfera, C il polo, BL l' equatore, CB, CL &c. i meridiani, che ſeghino la curva $BIPC$ ad angolo ſempre il medeſimo FDE, queſta ſarà la Curva Loxodronica dei Piloti.

Deſcritti gli archi paralleli all' equatore FE, GI, PQ come prima, ſi dirà, come il ſeno tutto ſtà alla ſecante dell' angolo FDE, così DF ſtà a DE, oppure EG ad EI, oppure $DF + EG$ &c. a $DE + EI$ &c. cioè come l'arco del meridiano DQC, compimento dell' altezza del polo del luogo D ſtà alla lunghezza della loxodromica $DIPC$. Ma così ancora ſtà l'arco DQ, o la differenza della latitudine dei luoghi D, e P alla parte della loxodromica DIP tramezzata a queſti luoghi. Dunque ne ſegue, che le porzioni di queſta curva, che ſi ritrovano fra due, quali ſi vogliono luoghi, ugualmente differenti di latitudine, ſono uguali, ed univerſalmente, che le parti di queſta curva, eſſendo la medeſima, ſono proporzionali alle differenze delle latitudini, che ſi trovano fra gli eſtremi di queſte parti.

Con altro nome queſta curva è chiamata *Curva Mirabile*, perchè non ſolo dalla propria evoluzione ſi genera, ma di più dà l'origine a molte altre curve, e principalmente a cinque, cioè alla propria *Contraevoluta*, alla *Cicloidale*, alla *Cauſtica dal ſuo fuoco*, alla *Controcauſtica*, ed alla *Pericauſtica*, le quali curve ſono tutte ſimili fra di loro, e della ſpecie medeſima, ſolo diverſe per quel luogo, in cui ſi trovano, ma però tutte fra loro uguali, perchè ſoprappoſte ſi adattano perfettamente; hanno di più queſto di proprio, che ſono ſegate tutte al medeſimo angolo da quelle linee, che tirate dal fuoco A [a] le attraverſano. Di più ſe il raggio incidente, e refleſſo HA, HI ſi allunghi oltre H, fino al concorſo colla pericauſtica, e controcauſtica in S, e P, e ſi congiungano i punti AP, SI, ſarà $APSI$ un parallelogrammo rettangolo, la di cui diagonale PI, toccherà la curva cauſtica, e il lato PS toccherà la curva pericauſtica; ſiccome le tangenti della evoluta

(a) Fig. 12.

luta *ABL*, e della espressa *DHM* saranno le rette *HB*. *HR* tirate parallele a i lati opposti del parallelogrammo, come pure si vedranno simili i triangoli *AHP*, *ABI*, ed uguali fra loro i lati *AH*, *HI*. *HP*, *HS*, e la curva caustica *CI* uguale alla retta *HI* raddoppiata, e l'evoluta *AB* uguale alla retta *HB*. Finalmente se intorno al comune fuoco *A*, come centro, si descriverà un circolo con qualunque raggio, tutte le porzioni di queste spirali, che saranno segate dentro del circolo, rimarranno uguali, e saranno pure uguali tutti gli angoli, che si formeranno dalle linee rette, che partono dal centro, e vanno ad unirsi alle curve segate dal circolo, a quegli angoli, che le curve stesse, dopo infinite revoluzioni faranno nel fuoco comune, dove vanno tutte ad unirsi, ma non già saranno tutti fra loro uguali quegli angoli, che da qualunque raggio del circolo prolungato per tutte le curve faranno queste curve con questi raggi, ma con tale ordine si combineranno, che l'angolo della evoluta colla caustica, sarà sempre uguale all'angolo della esposta colla controcaustica, e l'angolo della evoluta colla esposta sarà sempre uguale all' angolo della caustica colla anticaustica.

Misura della Curva Caustica.

Problema V.

Descritto il circolo *ALM* col raggio *AI*, [a] se si prende la metà del raggio *CA*, e intorno a questa, come diametro, si descrive il circolo *ABC*, che si concepisca girare sopra il quadrante *CH* del circolo *NCH* descritto coll'altra metà del raggio *CI*, si dice, che il punto *A* descrive la Curva Caustica *AFH*. [a] Fig. 13.

La misura di questa curva si dà nella figura 14. dove la medesima viene rappresentata tanto nella curva *INF*, quanto nella curva *MPF* generata questa dal refe, che raggirato sopra *INF* dal punto *F* si distende verso *M*. La misura dunque è tale. La retta *NoP* è sempre uguale alla curva *NF* in ipotesi: la retta *oP* si prova doppia della retta *No* dunque tutta la *NoP*, oppure la curva *NF*, sarà tripla della retta ò tangente *No*. La curva *IN* stà alla curva *NF*, come *LB* a

 BC,

BC, dunque conosciute le parti *CB*, *BL*, sarà conosciuta la parte *IN*, sicchè tutta la misura della curva *INF* dipende dalla misura delle rette *EO*, oppure *oP*, e *BL*. Nel triangolo *CoE* è noto il lato *Co*, metà di tutto il raggio *CQ*; può essere noto l'angolo *oCE*, dunque per la soluzione dei triangoli rettangoli, sarà anche noto il lato *oE* oppure *oP*. Similmente nel triangolo *BCo* abbiamo noto il lato *Co*, può ancora essere noto per l'antecedente costruzione l'angolo *C*, dunque si troverà altresì il lato *CB*, e il compimento al raggio *BL*, e perchè l'evoluta *INF* è la metà della curva intera *FPM*, conosciuta quella, sarà ancora questa subito misurata.

La misura del predetto angolo, perchè si trovi con facilità, si propone un mezzo proprio, qual è il compasso di proporzione, onde per vedere, come si opera, si supponga
[a] Fig. 15. dato il seguente angolo da misurarsi *BAC*.[a] Aperto il compasso ordinario sopra il lato dato *AB*, si porti questa apertura sulle linee delle corde nel compasso di proporzione a traverso di 60. e 60., e rimanendo in tal modo aperto il compasso di proporzione, si misuri col compasso ordinario l'intervallo *BC*, e si porti questa apertura sulla medesima linea delle corde, di sorta che da parte a parte si adatti sopra il medesimo numero, che questo numero farà conoscere la misura dell'angolo ricercato.

Di queste Caustiche curve tre si sono distinte, come le più singolari, la prima è la curva caustica Tschirnhausiana prodotta nel modo, che or ora abbiamo detto. La seconda è l'altra, di cui pure abbiamo parlato, prodotta dalla Curva Mirabile. La terza è quella, che la produce la Cicloide dell' Ugenio, servendo a se medesima, come di evoluta. Ciascuna di queste può convenire con l'altra in qualche cosa, ma però anche per l'altre proprietà si distinguono fra di loro, mentre se tutte tre derivano dalla loro propria evoluta, e tutte tre delle loro curve cicloidali sono le medesime curve, vi è però questa differenza, che non solo l'evoluta è caustica della curva mirabile, ma inoltre la controevoluta, la controcaustica, la pericaustica &c. sono la curva medesima, dove nelle altre sono quasi diverse. Similmente nella evoluzione della spira mirabile le parti della curva col medesimo ordine sono descritte, con cui si ri-

ſi rivoltano, nel ravvolgimento poi delle cicloidali con ordine affatto contrario. Finalmente la ſpira mirabile ha la medeſima evoluta, e la medeſima cauſtica; la dove le altre cicloidi hanno sì la medeſima evoluta, ma non già la medeſima cauſtica, ma o una cauſtica, che ſolo è ſimile ad eſſe nella ſpecie, o che porta con eſſe la ſimiglianza nel genere, con queſto di più, che ſe prodotte, che foſſero tali curve ſi traſmutaſſero in tanti ſpecchj conſiſtenti, e capaci a riflettere i raggi, anche diffuſi da una infinita diſtanza, come quando da queſti furono così prodotte, con queſte refleſſioni ſi produrrebbero in vero altre curve, ma ſempre di quelle minori, quando per il contrario quelle, che nel caſo medeſimo ſi produrrebbero dalla ſpira mirabile, ſarebbero ad eſſa ſpira affatto, ed in ſpecie ſimigliantiſſime.

Produce queſto Fenomeno la curva anticauſtica, che determina il luogo della imagine del punto radiante nel fuoco A, [a] oſſervata per la rifleſſione della curva cauſtica ICA. Determina la pericauſtica l' intera imagine della cauſtica dentro lo ſpecchio DHM veduta dall'occhio per il fuoco A: e l' antevoluta dimoſtra il luogo dell' imagine dell' occhio, che vede ſe ſteſſo per mezzo della evoluta. Per nome di imagine non s' intende altro, che il punto del concorſo de' raggi di rifleſſione, e di refrazione per relazione alla linea RH, che tocca la curva eſpoſta ſpirale $ADHM$, nel punto dell' incidenze, non già per relazione alla ſteſſa curva, mentre in queſto caſo de' punti A, ed I: l' uno dell'altro, e il punto B di ſe ſteſſo ſarebbe l' imagine, e non i punti P, S, Q.

(a) Fig. 12.

Miſura della Curva Diocauſtica.

Problema VI.

Come la rifleſſione de' raggi produce quella curva, che Cauſtica è ſtata chiamata, così quelle curve, che ſono nate, e comunemente naſcono dalla refrazione de' medeſimi raggi vengono denominate Diocauſtiche, e la loro miſura è tale. [b] Tirato un raggio incidente AH, ad un altro AD, [c] che tocchi la curva $DMRS$, oppure un altro AL, [d] di cui il lato refratto tocchi la ſteſſa curva, ſe ſopra il punto radicale A, col raggio

(b) Fig. 16.
(c) part. 1.
(d) part. 2.

raggio AH ſi deſcriverà l'arco del circolo HM, il quale in ipoteſi di una infinita diſtanza dal punto A, viene ad eſſere una linea retta perpendicolare a' raggi, ſarà la curva LI inſieme colla retta DL, [a] cioè LB uguale alla differenza del raggio refratto HI, e di una retta, alla quale DM ha quella ragione, che è miſura delle refrazioni, oppure nella ſeconda parte della figura, ſarà la curva LI uguale all' aggregato del raggio HI, e di quella retta, alla quale LM mantiene la predetta ragione. (Ragione della refrazione è detta la ragione del ſeno dell' angolo refratto al ſeno dell' angolo della inclinazione,) che però trovata queſta ragione, è trovato ciò, che principalmente è giudicato neceſſario per riuſcire con profitto nella miſura di queſta curva Diocauſtica.

(a) part. 1.

Anche nella ſpira mirabile ſi oſſerva queſta curva Diocauſtica, e ſi vede in tutti quelli attributi, già accennati per le altre curve, che da quella dipendono, coſa, che non ſi verifica, parlandoſi delle curve Diocauſtiche, prodotte dalle Cicloidi. Si notano ſolo in eſſa i raggi prolungati al di dietro della ſpira quelli, che o dalla perpendicolare, o alla perpendicolare ſi refrangono, mentre che tali raggi ſono nella parte di avanti alla ſpira divergenti.

Miſura della Curva Parabolica.

Problema VII.

La Parabola come l' Iperbola, e l' Eliſſe è una di quelle curve, che ſi deſcrivono nella ſuperficie eſterna del cono, e ne forma una ſua ſezione. Se ne diſegna una porzione ABC, nella figura 17. [a] in cui la retta BC ſi chiama Aſſe, o lato tranverſo, la retta AC è la baſe, e la curva BA è la curva parabolica, che ſi vuol miſurare. Si prenda la retta IE [b] uguale alla retta AC metà della baſe della parabola, e ſi prolunghi in H, per avere IH uguale alla tangente della parabola AG. La curva DEF ſia porzione di una iperbola deſcritta col centro I coll' aſſe EH col lato traſverſo IE, e che abbia la baſe DHF, ſe il parallelogrammo $DPQF$, ſi porrà uguale a queſta porzione di iperbola DEF, il lato PQ ſegherà in tal maniera il diametro EH in R. che renderà il

(a) TAV. II.
(b) Fig. 18.

lato

lato *IR*, uguale alla curva parabolica *AB*, conoſcita dunque la miſura di queſto lato, ſi conoſcerà la miſura della curva parabolica. Alla miſura di queſta curva corriſponde l'altra dalla Curva Spirale di prima circulazione già ritrovata da Archimede, quando di eſſa ſpirale ſi affermi, che abbia la ſubtangente uguale ad un arco di circolo, che è deſcritto dalla linea uguale alla ordinata di quella parabola, che ha per aſſe una retta uguale alla metà della circonferenza del circolo genitore di eſſa ſpirale, e per baſe la retta uguale al diametro dello ſteſſo circolo genitore. (a)

(a) Fig. 19. 20.

Nella prima delle deſcritte figure ſi oſſerva la Spirale, nella ſeconda la Parabola. La ſubtangente della Spirale è *Cb*, che deve eſſere uguale all'arco *afi* formato dal raggio *aC*, che li fa uguale all'ordinata *na* nella parabola. La linea *PQ* baſe della parabola è uguale alla *CA*, raggio del circolo genitore *ADN* la linea *bPc* è baſe della parabola uguale alla metà della circonferenza del circolo genitore. Stabilite dunque tutte queſte coſe evidentemente appariſce, che eſſendo la ragione del circolo genitore *ADN*, all'arco *ifA* duplicata de i loro raggi *CA*, *Ci*, oppure *Qna*, oppure per condizione della parabola *Pc*, *cn*, ſe *Pc* ſi pone uguale alla metà della circonferenza del circolo genitore, ancora *cn* ſarà uguale alla metà dell' arco *afi*, ovvero alla metà della *Cb* ſubtangente nella ſpirale, come ancora è metà della *bn* ſubtangente della parabola, dunque le ſubtangenti tanto nella ſpirale, quanto nella parabola ſono uguali fra loro, ma per ſuppoſizione ancora l'ordinata *na* nella parabola è uguale alla *Ca* raggio dell' arco *afi*, dunque tutta la tangente *ab* della parabola, che è in potenza uguale a queſte due linee, ſarà uguale ancora alla tangenre *ab* della ſpirale, e preſa in queſte due tangenti una parte *ad* infinitamente piccola, e laſciata cadere tanto nella ordinata, e raggio della ſubtangente la parallela, *dm* avremo il triangolo *dma*, tanto nella parabola, che nella ſpirale uguale, onde ſe gli ſupponghiamo, come ſoprappoſti gli uni agli altri, tutti i loro lati ſi adatteranno, e quello, che più importa, ſi adatteranno le tangenti *ad*, cioè le porzioni delle curve loro corriſpondenti; dunque ſi vede, che la proporzione di una curva all'altra è più vicina alla ugualità di qualunque altra data ragione di maggiore, o di minore inegualità;

lità; e perciò si può risolvere, che tanto la spirale di Archimede, quanto la parabola con quelle condizioni, colle quali è stata descritta, sono uguali, e che però la misura di questa può servire per misurare anche quella. D' onde apparisce, che dove alcuni scrissero essere la spirale uguale alla metà della circonferenza del circolo genitore, cioè essere la spirale tanto minore quanto l' asse della parabola è minore della curva parabolica, non diedero un adequata misura alla spirale, ma sibbene una misura minore assai di quella, che giustamente li dovea essere attribuita, errore commesso dallo Sturmio, dal Guarini, e da altri, che ci sono riportati dal P. Grandi.

Quello, che si è detto di questa spirale, si dice di qualunque altra, paragonata con qualunque altra specie di parabola, purchè le potenze de i raggi di qualunque spirale, distinte colla esponente x sieno fra di loro, come le potenze degli angoli, e degli archi, compresi da i raggi, distinte colla esponente y, mentre in questo caso la parabola qualunque sia, che abbia queste condizioni, che le potenze di qualunque sua porzione, distinte colla esponente y, stieno come le potenze delle sue ordinate, distinte dall' aggregato delle esponenti $y + z$, corrisponderà in tal modo alla proposta spirale. Che se l' ultima delle proprie ordinate si uguagli al raggio della detta spirale, e l' asse sia $\frac{x}{y+x}$ di tutta la circonferenza, questa curva parabolica, e questa spirale, dovranno essere uguali.

Misura della Iperbole.

Problema VIII.

Siccome l' Iperbola contribuisce alla misura della parabola, così la parabola misurata ci può servire di mezzo per conoscere la misura della Iperbole; che però dovendosi questa misurare, si supponga intorno al medesimo asse con l' istesso semiparametro descritta l' una, e l' altra conica sezione, acciocchè confrontati i rettangoli uguali, tanto allo spazio iperbolico, che parabolico, si conosca la misura della Curva Iperbolica. Si abbia dunque per certo, come veramente è così, che il rettangolo fatto dal semiparametro *HA*,[a] nella curva para-

[a] Fig. 21.

rabolica *FBA* sia uguale al trapezio iperbolico *DGHAD*. Sia ugualmente certo, che il rettangolo fatto dalla *XA* in *HA* è lo stesso, che il rettangolo *DGHV*, cioè il trapezio *DGHAD* insieme colla iperbola *DAV*: dunque il rettangolo fatto dal semiparametro *HA* (lato comune de' due antecedenti rettangoli) nella differenza del lato *XA* sopra la curva parabolica, sarà uguale all' iperbolica *DAV*; dunque la medesima differenza del lato *XA* sopra la curva parabolica, sarà la misura della curva iperbolica *DA*.

In oltre perchè il lato *HA* è il semiparametro, o la metà del lato retto della iperbola equilatera *DA*, e della parabola *FBA*, e il punto *H* è il centro della iperbola, e le rette *GH*, *DV*, *FP* sono le perpendicolari, e ordinate all' asse delle sezioni: però misurato il lato *XA* con quelle costruzioni, che si dovranno fare sopra la figura, si conoscerà la differenza della medesima *XA* sopra la curva parabolica *FBA*.

La misura delle due precedenti curve contribuisce notabilmente alla misura di quelle, che produce una fune, la quale liberamente sta sospesa a due chiodi, imperocchè essendosi da più valenti Geometri determinata la natura di essa non diversa, o dalla Parabola, o dalla Iperbola equilatera, la misura di queste somministra la maniera di misurare anche quella. Si vede nella figura 22. quella linea retta, alla quale si dice uguale la *Curva Funicularia EBF*, questa è la retta *AG* ordinata all' asse nella iperbola equilatera *BG*, e però media proporzionale, fra la retta *DA* e la porzione *AB*. Siccome se si tiri alla curva la tangente *DF*, si dice, che stà *FA*, ad *AD*, come *BC* alla curva *BF*.

Corrisponde alla curva detta Funicularia l' altra, che nasce dalla piegatura, o gonfiamento del velo esposto al vento, da cui prende quel celebre Matematico Giacomo Bernullio l' ultima perfezione della Istiodromica in proposito al sapersi col di lei mezzo in qualunque momento di tempo il vero luogo della Nave in mezzo al mare per sciogliere il tanto famoso problema delle longitudini. Si possono pure ridurre alle predette specie di curve, tanto quella, che è chiamata curva *Isocrona*, perchè il corpo grave, che per questa si muove, va sempre con gradi uguali di celerità in tempi uguali avvicinandosi al centro, e l' altra curva, che è chiama-

ta *Isocrona Paracentrica*, per la quale, quando il corpo discende ugualmente in tempi uguali, o si allontana, o si accosta al dato punto, e quella curva, che il Neuton fu solito di chiamare *Traiectoria*, movendosi per essa i corpi projecti, che però la rettificazione di queste può prendere norma, e regola dalla rettificazione di quelle.

(a) Fig. 23. n. 1. Quella curva, che è chiamata *Elittica* *ABCD* (a) è tale, che non ammette rettificazione alcuna, ma in ordine ad essa, solo può assegnarsi la proporzione, colla quale si regolano i movimenti de' corpi, quando venissero questi a compirsi dentro una elisse, come realmente per una tal orbita sono mossi dalle proprie cagioni tutti i corpi celesti, con questa legge costante di passare spazj delle loro orbite in tutti i tempi, sempre proporzionali a' tempi medesimi, onde per questo mezzo si può conoscere la maggioranza di una elisse sopra dell' altra, ma non già si può assegnare una linea retta, che possa in qualunque modo misurare questa curva.

Si trovano pure presso de' Matematici altre curve, come
(b) n. 2. sono la *Cissoide* *CGg*, (b) trovata da Diocle, cioè quella curva, che preso il circolo *ABC*, ed ordinate in esso le rette *BE* *be*, e fatto come *AE* ad *EB*, ovvero *BE* ad *EC*, così la medesima *EC* ad *EG*, si fa passare per *C*, e per tutti i punti *Gg*.
(c) n. 3. La *Concoide* *bgfEFGH* (c) descritta da Nicomede alla estremità delle rette *Cb*, *Cg*, *cf*, *CE*, *CF*, *EG*, *CH* delle quali una uguale porzione è tagliata dalla retta *AB* ne i punti *n*. *m*. *l*.
(d) n. 4. *D*. *L*. *M*. *N*. La *Cassinoide* *ABCD* (d) delineata dal Cassini sopra la retta *AD* con tal regola, che presi i punti *F*. *G* ugualmente lontani dal centro *H*, ed inclinate le rette *FB*, *BG*. *FC*, *CG* ci facciano i loro rettangoli sempre uguali; e diverse altre, col mezzo delle quali si sogliono spiegare, e dimostrare alcuni effetti maravigliosi della natura, ma poi non ci vengono suggerite le maniere di misurarle, se non forse piacesse quella, che ci ha lasciata Tschirnausio, quando dimostrò, che la somma de' raggi incidenti, e reflessi è sempre uguale a qualunque curva. Il Teorema, che ce ne dà il celebre Autore, si adatta alla figura 23.
(e) n. 5. (e) e si dice, che se il raggio *DF*, e qualsivoglia altro simile a questo, cada in qualsisia curva *AFE*, e in tal modo, che i raggi reflessi, i quali fanno infinite intersezioni ne' punti *H*, *I*, *K*, *L*, &c. formino la curva *BHIKLMNOPE* il raggio inciden-
te

te DF, e reflesso MF sommati insieme sempre sono uguali alla porzione della curva ME, che si trova fra il punto della tangente MF nel punto M, e il punto E, dove le due curve AFE, BME si trovano; da che poi ne riferisce, che ancora la retta CA insieme colla retta AB, a cui i raggi incidenti, e riflessi corrispondono, hanno da essere uguali alla intera curva BME, certamente se non avesse contradittori un tal sentimento ci libererebbe da innumerabili difficoltà, quali tutto giorno si incontrano, in occasione di volere applicare le misure a molte di quelle curve, che in un numero infinito ci somministra, o la natura colle sue operazioni, o l' arte dell' uomo col mezzo della sua industria.

§ II.

Delle misure degli Spazj, o Aie delle Figure.

Problema IX.

XI. Dalla misura delle linee curve, che servono di contorno alle figure, facciamo passaggio alla misura de i loro Spazj, o di quelle Aie, che sono comprese tra queste curve, per rilevare in tal modo la cognizione di tutto quello, che per la pratica non è, se non che necessario a sapersi in ordine a tali figure. Non si possono per ora misurare gli spazj, che appartengono alle figure rettilinee, perchè non si è data la misura dei loro contorni, che appartiene ad altra scienza; accenniamo però, che quando si supporranno misurati i lati dei Triangoli, a' quali tutte le figure rettilinee si riducono, e le loro perpendicolari, si multiplicherà la perpendicolare per la metà della base, ed il risultato darà la misura dello spazio triangolare, sia di qualunque triangolo essere si voglia, e che per avere la misura delle altre figure rettilinee, bisognerà dividerle ne i loro triangoli, affinchè misurati ognuno di loro, si riportino in una sola le misure di tutti, ed in quella comparisca la dimensione dell' Aja di quella figura, che è stata così misurata. Venendo dunque alle dimensioni delle predette curve diamo prima la misura del circolo, quale comunemente suol darsi, cioè della superficie piana, e poi la misura della su-

superficie convessa. Dividendosi per mezzo una palla, ciò, che si vede nell' una, e nell' altra parte di essa, dopo fatta la divisione, è la superficie piana; considerandosi queste parti tutte insieme producono nel loro esterno quella superficie, che si chiama convessa. Si misura la prima, quando si multiplica la quarta parte del diametro per l' intera circonferenza, e se questo prodotto si quadrupli, risulta la misura della superficie circolare convessa. E perchè può succedere, che non si vogli la misura della intera superficie piana, o intera superficie convessa, ma solo la misura, o di una Zona, o di un Segmento, o di un Settore, o di qualunque altra porzione, però dovendosi dare tutte queste misure, si dice, che si misurerà la Zona se fatte le misure di due circoli si taglierà la minore dalla maggiore, perchè l' avanzo sarà la misura della Zona. Si
(a) Fig. 24. misurerà il Settore, se presa la misura del raggio *OP*, [a] e dell' arco del settore *PQR*, una di queste misure si multiplicherà per la metà dell'altra, il prodotto sarà la misura della superficie del settore circolare, della quale misura se si toglierà la misura del triangolo *RPO*, rimarrà la misura del segmento circolare *RQP*. Siccome tolto questo segmento da tutto il circolo, deve rimanere l' altro segmento *RSP*, e se levato il primo segmento *B* si leverà ancora dal secondo la parte *C*, rimarrà la misura di quel pezzo di superficie, che si trova fra due corde *RP*, *VX* tirate dentro del circo-
(b) Fig. 25. lo. Si misura ancora uno spazio *M*, [b] compreso fra le concavità di un arco, e convessità di un altro, allorchè stesa a tutti due gli archi la retta *DF*, e compiuti i circoli, de' quali i due dati archi sono porzione, si levi dal circolo maggiore il segmento *R*, perchè quello, che rimarrà, sarà la misura del compreso spazio. Ecco le Operazioni per tutti questi casi particolari.

Operazione I.

Tav. I. (c) Fig. 9. Avendo il circolo dato *ABCD* [c] il diametro *AC* 16., e la circonferenza $50\frac{2}{7}$ multiplicata una parte per l' altra, e presone il quarto, nel risultato si avrà la misura della superficie del circolo, dunque se il 16. per $50\frac{2}{7}$ fanno $804\frac{4}{7}$ preso $201\frac{1}{7}$ si sarà presa la misura della superficie del circolo.

Operazione II.

Essendo la superficie piana del circolo *ABCD* $201\frac{1}{7}$ questa

sta multiplicata per 4 darà la superficie convessa $804\frac{4}{7}$, sicchè apparisce, che quella misura, che nasce dalla muliplicazione dell' intero diametro per l' intera circonferenza è la misura della superficie convessa.

Operazione III.

Essendo la superficie piana del circolo maggiore *ABCD* $201\frac{1}{7}$, e la superficie piana del circolo minore *EFGH* $50\frac{2}{7}$, avendo il diametro 8 e la circonferenza $25\frac{1}{7}$, se si leverà $50\frac{2}{7}$ da $201\frac{1}{7}$ rimarrà $150\frac{6}{7}$ per misura della Zona circolare.

Operazione IV. per la *Figura* 24. *Tav. II.*

Sia la misura del raggio *OP* 8. e dell' arco del settore *RQP* $8\frac{8}{21}$, poi si multiplichi la metà del raggio per l' intero arco *RQP*, che il risultato $33\frac{11}{21}$, sarà la misura della superficie del settore circolare.

Operazione V.

Il lato *OP* del triangolo *ROP* è 8. la base *RP* è $13\frac{1}{2}$ la perpendicolare *OK* è $4\frac{1}{4}$, dunque multiplicato $4\frac{1}{4}$ per la base $13\frac{1}{2}$ farà $57\frac{3}{8}$, onde presane la metà $28\frac{11}{16}$ avremo la misura, che si dovrà levare dall' intiero settore circolare $33\frac{11}{21}$ per vedere nell' avanzo $4\frac{281}{336}$ la misura del segmento circolare *RPQ*.

Operazione VI.

Giacchè si è veduto, che il segmento *RQP* contiene $4\frac{281}{336}$, tolta questa misura dalla intiera superficie circolare $201\frac{1}{7}$ rimarrà l' altro segmento maggiore *RSP* $196\frac{103}{336}$, siccome essendo il settore *ROPQ* $33\frac{11}{21}$ sarà il rimanente settore *RVSXPO* $167\frac{13}{21}$, dunque, se da questo maggiore settore *RVSXPO*, e dal segmento maggiore circolare *RSP* leveremo il segmento minore *C*, che si suppone uguale all' altro segmento *B* rimarrà per lo spazio, che si trova in tramezzo alle due corde *RP*, *VX* la misura $191\frac{158}{336}$.

Operazione VII. per la *Figura* 25.

Misurato l' intiero circolo *CDGF* $201\frac{1}{7}$ ci rimane la misura della sua metà *DCF* $100\frac{4}{7}$, misurato l' intiero circolo, che ha per porzione l' arco *DMF*, di cui il diametro è 20,

la

la circonferenza $62\frac{6}{7}$ deve essere la superficie piana $314\frac{2}{7}$, sicchè tolto da $314\frac{2}{7}$ il segmento *R* parte comune anche al semicircolo *DCF*, rimane la superficie dentro i due archi misurata, come si voleva sapere.

Appartengono li seguenti casi a varie misure della superficie sferica intorno alla quale, dopo di essersi avvertito quel modo, con cui essa si rileva, si dimanda il modo di misurare la superficie di un segmento sferico, di un settore sferico, e di una superficie sferica compresa da due circoli.

(a) Fig. 26. Si misura il segmento sferico *BAD* nella sua superficie, (a) quando si misura il circolo fatto dal raggio, o corda *BA*, applicata alla metà del segmento *BAD*, che si vuol misurare. Siccome si misura la superficie sferica, compresa da due circoli, quando misurata la superfice del segmento maggiore *BCD*, e quella del segmento minore *ECF*, si defalchi questa da quella, perchè nell'avanzo si trova la misura della superficie richiesta. Come finalmente per avere la misura della superficie del settore *GECFG*, basta dopo avere misurata la superficie del segmento *ECF* aggiugnere a questa la misura della superficie del cono *EGF*. L'operazioni per tutti questi tre casi sono le seguenti.

Caso I.

Essendo il diametro *AC* 12. la porzione *AH* 3. la corda *BA*, che è media proporzionale fra tutto il diametro, e la parte *AG* sarà 6. Dunque se la superficie piana del circolo, che ha il raggio 6. è $113\frac{1}{7}$, questa misura servirà per la superficie del segmento sferico *BAD*.

Caso II.

Sia il diametro *AC* 27 sia la parte *CH* 12. sarà la corda, o raggio *CB* 18. ed il suo circolo $1018.\frac{2}{7}$ misura della superficie del segmento maggiore *BCD*.

Sia il diametro *AC* 27., sia la parte *CO* 3. sarà la corda, o raggio *CE* 9. Di più il circolo sarà $254\frac{4}{7}$ misura della superficie del segmento minore *ECF*, sicchè tolto $254\frac{4}{7}$ da $1018\frac{2}{7}$ resterà $763\frac{5}{7}$ per misura della superficie sferica compresa da due circoli *BD*, *EF*.

Caso

Caso III.

Nella antecedente operazione abbiamo trovata la misura della superficie del segmento *ECF* essere $254\frac{4}{7}$ per le regole, che più abbasso daremo si troverà, che la misura della superficie del cono *EGF* contiene $487\frac{13}{14}$, essendo il diametro della base *EF* 23 il lato *GE* $13\frac{1}{2}$, dunque prese insieme queste due somme, averemo $742\frac{1}{2}$ per la misura della superficie del settore sferico *GECFG*, che si voleva sapere.

Della Misura degli Spazj, che si comprendono dalle altre Curve.

Problema X.

Seguitando l'ordine stesso, con cui si propose la misura delle principali *curve linee*, ora parliamo del modo di misurare quelle Aje, che dentro queste curve si trovano, e nel dare le proprie misure, non si crede, che sieno quelle per l'appunto, che avrebbero da essere, ma solo si pensa di dare una misura, che si accosti quanto può alla vera, non potendo riuscire il primo intento, se non riesce il modo di quadrare tutte queste curve non ancora scoperto dalla industria, e diligenza de' più accreditati Geometri. La prima delle proposte curve fu la Cicloide, sicchè di questa si ha da trattare, andando in cerca della misura, che conviene allo spazio Cicloidale.

Ciascuno, che in questi tempi sia mediocremente instruito nelle Geometriche invenzioni, non può dire di non sapere, che di più specie sia quella curva, che vien chiamata Cicloide, e che principalmente tutte a due classi riduconsi, trovandosi nella prima quella Cicloide, che è chiamata *Meccanica*, essendo la seconda l'altra Cicloide denominata *Geometrica*, portando queste per distintivo speciale il solo modo del loro nascimento, per cui quella si produce girando un circolo sopra una linea retta, quando il circolo si deve muovere sopra di un altro, come già abbiamo osservato al suo luogo, perchè l'origine della seconda apparisca, essendo poi nel resto tutte due queste curve convenienti, e specialmente nell'essere l'una, e l'altra descritte dal loro proprio ravvolgimento contro il dubbio dell'Ugenio, a cui parve di dover credere, e persuadersi, che una tale prerogativa non fosse per convenire a veruna altra curva

fuori

fuori, che alla sua sola, quando poi si è veduto accadere lo stesso a quell'altra, che è generata da' raggi solari, quando cadono, o si riflettono dalla sferica superficie di uno specchio, cioè a quella curva, che col suo proprio nome ci vien chiamata *Caustica*. Si aggiugne di questa proprietà la dimostrazione, non perchè sia di nostro intento, ma perchè colla medesima si scuoprono le altre proprietà, che a queste due curve sono rese comuni.

(a) Tav. I. Fig. 14. Si stabilisca ora dunque, che sia [a] *INF* la Curva Caustica, alla quale nel punto *I* si vegga applicato un refe, che li giri sopra perfettamente, e che mentre fa questo ravvolgimento descriva la curva *FPM*, che questa sarà la Curva Caustica dello specchio sferico *MGH*, il di cui raggio *CM* è doppio del raggio *CL*, generato dalla revoluzione di se stessa. Prolunghisi la linea retta *No* in *P*, e al punto *P* si ponga la perpendicolare *QPR*, corda della circonferenza *QGR*, che per legge della evoluzione toccherà la curva *MPF*, si applichi l'ordinata *SWQ*, e la retta *oQ* congiunga i punti *o*, *Q*. Tutte queste cose stabilite, la retta *NoP* si ha per uguale alla curva *NF*, e alle (b) Probl. VIII. due rette *No*, *Eo* per quello, che altrove si avvertì [b] in ordine al stabilirsi la somma de' raggi incidenti, e reflessi sempre uguale ad una curva, e nella presente supposizione alla curva *NF*; dunque tolto di comune *No* rimarrà *oE* uguale ad *oP* altra proprietà di questa curva per la quale, quando occorre, si rende facile la sua descrizione. Notinsi ora i triangoli *oPQ*, *oEC*, e perchè la retta *oP* è uguale alla retta *oE*, e l'angolo *EoC* è uguale all'angolo *NoC*, oppure *QoP*, e similmente l'angolo *oEC* uguale all'angolo *oPQ*, è manifesto, che ancora i lati rimanenti di questi due triangoli hanno da essere uguali fra loro, gli opposti ad angoli uguali, cioè il lato *CQ* deve essere uguale al lato *oC*, ed il lato *QP* al lato *CE*. Di più per essere simili i triangoli *oWQ*, *oEC* sarà come *oC* a *CE* così *oQ* ad *WQ*, e perchè *oQ* è uguale ad *oC*, dunque *WQ* deve essere uguale a *CE*. Finalmente, perchè *SW* è uguale a *CE*, le tre rette *SW*, *WQ*, *QP* saranno uguali fra loro, per essere tutte uguali alla retta *CE*; dunque da questa dimostrazione si comprende essere la medesima la costruzione delle curve *MPF*, *INF*, essendo che, come in questa la tangente *No* è uguale alla metà della ordinata

nata SQ, e l'angolo WQo è uguale all'angolo oQP, e però l'una, e l'altra curva deve eſsere della natura medeſima.

Diſcorreremo niente di meno in queſto luogo della prima ſola curva Cicloidale Meccanica, dando la miſura di quello ſpazio, che queſta curva comprende, perchè al ſuo luogo, ſecondo l'ordine ſtabilito nelle miſure delle curve, miſureremo lo ſpazio della curva Cicloidale Geometrica, o Cauſtica curva.

Nella Figura 27. che a queſto effetto è preparata, ſi vede in primo luogo lo ſpazio compreſo dalla curva della Cicloide OaA, dalla baſe OD, dall'aſſe AD, e ſi dimanda a che coſa queſto ſia uguale, e perchè per altra ragione ſi ſa, che il rettangolo DN circoſcritto alla Cicloide è quadruplo del circolo genitore di lei $DddA$, ed è doppio dello ſpazio Cicloidale $OaaAddD$, ancora lo ſteſſo ſpazio Cicloidale ſarà doppio del circolo genitore; ſicchè allo ſpazio Cicloidale aggiunto il circolo genitore, lo ſpazio Cicloidale cavo inſieme col circolo genitore ſarà triplo del medeſimo circolo genitore, e però miſurato il circolo genitore ſarà nota la miſura dello ſpazio Cicloidale intero.

Operazione.

Sia noto il diametro AD del circolo genitore DdA 15. ſia nota la circonferenza $50\frac{2}{7}$, ſarà per una delle paſſate[a] noto il circolo $201\frac{1}{7}$ è però di queſto preſo il triplo $603\frac{3}{7}$, queſta ſomma rileverà la miſura dello intero ſpazio Cicloidale. [a] Probl. xx

Dalla miſura della intera Cicloidale è facile paſſare alla miſura di qualunque porzione, per eſempio di quella porzione compreſa fra due tangenti $abbA$, e la curva Aa, cioè lo ſpazio Aba, rimanendo queſto ſempre uguale alla porzione del circolo compreſa ſotto l'arco Ad, e la corda dr, come nella figura 28. il triangolo dAr è ſempre uguale al triangolo iba.

Gli ſpazj ancora trilineari[b] $adAa$ compreſi dall'arco dA della curva Aa, e della ordinata ad, ſempre ſono doppj de' ſegmenti della Cicloide formati dalla curva Aa, e dalla ſotteſa Aa per eſſere gli interi parallelogrammi $dAba$ doppj degli interi triangli aAb, per eſſere li ſegmenti cavi della Cicloide aAb in- [b] Fig. 27.

ſieme col ſegmento circolare *a d* doppj del ſolo ſegmento cavo Cicloidale, per eſſere i rimanenti trilinei *a d A* doppj de i rimanenti ſegmenti conveſſi della Cicloide *A a*, e però anche le Zone *a d d a* ſaranno doppie de ſettori Cicloidali *a A a* formati colla curva *a a* colle ſotteſe *a A*, *a A*.

Quando poi l' ordinata *a d* paſſaſse per il centro del circolo genitore *C*, allora il ſegmento conveſſo della Cicloide ſarebbe uguale alla metà del quadrato del raggio, ma ſe arrivaſse al punto *r*, quarta parte della altezza della Cicloide, in queſto caſo tutta la Figura *a A C d a* ſarebbe doppia del ſegmento *a A d* compreſo dalla corda *A d*, dalla curva *a A*, e dalla porzione della ordinata *a d*, cioè ſarebbe doppia del triangolo equilatero *d A c*, che è uguale a queſta ſteſso ſegmento, ed in queſto caſo medeſimamente il ſegmento *A a r* nella Semicicloide, o il ſuo doppio nella intera Cicloide ſarebbe uguale alla metà, e all' intiero triangolo equilatero, che ſi inſcriverebbe nel circolo genitore.

(a) Fig. 29. La miſura dello ſpazio della Cicloide contribuiſce aſsai per miſurare lo ſpazio *O N A Q* della curva Ciſsoidale *N o O* [(a)], imperocchè tirata la linea *N d* perpendicolare alla *N o*, rimane queſta parallela alla corda *A d*, alla tangente *a b* nella Cicloide, e fa che tutto lo ſpazio Ciſsoidale *O o N A Q* rieſca uguale allo ſpazio Cicloidale *C N d d A C*, come qualunque porzione *N r o*, *o r r O* nella Ciſsoide rimane uguale alla porzione *C a n*, *n a a n* nella Cicloide; che però aggiunto alla Ciſſoide lo ſpazio del ſemicircolo *N d d A*, tutto lo ſpazio *O o N d d A Q* rieſce quadruplo del ſemicircolo medeſimo, e quadruple rieſcono le porzioni *O N d* de i ſegmenti circolari *N d*, come finalmente di queſti circolari ſegmenti rieſcono tripli quei ſettori, che ſi formerebbero dal diametro *N A* dalla porzione della curva Ciſſoidale *N o O*, e dalle linee tirate dal punto *A* a i punti *o O* della ſteſſa curva Ciſſoidale.

Può altresì alla miſura dello ſpazio Ciſsoidale unirſi la miſura dell' altro ſpazio infinito, compreſo da quella curva, che *Trattoria* viene chiamata, e ſuo aſſintoto, quando ſia di quella ſpecie, che mantiene ſempre le tangenti uguali fra loro a qualunque punto gli ſieno tirate, mentre già è rimaſto provato da i Geometri eſſere queſto ſpazio da per tutto uguale ad un quadrante di quel circolo, che ſi fa da un raggio

gio

gio, che sia uguale alla tangente di questa curva qual sarebbe nella descritta curva $C a A$ [a] il quadrante del circolo [(a) Fig. 30.] ooG fatto col raggio NA uguale alla tangente $B a$, siccome pure si sono provate le altre parti dello spazio medesimo corrispondere a i respettivi proporzionali segmenti dello stesso quadrante.

Misura dello spazio spirale Logaritmico.

Prolema XI.

Lo spazio compreso da questa curva spirale Logaritmica, o geometrica, secondo le misure, che si sono già prese da' Geometri, si dice avere ragione submultiplice dupla al suo circoscritto triangolo [b], dunque essendo nota la misura [(b) Tav. III. Fig. 31. n. 2.] di questo, resterà nota la misura dello spazio compreso dalla curva spirale geometrica $C a a a A C$.

Scendendo ora alle misure particolari degli spazj di questa curva, si osservano primieramente quelli spazj, che in infinito sono continuati per le molte rivoluzioni della spirale intorno al centro, e si dice, che hanno fra loro la ragione medesima de' quadrati de' loro raggi, perche divisi questi spazj in molti triangoli $A C a$, $a C a$, che per natura di questa spirale sono tutti simili, dovranno stare tutti fra loro, come i quadrati de' loro lati omologhi continuamente proporzionali, secondo la condizione di questa curva, però come ciascuno di essi sta all' altro, a cui si confronta, così tutti quelli, che sono rinchiusi nel primo spazio $A\ C\ a$ staranno agli altri contenuti nello spazio $a C a$, come il quadrato di $A C$, al quadrato di $a C$, cioè lo spazio, che nella spirale si rivolge dopo $A C$ dentro la spirale, sta allo spazio, che dopo $A C$ dentro la spirale stessa si ravvolge, come il quadrato di $A C$ sta al quadrato di $a C$.

Se si cerca in secondo luogo la ragione dello spazio $A C$ a all' altro infinitamente torto, dopo il minor raggio $C\ a$, si dice, che hanno questi due spazj fra loro quella ragione, che passa fra la differenza de' due quadrati di $A C$, $a C$, ovvero $C i$, al quadrato di $a c$, oppure $C I$, cioè hanno fra loro la ragione della porzione della zona $F\ A\ i\ a$ al settore $I a C$,

 onde

onde potendosi avere la misura sì della zona, che del settore, ci servirà questa di regola per la misura dimandata de i dati spazj.

Anche i trilinei *a I A* paragonati fra di loro, o alle porzioni rimanenti *a A F*, o alle zone *F A I a*, dovranno avere quella ragione, che gli angoli delle corrispondenti porzioni trilineari della Logistica, generati dalla rivoluzione intorno all'asse, hanno fra loro, se si faccia fra loro il confronto, o hanno con tutti i Cilindri circoscritti, se si paragonino a questi, de' quali perchè ancora non se n'è data la misura, si aspetterà di dare questa al suo luogo, per meglio allora vedere col riscontro della operazione quanto ora si propone per la pratica della medesima.

Misura dello spazio compreso dalla curva Logistica.

Problema XII.

Dalla misura dello spazio della curva Spirale Logaritmica, con ragione si passa a misurare gli spazj della curva Logistica, trovandosi fra l'una, e l'altra di queste due curve non poca relazione, a motivo di quelle proprietà, che a tutte due convengono, come nella figura precedente si vede, e principalmente per avere la spirale Logaritmica l'origine dalla curva Logistica, come si manifesta nella figura 32. Nella prima citata figura si osserva, che come il circolo *C A B* è diviso in parti uguali *A F*, *F f*, così ancora la linea retta *A Q* è divisa in parti uguali ne' punti *C G Q*, &c., e similmente, siccome i raggi, che dal centro *C* del circolo si tirano alla Spirale Logistica, cioè *C A*, *C a* &c., decrescono in proporzione geometrica, così le ordinate a i punti *C G Q* della retta *A Q*, vanno scemando nella medesima proporzione, e così, se nella prima curva i raggi *C A*, *C a* essendo come i numeri, gli archi corrispondenti *F A*, *f A* sono come i logaritmi; così ancora nella curva Logistica le porzioni dell'asse stanno alle ordinate, come i logaritmi stanno a i numeri naturali, e se nella prima curva la ragione di due quali si vogliono raggi, sta alla ragione di altri due nella medesima proporzione, in cui stanno gli archi framezzati a due

quali

quali si vogliono raggi; così ancora la ragione di due quali si sieno ordinate nella curva Logistica, come *B A*, *C n* sta alla ragione, che fra due altre si trova *B A*, *D Q*, come quella, che è fra le parti dell' asse *C A*, *Q A*, che sono segate da queste ordinate, e così si discorre delle altre proprietà, delle quali quì si lasciano i confronti per non essere cose necessarie al nostro proposito, per cui solo si aggiugne, come dalla curva Logistica talvolta si genera la spirale Logaritmica, quando raccolto tutto l'asse *A Q* nel punto del centro, e la retta *B K* ridotta a curva circolare intorno al raggio *B A* col piegarsi di tutte le sue porzioni uguali a foggia d'arco se li ordinano le rette *B A*, *C n*, *Q D* come tanti raggi, che partendo dal parallelismo, vanno tutti ad unirsi nel centro medesimo, e come viceversa si può ridurre la spirale Logaritmica alla prima curva Logistica, riacquistando le linee, e la loro prima rettificazione, ed il primo loro parallelismo.

Avvertite queste proprietà, per le quali queste due curve si osservano avere molto di comune fra loro, non è, se non che opportuno il dare in questo luogo le misure generali, e particolari della curva Logistica, per rimanere intesi, qualmente lo spazio di questa non dee aversi doppio dello spazio di quella, come alcuni si erano già persuasi, a motivo, che i parallelogrammi *A Z*, *X Z*, &c. trasmutandosi la curva Logistica nella spirale Logaritmica, si risolvevano in tanti triangoli, metà de' parallelogrammi, imperocchè, se questo effetto è vero, quando i parallelogrammi, ed i triangoli mantengono la medesima base, e la medesima altezza, non è già vero, quando l'una, o l'altra di queste parti, o tutte due si mutano, come realmente accade, quando la curva Logistica si trasmuta nella spirale Logaritmica. Per quello dunque, che appartiene allo spazio compreso fra due ordinate nella Logistica, qual sarebbe lo spazio *A B G H*, se si dimanda a che cosa sia uguale, si dice, che questo è uguale al rettangolo fatto dalla subtangente *G F* nella differenza delle medesime ordinate, cioè *i B*; se poi si dimanda, che ragione abbia allo spazio infinito, formato sotto l'ordinata *G H*, si risponde avere a questo la ragione medesima, che mantiene la porzione dell' ordinata *L H* alla porzione dell' ordinata

G H,

GH, ſiccome queſto ſteſſo ſpazio infinito, paragonato al triangolo GFH, ſi fa vedere eſſere doppio di eſſo. Si poſſono ancora paragonare le miſure degli ſpazj $BACn$, $BAGH$, e ſi trova, che ſtanno fra loro come nP ad HL; che ſe dal punto H foſſe tirata la Hi parallela all'aſſintoto AF, e la tangente FHO, perchè ſi formaſſero gli ſpazj trilineari HiB, Hqn, queſti paragonati fra loro, ſi troverebbero avere la ragione medeſima, che hanno le parti delle ordinate fra la curva, e la tangente, cioè Bo, rn. Come finalmente [a] la ragione di PQ alla RN porzioni delle ordinate fra la curva, e la tangente Ao eſprimerebbe la ragione, che ha la miſura dello ſpazio AQB allo ſpazio ANC. Da tutte queſte miſure, e proporzioni di miſure, che generalmente convengono alla curva Logiſtica, ſi prende regola per altri caſi ſingolari, che ſi poſſono proporre nelle miſure di alcuni altri ſpazj, che ſi diſtinguono in queſta curva da' primi già dichiarati.

(a) Fig. 33.

Se foſſero dati due ſpazj Logiſtici, che foſſero egualmente alti, come [b] ſarebbero gli ſpazj $ABCn$, $CnGH$, &c. la medeſima ragione ſi troverebbe fra queſti, che ſi trova fra l'ordinata BA all'ordinata Cn, e fra l'ordinata Cn all'ordinata GH, la qual ragione ſi eſtenderebbe a ſpazj infiniti dopo BA, dopo Cn, ed ancora a quegli ſpazj infiniti egualmente alti, che ſi tagliaſſero dagli ſpazj $HBAGR$, $HnCGR$ infiniti dopo R. Ma ſe ſi dovrà conſiderare la porzione della Logiſtica concava HRB [c] paragonata alla conveſſa brB dopo tirata alla tangente OBN la parallela Hb, tutte due queſte porzioni ſaranno uguali fra loro, e aggiunto all'una, ed all'altra lo ſpazio BHS inſieme col rettangolo SBR, il rettangolo HRr ſarà uguale allo ſpazio logiſtico compreſo dalla curva Hb, e dalla retta HSa, e però il rettangolo GRr dee eſſere uguale al rimanente ſpazio $GHBbg$, cioè al rettangolo fatto dalla ſubtangente OF in RH inſieme con br, oppure in Ss; onde anche la linea, oF ſtarà a Gg, come GR, ovvero BF ad sS.

(b) Fig. 32.

(c) Fig. 34.

Potrebbe talora accadere, che dentro la curva Logiſtica col medeſimo aſſintoto ſi trovaſſe deſcritta un altra curva Logiſtica, e che ſi doveſſe miſurare il ſuo ſpazio; tale ſarebbe [d] la Logiſtica BNM, BCA. Lo ſpazio della prima ſarebbe

(d) Fig. 35.

rebbe *F B N M*, lo spazio della seconda *F B C A*, in qual ragione dunque si troverebbero fra di loro?

La dimostrazione de' Geometri fa vedere il primo spazio essere la metà del secondo, sicchè la misura di uno di essi ci rende nota la misura dell'altro, e perchè si sà, che lo spazio secondo è la metà del triangolo *F B O* determinato dalla tangenre *B O* della prima Logistica, perciò lo spazio primo sarà uguale a questo triangolo.

La misura della subtangente nella Logistica contribuisce notabilmente alla misura del triangolo, che talvolta si dice o uguale, o doppio di alcuni spazj logistici, onde torna opportuno il proporre la proporzione della lunghezza di queste subtangenti alla parte dell' assintoto, che sopra esse rimane. Stabilisce l' Ugenio una tal proporzione coll' approssimarsi quanto mai può alla parte cercata, e vuole, che questa proporzione si esprima, come il 43429448190325180+, al 30103999566398119 5, o come il 13 al 9, numero più facile per quelle operazioni, che potessero venire al nostro bisogno in una tale materia. Determina il P. Grandi questa proporzione in un altra maniera, quando dice, che nella figura 36. la subtangente *T G* della Logistica *Q R S* sta alla rimanente porzione dell' assintoto *T B*, o *P R*, come il parallelogrammo *K O P B* porzione dello spazio iperbolico *A Q B D* sta allo spazio *O P Q R*, che ritrova in mezzo alle curve *A O N*, *Q R*, e la retta *O P* parallela all' assintoto *K G*.

Nel misurare lo spazio infinito di questa curva Logistica, perchè si è detto, che è il doppio del triangolo fatto dalla subtangente nella ordinata fra la curva, e l' assintoto, acciocche un tal detto non abbia da cagionare della difficoltà in chi potesse non volere persuadersi della verità della dimostrazione matematica, che da' Geometri si dà al suo luogo, per questo ora si avverte, qualmente in ogni quantità, o sia linea, o sia superficie, o sia corpo, due misure si possono sempre considerare, o tutte due finite, o tutte due infinite, o una di esse finita, e l' altra infinita, per esempio può essere infinita di multitudine, e non di mole, di lunghezza, e non di latitudine, di lunghezza, non di grossezza, e di grossezza, ma non già di lunghezza. Quando dunque si dice, che una quantità, o spazio infinito è uguale ad una quantità, o spazio

zio infinito, ben si vede, che non s'intende di parlare di una quantità, o spazio infinito, secondo tutte le sue parti, ma si suppone infinito, secondo una sola, rimanendo secondo l'altra, commensurato, e limitato, in modo di poter salvare l'uguaglianza con un altro, che secondo tutte due le sue parti è finito, e limitato, sicchè sembra, che una sola spiegazione possa servire per toglierci il maggior pregiudizio, che si oppone alla evidenza di una delle più belle geometriche speculazioni.

Misura dello spazio formato dalla curva Loxodromica.

Problema XIII.

La curva Loxodromica, che nella figura 37. è descritta, viene notata sotto le lettere *ALHG*. Lo spazio, che dalla medesima si comprende è *APG* verso del polo *P*, oppure *AGD* verso l'equatore *AD*, talchè apparisce essere questo spazio una porzione di superficie sferica compresa tra la curva Loxodromica *ALHG*, e il polo *P*, o l'equatore *AD*, e perchè la retta *AP*, *PD* fa figura di Meridiano, la curva *AD* tiene le veci di Equatore, e la porzione dell'arco *GD* mostra la misura della latitudine del luogo, sotto del quale passa la curva Loxodromica, e gli altri circoli *ILHE*, *MRF*, *NOG*, sono li circoli paralleli all'Equatore, perciò chiaramente si vede, che la misura di questo spazio dipende dalla misura dello spazio di un triangolo sferico, la quale, per non darla due volte, la serbiamo al luogo proprio, dove di una tale misura ci occorrerà ragionare. Si aggiugneranno in questo luogo le misure degli spazj, compresi da altre qualunque sieno queste linee curve, come nella figura 38. sarebbero gli spazj compresi dalla curva *CaA*, e dalla curva *CgG*, cioè lo spazio *CaAGg*, e l'altro *CaAN*; e si vuole, che questi due spazj sieno uguali fra di loro, perchè essendo sempre il parallelogrammo *GD*, e qualunque altro, che si potrebbe fare dentro il primo spazio uguale al parallelogrammo *DN*, e qualunque altro, che si farebbe dentro il secondo, per aggiugnersi, o togliersi egual porzione *MAD*, *DFA*, che rende fra loro uguali gli parallelogrammi *HA*, *NF*, o i loro

tra-

trapezzi *H G D A F*, *N I D A*, per essere infinitamente piccola la porzione *D A*, è di necessità, che tutto il primo spazio *C a A G g* sia eguale a tutto il secondo *C a A N*, e che tutti due presi insieme, sieno il doppio di un solo, come tutto il parallelogrammo *N G* è doppio del triangolo *N B A*, e lo spazio della figura *B G g C* è doppio dello spazio, che sta dentro al trilineo *C A B*.

Mutandosi ora la precedente figura nell' altra 39. *c A N* coll' unione di tutte le altre linee, che in essa appariscono, si fa vedere, come prima, che lo spazio *N o o G A* è uguale allo spazio di questa figura, cioè allo spazio *c A N*, e che i trapezzj corrispondenti *r A G O*, *r a A N* sono uguali fra loro per la similitudine di ragione ne' lati *B N*, oppure *G A* ad *r a*, e di *N A* ad *A r*, i quali ci formano gl' intieri parallelogrammi *G A r*, *N A r* scemati di piccolissima, ed eguale porzione in uno de' loro estremi. Potrebbe prendersi nella tangente *A B* una infinitamente piccola porzione corrispondente ad *A a*, e tirarsi de' raggi *A N*, *a N*, *a N*, per aversi il parallelogrammo *G A a*, ed il triangolo *N A a* sopra la medesima base *A a*, e fra le medesime parallele *A a*, *G N*, ed in questo caso il parallelogrammo delineato sarebbe doppio del descritto triangolo, e però tutta la figura *c a A G o o N* sarebbe doppia di tutto lo spazio *c A N*, e dividendo lo spazio *o o G A N*, sarebbe uguale a *c A N*, come nella figura 40. *N a A* preso il punto *N*, dove si vede, lo spazio *N o o O A N*, sarebbe doppio del trilineo *N a A* sempre uguale al triangolo *d a N*, metà del parallelogrammo *d a o b* uguale al detto spazio *N o o O A a N*.

Finalmente, se lo spazio *N o o S A* appartenesse alla figura 41. in cui fosse descritto ad una parte il quadrante *NAC*, si dovrebbe questo prendere per uguale allo stesso quadrante circolare, e qualunque sua porzione *N o r* uguale alla metà de' segmenti compresi dall' arco *C A*, dal seno retto *a r*, e seno verso *A r*. Anche le zone *o r r o* si avrebbero uguali alle zone tramezzate all' arco *a a*, e ordinate all' asse *N C*; e gli infiniti spazj *o o N A S* agli spazj finiti fra l' arco *A a*, , il raggio *A N*, e il seno dell' arco *a C*; come finalmente i settori convessi *N C a* si direbbero uguali alli settori cavi *N a o*, e le porzioni comprese dalla curva *N o*, e sua sottesa a' tri-

 linei

linei ristretti fra l'arco *a C* sua tangente, e intercetta porzione dell' asse; e l' arco stesso *C a* avrebbe al suo seno *N r* la ragione dello spazio *N o a C* al rettangolo *C N r*, oppure *A N r*.

Misura dello spazio compreso dalla Curva Caustica.

Problema XIV.

Ecco quel luogo, a cui si è riserbata la misura dello spazio compreso dalla curva caustica, non perchè questo non si fosse potuto assegnare dopo la misura dello spazio cicloidale, ma solo per non pervertire l'ordine stabilito per le prime misure delle medesime curve. La figura sopra la quale si hanno da dare queste misure è la 14.[a] Il primo spazio, che si misura è quello compreso dalla circonferenza *A L F*, e dalla Cicloide geometrica, o curva Caustica *A M P F*, e si dice, che è eguale al circolo *A L F D*, o è quadruplo del circolo genitore, che ha per diametro *L M*.

Il secondo spazio è lo spazio *F P M Q G*, e questo è uguale al circolo genitore. Il segmento del circolo *E o F* sempre è quadruplo dello spazio *F N O*. Lo spazio *F O P* è sempre doppio del segmento del circolo *E o F*. Lo spazio *N F P* è sempre nonuplo dello spazio *F N o*. Lo spazio *M P Q* è sempre uguale al segmento del circolo *L B o*. Lo spazio *F o P* sta allo spazio *O L M P*, come nel quadrante del circolo lo spazio *F o E* sta allo spazio *E o L C*. Lo spazio poi *M Q P* è al rimanente spazio *Q P F G*, come nel quadrante del circolo sta il segmento *L B o* al rimanente spazio *B o F C*. Lo spazio *I L o F* è la quarta parte del quadrante *L C F*, che dalla curva Caustica *I N F* rimane diviso in spazj, che stanno fra loro, come il numero al numero. Lo spazio *H G F*[b] sempre è quadruplo del segmento *G F* del circolo genitore; e finalmente lo spazio *A L F* sempre è doppio del segmento *F L* del medesimo circolo genitore; dunque è facile in tutte queste operazioni assegnare la misura allo spazio proposto, perchè è facile assegnare la misura del circolo, con cui sempre si fa il confronto.

(a) Tav. I.

(b) Fig. 13.

Mi-

Misura dello spazio Parabolico.

Problema XV.

Può servire alla misura dello spazio Parabolico la figura 38. [a] nella quale o si rappresenta una Parabola *ACN*, che sia quadrata, se la subtangente *NB* è doppia della porzione tagliata *NC*, o si rappresenta una Parabola, che è cubica, se la data subtangente della sua porzione è tripla, o si rappresenta una Parabola, che è quadratoquadratica, o qualunque altra. Se dunque si verifica il primo caso, essendochè lo spazio *AaCgG* è doppio dello spazio *CEA* nel trilineo, ed uguale allo spazio *ACN* nella Parabola, ancora lo spazio *ACN* sarà doppio dello stesso spazio *CEA* nel trilineo compimento del parallelogrammo descritto intorno alla parabola, dunque lo spazio *ACN* nella Parabola sarà due terzi del circoscritto parallelogrammo.

(a) Tav. III.

Nel secondo caso si determina, che la ragione della subtangente alla porzione tagliata si mantiene fra lo spazio *Aa CgG*, cioè *ACN* nella Parabola, e lo spazio *CEA* nel trilineo parabolico; che però se la prima ragione è tripla, ancora la seconda sarà tripla, e lo spazio dentro la Parabola, rimanendo triplo del trilineo, sarà tre quarti del circoscritto parallelogrammo. Generalmente poi in tutti gli altri casi, le misure dello spazio dentro la Parabola si dovrà regolare rispetto allo spazio dentro il trilineo, come si regolerà la ragione di tutta la subtangente ad una sua qualunque porzione tagliata. Non solo nella Parabola si dà la misura dello spazio, che è dentro ad essa, ma si dà altresì la misura della superficie del conoide parabolico. Per avere questa misura, si prenda nella figura 42. la retta *BE* uguale a *BD*, e si tiri alla Parabola la tangente *AE*, e segato *AD* in *G*, stia *AD*, a *DG* come *EA* ad *AD*, e poi si prepari una linea *I* uguale ad *AE* † *DG*, che sarà la prima proporzionale, susseguentemente un altra *L* uguale alla terza parte di *AC* per terza proporzionale; onde quella linea, che si troverà fra queste due, sarà una media proporzionale, che presa come raggio, produrrà un circolo, che sarà uguale alla superficie del conoide parabolico.

 Mi-

Misura dello spazio Iperbolico.

Problema XVI.

1. La misura degli spazj iperbolici, perchè con qualche ordine si manifesti, si darà prima, considerando l' Iperbola da se sola, e poi si darà considerandola paragonata alla Logistica, e alla Spirale. Mentre si considera la misura dello spazio iperbolico assoluto, compreso fra l' Iperbola del primo grado [a], che è quella, che ha la subtangente *B N* uguale alla distanza del centro *N D*, e suoi assintoti, cioè lo spazio *A N b*, questo prima si dice infinito assolutamente, poi si fa vedere uguale al parallelogrammo *N A O D*, essendo l' Iperbola del secondo grado, cioè quando la subtangente *N B* è la metà della distanza dal centro *D N*; finalmente si dice, che è la metà un terzo del medesimo parallelogrammo, &c. se l' Iperbola si avanza al terzo, al quarto grado, &c. cioè quando le distanze dal centro sono triple, quadruple, &c. delle stesse subtangenti.

(a) Fig. 43.

2. Venendo gli spazj compresi tra l'Iperbola, assintoto, e parallele ordinate fra loro con proporzione, come sono gli spazj *D C N F*, *K L Q R* nella fig. 44. questi sono sempre uguali, ma non sarebbero più uguali quando fossero compresi da ordinate, e parallele, che mutassero proporzione; onde, se la ragione di *D C* ad *N F* è duplicata, triplicata, &c. della ragione di *O P*, a *Q R*, il primo spazio sarà triplo, doppio, sesquialtero, &c. del secondo.

3. Di quì apparisce, che ragione abbia d' avere lo spazio *N A Q F* [b], compreso dalla linea iperbolica *N O A*, dagli assintoti *B Q*, *B D*, de' quali il primo sia una ordinata alla Logistica *Q R S*, e il secondo sia l' asse della Logistica, e alle linee *N F* prolungate alla Logistica stessa, allo spazio *O A Q P*, perchè sarà la medesima della ragione di *F S* a *P R* parte della *OP* alla Logistica prolungata, cioè sarà uguale al rettangolo *O P Q*. Che se poi lo stesso spazio iperbolico *O P Q A* si paragonasse al parallelogrammo *K O P R*, avrebbe a questo la ragione medesima, che ha la parallela *R P* alla subtangente, o parametro *G T*, o per la similitudine de' triangoli *PCR*, *T G R*,

(b) Fig. 36.

TGR, ſtarebbero fra loro, come *PC* a *TR*, e la ragione di queſto parallelogrammo K*OPB* al quadrato della ſubtangente alla Logiſtica *TG*, ſarebbe la medeſima, che la ragione del ſolido iperbolico, generato dalla revoluzione del predetto ſpazio *OPQR*, intorno ad *OP* al ſolido generato dallo ſpazio corriſpondente *TRQB* nella Logiſtica raggirato intorno a *BQ*.

4. Anche gli ſpazj iperbolici *AIM*K, *Aim*K [a] compreſi dall' aſſintoto *CG* dalla curva iperbolica *mM* K dalle porzioni *AI*, *Ai* dell' aſſintoto *AC* uguali alle differenze degli eſtremi rami *aF*, *af*, ſtanno fra loro, come *AF* ad *Af*, oppure come *ACF*, ad *ACf* archi, o ſettori fatti dal raggio della Spirale geometrica *Aaa*, oppure ſtanno alli corriſpondenti ſettori circolari nella ſteſſa ragione, in cui ſi trova la minima delle ordinate dentro lo ſpazio iperbolico K*A* alla metà della ſubtangente *CB*; che però, ſe queſta ragione è di egualità, lo ſpazio iperbolico *MIA*K, ovvero il rettangolo K*AI* ſarà doppio del ſettore *ACF*, e ſe la ragione è multiplice dupla, gli ſpazj iperbolici ſaranno uguali a' ſettori circolari; ſicchè conoſciuti queſti, ſarà conoſciuta la miſura dello ſpazio iperbolico *AIM*K, *Aim*K. (a) Fig. 31.

5. Si ſtabiliſce ora, come il parallelogrammo *ALBE* [b] contenuto dalla Iperbola *AG*, e ſuoi aſſintoti *LBBF*, inſcritto nello ſpazio iperbolico, ſta allo ſpazio iperbolico *AHGFE* compreſo da due ordinate *AE*, *FG* (una doppia dell' altra per ſupporſi la retta *FE*=*EB*) nella ragione del 10 al 7. (b) Tav. IV. Fig. 45.

6. Si ſtabiliſce pure ſul fondamento delle proporzioni di quelle miſure, che nel numero 3. ſi ſono avvertite, ſu la figura 36. [c] che ſe lo ſpazio iperbolico [d] K*BRA* ſta a qualunque altro *krRA*, come K*Ba*K*b*, e dividendo, ſe lo ſpazio iperbolico K*Brk* ſta ad *rRAk*, come *Sb* ad *bk*, preſa la comune altezza K*P*, gli ſpazj iperbolici *krRA*, K*Br*K ſaranno uguali al rettangolo di *P*K in *kb*, e di *P*K in *bs*, come gli ſpazj, o trilinei iperbolici *rBS*, *rBs* conveſſi, e concavi, ſecondochè o ſotto, o ſopra il punto *B* ſi tirino le parallele *AQ*, *NK*, *nb* all'aſſe della Logiſtica, ſtanno fra loro nella ragione di queſte ſteſſe parallele, per eſſere il rettangolo, che da ciaſcheduna di eſſe ſi fa nel lato *PK* uguale al trilineo iperbolico *RBM*, *rBS*, &c. (c) Tav. III. (d) Fig. 46.

7. Si

7. Si stabilisce in oltre, che se la misura del parallelogrammo, che si è detto nel numero 3. stare allo spazio iperbolico, come *G T* ad *R P* sia nota, cioè si esprima in parti 0. 4342944819. qualunque spazio iperbolico compreso fra due ordinate ad uno degli assintoti, starà a questo parallelogrammo come il logaritmo di quel numero, che esprimo la proporzione delle medesime ordinate, cioè come la differenza de' numeri de' Logaritmi, che manifestano la proporzione delle ordinate; sta al numero 0. 4342944819. preso il Logaritmo di dieci figure sopra del zero. E al contrario, se alla subtangente della Logistica si dia quella misura, che si dà al parallelogrammo, in questo caso la distanza delle due ordinate alla Logistica dee mostrare il Logaritmo, che esprime la ragione delle medesime ordinate, o la differenza de' Logaritmi, che corrispondono a que' numeri, fra' quali si trova la ragione delle ordinate alla Logistica medesima, ed alla Iperbola, e perchè la subtangente sta a questo intervallo delle ordinate, come il parallelogrammo della Iperbola stà ad un congruo spazio iperbolico, sarà cosa facile il determinare col numero la misura di qualunque spazio iperbolico, tostochè si sarà data la ragione delle estreme ordinate.

8. Si stabilisce per ultimo il modo di misurare tutto lo spazio iperbolico *A O L F* [a], e questo si dice, che è uguale al rettangolo fatto dalla subtangente della Logistica *C D*, o dal semiparametro della parabola *F L* nella curva parabolica *F T*, che perpendicolarmente sega la Logistica *M N B*.

(a) Fig. 47.

Quando in numeri si voglia vedere la misura dello spazio iperbolico, col mezzo de' Logaritmi, eccola quale la propone l' Ugenio in questi termini.

Sia *D A B* [b] la porzione della iperbola cogli assintoti *C S*, *C V*, si tirino le *D E*, *B V* parallele all'assintoto *S C*.

(b) Fig. 48.

Si prenda la differenza de' Logaritmi, i quali convengono a' numeri, che stanno fra loro, come le rette *D E*, *B V*, e di questa differenza si cerchi il Logaritmo, a cui si aggiunga costantemente questo Logaritmo 0. 36221, 56887. la somma sarà il Logaritmo del numero, che esprimerà lo spazio *D E V B A D* compreso da tre rette *D E*, *E V*, *B D*, e dalla curva *B A D*, e sarà questo numero una somma di quelle parti, delle quali il parallelogrammo *D C* ne conta 10000000000.

onde

onde poi speditamente si potrà ancora avere la misura dell' aja della porzione *D A B*.

Esempio.

Sia per esempio la proporzione di *D E* a *B V* quella, che si trova fra il 36 al 5. dal Logaritmo del 36., che è 1. 55630, 25008. si levi il Logaritmo di 5., che è 0. 69897, 00043. dovrà rimanere 0. 85733, 24965. per la loro differenza; di questa differenza ora si prenda il proprio Logaritmo 9. 93314, 92856, a cui si aggiugne sempre 0. 3622, 56887. onde sarà la somma 10. 29536, 49743, e questa rappresenterà lo spazio *D E V B A D*.

Di questo Logaritmo trovato, che contiene undici figure, giacchè è il 10. la sua caratteristica, si cerchi il numero, che gli sia prossimamente minore, e questo si trova 19740.

Poi dalla differenza del medesimo Logaritmo, che prossimamente gli succede nella Tavola, si cavino le altre figure 81026. da scriversi dopo le prime, e si faccia 197408, 1026. con uno zero di più nel fine dove è il punto, perchè tutto rappresenti undici figure, e si vede, che l' aia dello spazio dato contiene 197408, 10260. di quelle parti, delle quali il parallelogrammo *D C* contiene 10000000000.

Per avere ora la misura dello spazio della superficie del Conoide iperbolico, si dee dividere l' asse *A B* [a] della Iperbola nel punto *H*, per rendere *A H* uguale alla metà del parametro *A G*, dipoi si fa, che la retta *H F* stia ad *F A*, come *F A* ad *F I*, e fra le rette *A F*, *F I* si ponga la media proporzionale *K F*, e col vertice *K* si descriva l' Iperbola *K L M*, i di cui lati sieno reciproci a i lati dell' altra *A C*, e si avrà lo spazio iperbolico *A L B M* con ragione alla metà del quadrato di *C B* simile a quella della superficie del Conoide *C A D* al circolo della sua base *C D*, oppure la metà del quadrato di *C B* starà alla superficie iperbolica *L A M B*, come il circolo della base *C D* sta alla curva superficie del Conoide iperbolico, però misurato il quadrato, misurata la superficie iperbolica, misurato il circolo, e con queste tre misure trovata la quarta proporzionale, in questa quarta misura si rileverà la misura, che si doveva trovare.

(a) Fig. 49.

Se

Se mai si volesse trovare una misura, che ci misurasse tanto la superficie curva di un Conoide iperbolico, quanto di una sferoide compressa, si prenderebbe una sferoide (a), che avesse per proprio asse la retta SI, e intorno a questa sferoide si dovrebbe descrivere l'Elisse $STIK$ col centro O, coll'asse maggiore TK il quale si dovrebbe procurare, che avesse al lato retto quella ragione, che ha una linea divisa in media, ed in estrema ragione alla sua parte maggiore. Si prenderebbe poi (b) una linea BC in potenza doppia del semidiametro minore SO, e prolungato in A, si farebbe BA in potenza doppia di OK semidiametro maggiore, e prolungata in F, prolungata in E si renderebbero quattro continue proporzionali BC, BA, BF, BE, e prolungata in P, si prenderebbe PE uguale ad EA, e intorno a PF si concepirebbe generato il Conoide iperbolico QFN coll'asse FP. Il lato FB metà del lato transverso, sarebbe la linea, che si aggiugnerebbe all'asse FP, la linea BC sarebbe la metà del lato retto; dunque di questo Conoide la superficie curva insieme colla superficie della sferoide SI, sarebbe uguale al circolo fatto dal raggio ML, uguale in potenza al quadrato TK col doppio quadrato SI.

(a) Fig. 50. n. 1.

(b) n. 2.

Misura dello spazio della curva Catenaria, o Funicularia.

Problema XVII.

Nella figura 51. si dà lo spazio $NKVAN$, perchè si misuri, e supposto, che l'angolo CGA contenga gradi 60. sarà lo spazio dato uguale al rettangolo fatto dall'asse BV, e da quella linea, che in potenza è tripla del quadrato della stessa BV. Che se i lati GB, BA, AG staranno fra loro, come il 3. 4. 5. sarà il medesimo spazio uguale al rettangolo fatto dalla settupla parte del quadrato di BV colla parte ottava.

Serve questa curva Catenaria alle misure delle superficie de' solidi, perchè girando essa intorno all'asse BV, la superficie, che risulta riesce uguale al circolo, il di cui raggio è in potenza il doppio del rettangolo BVG.

Mi-

Misura della Elisse, o Sferoide allungata a' Poli.

Problema XVIII.

Egli è vero, che il circolo circoscritto alla Elisse sta alla medesima, come il Diametro maggiore della Elisse, cioè del circolo sta al diametro minore della medesima Elisse, sicchè disposti per la regola del tre i primi numeri proporzionali, cioè il diametro maggiore per primo proporzionale, il diametro minore per secondo, la superficie del circolo per terzo, il quarto, che si dee trovare, rappresenta la misura dello spazio della sferoide allungata, o lo spazio della Elisse, che pure si troverebbe, quando fra la metà de' due raggi si trovasse la media proporzionale, e con essa, come raggio si descrivesse il circolo, mentre la superficie circolare di questo darebbe la superficie della Elisse, alla quale finalmente si approssimerebbe il quarto proporzionale trovato dopo questi numeri 5. $6\frac{58}{117}$, e dopo quel numero, che formerebbe l' asse maggiore dell' Elisse multiplicato per il minore, essendosi potuto notare dagli Astronomi, che la proporzione, che passa fra l'Elisse, e questo rettangolo è la massima di quella, che si trova fra il 5. e il $6\frac{58}{117}$.

Nasce di quì il modo facile di misurare qualunque porzione di Elisse, perchè inteso sempre il circolo circoscritto alla Elisse (a), si dirà, come tutta la superficie del circolo sta al suo segmento *BAT*, così dee stare tutta la superficie dell' Elisse alla sua porzione *FAG*, e siccome si troverebbe la misura di quello spazio, che nel circolo fosse compreso, fra due corde *BT*, *DE*, così si troverà la corrispondente nella Elisse fra le ordinate *FG*, *HI*. (a) Fig. 52.

Quando la data porzione da misurarsi fosse *GNI*, misurato come prima lo spazio *FGHI*, tolto il trapezio *OCIG* dalla metà, resterà la misura della porzione *ING*.

Con questi fondamenti si arriva a misurare la porzione, o settore Elittico *FING*, e si misura la porzione *FAGI*, e il settore *HIK*, e la porzione elittica *HAGIK*.

Un altra superficie si misura nella Elisse, ed è quella della Sferoide, per la quale si fa un circolo, il di cui rag-

 gio

(a) Fig. 53. n. 1. gio ha da essere una linea media proporzionale *M* [a] fra la retta *A*, che si pone uguale al diametro minore *F O* della Elisse preso insieme coll' arco *D H E* descritto sopra la retta *D E* col raggio *D R*, ed il semidiametro minore *G O*, e la misura di questo circolo corrisponde alla misura della superficie della Sferoide Elittica.

Il raggio *D R* si trova, tirando dal fuoco della Elisse *T* la retta *T O*, e poi dal punto *D* una parallela ad essa, che concorrendo colla retta *G O* prolungata, ci lascerà *D R* per raggio del circolo da descriversi sopra la retta *D E*.

(b) Fig. 53. n. 2. Se la Sferoide non fosse allungata, ma compressa a' poli, questa si misurerebbe con fare un circolo, che fosse alla medesima uguale. Farà questo circolo il raggio *H* [b], che si prenderà medio proporzionale fra il diametro lungo della Sferoide *D E*, e la retta uguale alla curva parabolica, che si descrive dentro la Sferoide coll' altezza di *C G* metà di *C E* semidiametro della stessa Sferoide.

Misura dell' Aja de' Triangoli Sferici.

Problema XIX.

Questi Triangoli sono composti da tre archi di circoli massimi, quantunque non sieno impossibili altri Triangoli sferici fatti di due pezzi di circolo massimo, e di un terzo arco, che è porzione di un circolo minore normale a quelli, oppure fatti di un arco grande, e di due minori, oppure finalmente di tre archi di circolo di qualunque grandezza. Dovendosi dunque dare le misure dell' Aie, comprese da' Triangoli sferici, o rettangoli, o obliquangoli, si avverta, che l' Aja del Triangolo sferico quadruplicata sta alla superficie della Sfera, come la somma degli angoli diminuita di due retti, sta a due angoli retti; che però fatta la misura della superficie, e della Sfera, di cui sono porzione gli archi, che compongono il Triangolo sferico, questa si multiplicherà per la somma degli angoli diminuita de' due retti, ed il prodotto si partirà per il 180. aggregato della somma di due angoli retti, e quello, che risulterà sarà il quadruplo dell' Aja compresa dentro il Triangolo sferico; sicchè diviso questo nume-

ro per 4. oppure presane la quarta parte, si avrà in questa porzione la misura della superficie del Triangolo sferico, che si cercava.

Con questa medesima regola arriviamo a scuoprire la misura dello spazio compreso dalla curva Loxodromica, osservando nella figura, che a questo proposito si diede al suo luogo le misure di tutte quelle parti, che venivano a formare il Triangolo sferico, perchè colla misura dello spazio di questo, verremo in cognizione della misura dello spazio compreso da questa curva.

Misura della Spirale d'Archimede.

Problema XX.

Le misure di questa curva, che dal proprio inventore ci è denominata *Spirale di Archimede*, le abbiamo in qualunque di quelle specie, nelle quali suole essere da' Geometri considerata, cioè nella Spirale di prima rivoluzione, di seconda, di terza, &c. Perchè dunque di questa qualunque sia Spirale, si misuri lo spazio, si noti il circolo, che intorno alla medesima è descritto per essere lo spazio Spirale primo, o qualunque altro, o qualunque sua porzione *A G M R A* sempre la terza parte di questo circolo, o di qualunque altro, o del settore *B D A*, che lo comprende [a]. [a] Fig. 54.

Quando lo spazio Spirale fosse troncato nel suo principio, sicchè questo gli mancasse, come si riscontra nella fig. 55. dove si vede lo spazio Spirale compreso dalle linee *A F*, *A G*, e dalla curva Spirale *F G*, e fossero date quattro linee continuamente proporzionali *A F*, *A G*, *A X*, *A Z* nella ragione di *A F* ad *A G*, e *V* fosse il terzo della differenza *F Z*, la ragione del settore *G A P* sarebbe allo spazio Spirale contenuto la medesima, che la ragione di *X Z* a *V*, e però lo spazio Spirale secondo al circolo secondo (stando i loro raggi come il 3. al 6) avrebbe la ragione del 7. al 12. Lo spazio Spirale terzo al suo circolo terzo (avendo i raggi la ragione sesquialtera 24. 36.) sarebbe come il 19. al 27. Lo spazio Spirale quarto al quarto circolo (avendo i raggi la ragione subsesquiterza 81, 108.) sarebbe come il 37. al 48. e lo spazio

Spirale quinto al quinto circolo (eſſendo i raggi in ragione ſubſeſquiquarta 92. 240.) ſtarebbe come il 61. al 75. perchè in tutti queſti caſi, trovati dopo i due numeri aſſegnati gli altri due continuamente proporzionali, e notate le differenze de' due termini eſtremi, primo, e quarto, e le differenze de i due ultimi terzo, e quarto, e preſa della prima differenza trovata la terza parte, il paragone di queſta terza parte alla ſeconda differenza ci fa vedere qualunque delle aſſegnate proporzioni fra lo ſpazio Spirale dato, ed il circolo corriſpondente, del quale la miſura, ſe è conoſciuta, ſi ſa ſubito la miſura di qualſivoglia Spirale, o di una ſola, o di due, di tre, e di più Spire, come ſi vuole ſapere.

§. III.

Miſura de' Corpi Solidi.

XII. Miſurate quelle ſuperficie, che compariſcono nello eſterno, o nello interno delle nominate linee curve, ſi vorrebbero miſurare ora quei corpi, che ci ſono rappreſentati per qualcuna di quelle curve, come ſarebbe la Sfera, la Solidità della lunga, e compreſſa Sferoide, il Conoide Parabolico, o Iperbolico, il ſolido Logiſtico, il ſolido Cicloidale, e Ciſſoidale, e la Coclea. Come però ſi daranno queſte miſure, ſe laſciamo addietro quelle de' Cilindri, e Priſmi, Coni, e Piramidi, che contribuiſcono aſſai, ſe non a perfezionare le predette miſure, almeno a facilitarle notabilmente? Ecco dunque, che per queſto riguardo premettiamo ad eſſe le miſure di queſti, e determiniamo con brevità a che coſa ſono uguali i nominati Solidi, e che coſa ſi abbia a fare per traſmutargli in un altra figura.

Sono i Priſmi certi corpi, che hanno tante ſuperficie, che ſono tutte parallelogrammi, quanti ſono i lati delle loro baſi parallele. Se le baſi ſono i triangoli *EBC*, *DAF* [a] la ſuperficie del Priſma avrà tre parallelogrammi, ſe per baſe avranno qualunque altro poligono *CIADEF* = *GHBKLM*, [b] quanti lati avrà queſto poligono, tanti parallelogrammi ſi oſſerveranno nella ſuperficie del Priſma.

(a) Fig. 56. n. 1.

(b) n. 2.

Ancora i Cilindri ſono corpi contenuti fra due baſi, che ſono

sono due circoli eguali, che si descrivono dalla revoluzione del parallelogrammo $A\ C$ intorno all'asse $D\ E$ (a). (a) Fig. 57. n. 1. 2.

La Piramide è un solido, le di cui superficie sono triangoli, e tanti sono, quanti sono i lati della sua base $I\ O\ V$ (b). (b) Fig. 58.

Il Cono è un solido descritto dalla revoluzione di un lato di un triangolo $B\ E\ G$ intorno alla circonferenza di un circolo, che serve di base al Cono (c). Si suol dire, che il Cono è una Piramide d'infiniti lati, come si dice, che il Cilindro è un Prisma d'infiniti lati, a cagione, che dove le basi degli altri due corpi sono Poligoni di un numero determinato di lati, le basi di questi sono i circoli, che equivalgono a' Poligoni d'infiniti lati. (c) Fig. 59.

Misura de' Prismi, o Cilindri.

Problema XXI.

Si misurano questi due corpi, se si multiplica la loro altezza per il perimetro della base (d), corrispondendo la loro misura a quella di un rettangolo, di cui i Prismi, e Cilindri non hanno, che le basi multiplici tante volte, quanti sono i lati delle loro basi, e si aggiugne a questa misura quella delle due basi. Se il Prisma fosse obliquo, come lo è nella citata figura, si prolunga un lato $A\ D$ in I, e dal punto E si fa cadere la perpendicolare $E\ I$, e questa misurata, si prende per l'altezza del Prisma, e si opera come prima. Ma se fosse un tronco, come nella figura 61. si dovrebbero misurare le superficie de' trapezj, o parallelogrammi, che lo circondano, con aggiugnervi poi la superficie della base $B\ C\ D\ A\ E$, e del rettilineo $L\ O\ M\ G\ F$, che forma la sezione nel Prisma, perchè risultasse tutta la misura della superficie richiesta. Perchè le basi del Cilindro sono due circoli uguali, il perimetro loro si misura col trovare la circonferenza, supposto dato il diametro, poi si misura la superficie del circolo, ed il suo doppio è quello, che dee aggiugnersi al rettangolo fatto dall'altezza del Cilindro nel perimetro per avere l'intera misura del Cilindro. (d) Tav. V. Fig. 60.

Potrebbe accadere, che uno cercasse la misura di un tronco di Cilindro (e) segato obliquamente $A\ B\ C$, e questa si a- (e) Fig. 57 n. 2.

ſi avrebbe, miſurandoſi la perpendicolare *D E* nel prodotto dalla multiplicazione di eſſa per la circonferenza della baſe *B F C* coll' aggiunta della ſuperficie della baſe, e della ſuperficie della ſezione Elittica oppoſta *A G H*. Quando il pezzo del Cilindro da miſurarſi foſſe quello, che ſi vede nella figura 62. baſterebbe multiplicare l' arco *I K L*, e la corda *I L* per la perpendicolare *K M* coll' aggiunta delle due ſuperficie degli archi oppoſti, che il prodotto ſarebbe la miſura cercata. Il medeſimo ſi opererebbe, ſe la baſe *I K L* in vece, di eſſere un pezzo d' arco foſſe una porzione d' Eliſſe, di Parabola, d' Iperbola, oppure qualunque altra curva.

Ma ſe la miſura doveſſe eſſere del triangolo Cilindrico *P Q R S* [a], preſa la *R T* media proporzionale fra *R Q*, *R V*, il quadrato della media proporzionale ſarà uguale alla ſuperficie dimandata, e ſarà la metà della intiera ſuperficie *P Q X R P*, onde ciò che rimane *P Q Z* nel tronco cilindrico, ſarà uguale all' avanzo della intiera ſuperficie cilindrica *P R Q Z*, fatta la ſottrazione del triangolo *P Q R S*.

[a] Fig. 63.

Similmente, ſe colla media proporzionale fra *Q R*, ed *R V*, come raggio ſi deſcriveſſe un circolo, queſto circolo ſarebbe uguale alla ſuperficie cilindrica, fatta dalla multiplicazione dell' altezza nel perimetro della ſua baſe meno le baſi, e perchè il quadrato della media proporzionale è ſempre uguale al rettangolo fatto dall' altezza del Cilindro nel diametro della ſua baſe, però ſi determina, che fra li Cilindri ſi trova quella ragione, che ſi vede eſſere fra queſti rettangoli.

Riſulta la miſura della ſolidità del Cilindro, quando l' altezza del Cilindro dato ſi multiplica per il circolo della ſua baſe, ſiccome quando ſi prende il quadrato del raggio *R V* della baſe del Cilindro, e ſi multiplica per l' altezza, o perpendicolare *R Q*, ſi ha un prodotto, di cui due terzi ſono la miſura della ungola ſolida *R V P Q*, e quello, che rimane di tutta la miſura della ſolidità del Cilindro, è la miſura del Cuneo rimanente *P Z Q F X*. Si miſurano nella ſteſſa maniera la ſolidità de' Priſmi, e le loro date porzioni, avendo i Cilindri, ed i Priſmi vicendevoli, e comuni le loro proprietà.

Mi-

Misura del Cono, e Piramide.

Problema XXII.

Il Cono è un solido, che come abbiamo detto ha per base un circolo, ed è contenuto da una curva superficie prodotta dal ravvolgersi una linea intorno ad un punto, nel tempo, che rade la circonferenza della sua base. Si misura questa superficie, quando la metà dell'altezza, o lato del Cono si multiplica per la sua circonferenza, risultando un prodotto uguale alla superficie conica, dopo che sarà aggiunta la superficie della base. Che se il Cono fosse troncato, e si dimandasse la misura della superficie compresa fra i due circoli, come nella figura 59. [a] si vede, basterebbe prende- (a) n. 2.
re la misura della superficie intera, e poi da questa levare la superficie superiore *CED*, che nell'avanzo ci rimarrebbe la superficie richiesta del tronco. Quando fosse creduto malagevole il modo di ritrovare così la superficie del Tronco, si potrebbe multiplicare l'altezza del lato del Tronco per ciascheduna delle due circonferenze, che la metà di questo prodotto sarebbe la superficie del Tronco.

Come si può fare un circolo uguale alla superficie del Cilindro meno le basi, così si fa un circolo uguale alla superficie del Cono meno le basi, con prendersi la media proporzionale fra tutto il lato del Cono, ed il raggio della sua base, e con questa, come raggio, descriversi il circolo, che uguaglierà per l'appunto la superficie del Cono, meno le basi. E perchè ancora in questi casi de' Coni il rettangolo fatto dall'altezza, o lato del Cono nel raggio della sua base, è uguale al quadrato della media proporzionale, perciò nel confronto di più Coni fra loro si determina, che le loro ragioni corrispondono a' rettangoli, o a' quadrati, ovvero a' circoli: similmente, perchè in questo convengono le ragioni de' Coni, e le ragioni de' Cilindri paragonati fra loro, di essere, come i loro rettangoli, perciò si concluderà, che ammesso il confronto di un Cilindro ad un Cono, o viceversa, dovrà esprimersi colla ragione de' loro rettangoli

Di più, perchè tutto il Cono stà al suo Tronco, come

il

il rettangolo fatto dal lato del Cono nel raggio della sua base
Fig. 59. stà al rettangolo fatto dall' altezza del Tronco *A B* [a] nella traversa *C D*, che si tira dalla metà di *B A* perpendicolare all' asse *E F*, però paragonando noi qualunque Cilindro a qualunque Tronco di Cono, diremo stare queste due superficie fra loro, come questi rettangoli.

La misura del Cono contribuisce molto alla misura della Piramide, perchè quelli paragonati a questi sono Piramidi di infiniti lati. Si trova dunque la misura della superficie della Piramide, quando multiplicata la metà della perpendicolare *A E* [b] tirata dalla sommità della sua altezza sopra *E O* col perimetro della base *I O V*, si aggiugne al prodotto la superficie della stessa base, la qual base, o può essere un Triangolo, come nella citata figura, o può essere un parallelogrammo, o qualunque altro Poligono. Si misura poi la superficie del fusto piramidale, con trovare la misura di qualunque Trapezio *I M N V*, *I M P O*, *P O N V* (si misura il Trapezio *I M P O* con tirare la perpendicolare *M Q*, e multiplicarla con i lati *I O*, *M P*, e poi con prendersi la metà del prodotto) e quella delle basi *I O V*, *M N P*, perchè queste misure unite insieme, lasciano la superficie del fusto piramidale.

[b] Fig. 58.

Tanto i Cilindri, ed i Prismi, quanto i Coni, e le Piramidi, misurate nella superficie, senza le basi, si possono paragonare alla superficie delle loro basi, o a vicenda gli uni cogli altri per avere la ragione della loro grandezza. Nel primo caso si dice, che i Cilindri, ed i Prismi stanno alle loro basi, come le altezze *D H*, *A B* alla metà delle perpendicolari, o de' raggi *B V*, *X V* [c]; i Coni, e le Piramidi stanno alle loro basi, come le altezze *A E*, *E F*, alla perpendicolare a i raggi *E O*, *B F* [d] Nel secondo caso si dice, che i Cilindri sono tripli de' Coni, ed i Prismi sono tripli delle inscritte Piramidi. Quando poi i Cilindri, ed i Coni fossero equilateri, e circoscritti alle medesime Sfere, la superficie de' primi, comprese le basi, sarebbe sesquialtera della superficie della Sfera, siccome sesquialtera sarebbe la ragione de' Coni alla ragione de' Cilindri, e però il Cono Equilatero, il Cilindro, e le Sfere, se si considerano, secondo la superficie, sarebbero fra loro in continua ragione sesquialtera.

[a] Fig. 59.
[c] Fig. 56. 57.
[d] Fig. 58. 59.

Se

Se si voglia ora sapere la misura della solidità di questi due corpi, si dice, che si ottiene la misura della solidità della Piramide, quando la sua altezza data si multiplica per la misura della sua base, e poi se ne prende la terza parte, che se da questa misura si sottrarrà quella della solidità della Piramide *MNPA* [a], quel che rimane sarà la misura del Tronco *MNPION*. Nella stessa maniera misureremo la solidità de' Coni, e le loro date porzioni, solo che per i Coni si avvertirà, qualmente dato un Cono, se ne può fare un'altro, che sia uguale al dato Cono, e sarà quel Cono appunto, che avrà per base un circolo uguale alla superficie del Cono dato, per altezza una linea *FI*, alla quale la perpendicolare *EF* del Cono abbia quella ragione, che ha il lato *EG* al raggio della sua base *FG* [b]. Se poi colla medesima altezza *FI*, e base uguale alla superficie del Cono *AEH* si facesse un altro Cono, questo sarebbe uguale al rotondo solido generato dalla revoluzione del quadrilatero *AEHF* intorno all'asse *EF*, e se in vece della base uguale alla superficie del Cono *AEH* avesse il nuovo Cono la base uguale alla superficie del Tronco *AG*, questo Cono sarebbe uguale all'anello, e rotondo solido scavato *ABF*, uguaglianza, che pur conviene a qualsivoglia solido scavato descritto dal Triangolo *FHK* col Cono, che abbia la base uguale alla superficie Conica dello stesso solido descritta dalla retta *HK*, e per altezza la stessa perpendicolare *FI*. E tanto serva per quelle misure, che abbiamo avuto necessità di produrre per intelligenza maggiore di quello, che segue quì appresso.

[a] Fig. 58.

[b] Fig. 59.

Misura della solidità della Sfera.

Problema XXIII.

La solidità della Sfera è l'ultima dimensione, che di lei si possa cercare, che però, quando questa ci sia richiesta, noi la troviamo con multiplicare il suo semidiametro nella terza parte della sferica superficie. Sia dunque il Diametro della data Sfera 16., abbia di superficie $804\frac{4}{7}$, che sarà la solidità $2145\frac{11}{21}$.

Dalla misura di tutta la solidità si può arrivare a sape-

re la misura di qualsivoglia porzione, e settore sferico, misurandosi questo con misurare la superficie del dato segmento nel modo predetto, e poi con multiplicare il risultato da questa misura per il raggio del circolo, a cui appartiene il dato settore, poichè presa di questo prodotto la terza parte, in questa porzione si avrà la misura del dimandato settore. Nella stessa maniera si troverà la misura del rimanente settore. Che se dal settore misurato si sottrarrà il Cono *BCO* [a], ciò che rimarrà sarà la misura del rimanente segmento sferico *BAC*, da cui pure, se si levasse un altro segmento minore *DAE*, rimarrebbe la misura della porzione sferica compresa fra' circoli *BC*, *DE*.

[a] Tav. V. Fig. 64.

Dopo di avere misurata la Sfera, si mostra come ad una Sfera si può fare riuscire uguale un Cono, e ciò accaderà, se la base di questo Cono sarà uguale alla superficie sferica del dato circolo, e avrà per altezza il raggio del circolo medesimo, mentre multiplicata questa base di Cono per il terzo dell'altezza, il risultato sarà la misura del Cono, uguale alla misura della Sfera, dunque l'Emisfero sarà doppio del Cono inscritto, ed il Cilindro, che è triplo del Cono inscritto, sarà sesquialtero della stessa Sfera, ed il Cono Equilatero, il Cilindro, e la Sfera, ancora rispetto alle loro solidità, manterranno fra loro una continua ragione sesquialtera. Si può altresì fare un Cono eguale al settore di Sfera, e sarà questo quel Cono, che avrà per altezza il raggio del circolo, da cui si è preso il settore, e per base un circolo fatto dalla corda sottesa alla metà dell'arco, che forma il settore.

Misura della Solidità della lunga, e compressa Sferoide.

Problema XXIV.

Essendo la Sferoide due terzi del Cilindro circoscritto, dalla misura di questo si avrà la misura della Sferoide, oppure stando la Sfera alla Sferoide, come il quadrato del Diametro maggiore al quadrato del Diametro minore, si possono prendere questi due quadrati per due termini proporzionali, primo, e secondo, ed il terzo sarà la misura della Sfera: onde per regola di proporzione diretta, si troverà il quar-

quarto proporzionale, cioè la misura della medesima lunga Sferoide, e di qualunque porzione, per essere sempre tutta l' intera solida superficie di Elisse a qualunque sua porzione, come tutta la Sfera a qualunque sua parte. Quando mai la porzione data fosse obliqua, come nella fig. 52.[a] è la porzione *KLH*, trovato il Diametro *M O*, presa la retta *i N* uguale ad *M P*, e ordinata la retta *Q R*, si misurerà la solida porzione *Q L R*, e questa corrisponderà alla obliqua porzione dimandata. [a] Tav. IV.

Corrisponde pure alla misura della solidità della lunga Sferoide la misura della solidità della Sferoide compressa, essendo anche questa due terzi del Cilindro circoscritto, cioè di quel Cilindro, che ha per base un circolo fatto col Diametro maggiore *L A* della Sferoide compressa, e per altezza il Diametro minore *I H*.

Per misurare qualsivoglia Tronco, si leva dalla maggior porzione la minore, e l' avanzo lascia la richiesta misura.

Si potrà fare un Cono retto uguale alla Sferoide, se essendo l' asse del Cono *B D*[b], la base *A C*, di questa base la metà *D C* servirà per asse della Sferoide, e la metà di quest' asse, cioè *F E* sarà in potenza subduplo del Triangolo *A B C*. [b] Tav. V. Fig. 65.

Ancora il Solido generato dalla rivoluzione del Trilineo *D A E* nella Sferoide[c] è uguale al Solido *E F C I H* generato dalla conversione del quadrilatero *A E F C* raggirato intorno all' asse *A C* semilato retto della Sferoide, proprietà, che si verifica nel medesimo solido prodotto dalla rivoluzione dello stesso Trilineo sì nel Conoide Parabolico[d], sì nel Conoide Iperbolico[e] sì nella Sfera. [c] Fig. 66. n. 8. [d] n. 6. [e] n. 3.

Misura de Conoidi Parabolici, ed Iperbolici.

Problema XXV.

Si misura il Conoide Parabolico con circoscrivere ad esso un Cilindro, che abbia l' asse, e la base del Conoide, perchè due terzi della misura del Cilindro sono la misura del Conoide Parabolico, o retto, o obliquo. Dalla misura dell' intero Conoide si ricaverà la misura di qualunque sua por-

 zio-

Fig. 67. (a) zione *BLM*, o Tronco *CBAN*. (a) Si misura qualunque porzione con presupporre, che questa stà all'intero Conoide, come il quadrato di quella linea, che dalla metà del diametro della base della porzione si alza parallela all'asse della Parabola, cioè il quadrato di *eF* stà al quadrato dell'asse medesimo *DL*, dunque misurati questi due quadrati, e l'intero Conoide, se si trovi con queste tre misure una quarta, in questa quarta misura, si avrà quella della porzione del Conoide Parabolico. Similmente se dalla misura dell'intero Conoide si leverà la misura del Conoide *CLN*, ciò che rimarrà sarà la misura del Tronco del Conoide Parabolico.

Fig. 68. (b) Per avere la misura del Conoide Iperbolico *AEIOV*, (b) si trova il lato trasverso della Iperbola *AVI*, cioè il lato *VB*, e si aggiugne *BC* uguale a *BD* metà del lato transverso, e descritto il Cono *AVI*, che si dimostra stare al Conoide, come *FB* ad *FC*, si misurino le rette *FB*, *FC*, ed il Cono, e con queste tre misure si trovi la quarta proporzionale, che in questa misura si vedrà la misura del Conoide Iperbolico. Il medesimo si opererebbe per misurare il Conoide, se fosse obliquo, dopo essersi diviso per mezzo in *H* il diametro della base *AG*, come ancora rimarrebbe la misura del Tronco *ANPI*, se dall'intero Conoide fosse fatta la sottrazione del Conoide *NVP*.

Si può fare un segmento sferico uguale al dato Conoide Fig. 69. (c) Iperbolico *ABC* (c) se il circolo da cui si toglie questo segmento sia fatto con un raggio composto dell'asse del Conoide *BD*, e del lato trasverso di esso Conoide *BE*, e questo lo fa la corda *FG*, che si tira dal punto *B*, dove il predetto lato transverso comincia ad alzarsi fuori della Iperbola *ABC*. Anche il Cilindro Fig. 70. (d) prodotto dal rettangolo *ZDNX*, (d) sarà uguale al rotondo solido scavato *PODNMP* fatto dagli Assintoti, e curva Iperbolica nel raggirarsi intorno all'asse *QX*, e il Conoide *PNR* sarà uguale all'anello Conico *ODZ*, e la coppa Iperbolica del Trapezio *CTEIN* sarà uguale al Cilindro fatto dal rettangolo di *CT* in *CN* metà del lato transverso, se l'Iperbola *RNX* giri intorno alla retta *CT*, e aggiunto al Cilindro il Cono fatto dal Triangolo *CTE* sarà l'intero Solido, o Cilindro Iperbolico *CTIN* uguale ad un Cilindro, ed un Cono, ovvero ad un solo Cono, o Cilindro. Rimane la misura del solido Iperbolico acu-Fig. 71. (d) to (d) *FEBDC*, cioè di quel solido, che produce l'Iperbola nel

nel girare intorno all' Assintoto, come intorno al proprio asse, a cagione del quale si dice, che ha un infinita lunghezza. Si misura dunque questo Solido dalla misura del Cilindro *ACGH*, che ha per diametro della base il lato *AH* uguale al lato verso, o all' asse della Iperbola *BA*, e per altezza una linea uguale al Semidiametro della base di esso Solido acuto *AC*. Si suppone, che l' angolo, che formano gli Assintoti sia retto, come si vede nella citata Figura.

Quando l' angolo fosse ottuso, o acuto, come nella Figura 72. oltre al Cilindro si aggiugnerebbe qualche altra cosa, nel primo caso, segandosi il Solido col piano *DE*, il Solido acuto *DBE*,[a] ovvero[b] *DBE* † *AOV* sarebbe uguale al Cilindro *DILE*, ed al Cono *IAL*. (a) n. 1. (b) n. 2.

Nel secondo caso il Solido acuto *CHD* insieme col Con *EAI*[c] segato il Solido col piano *CD*, sarà uguale al Cilindro *CEID*, oppure tutto il Solido acuto fatto dal quadrilatero *ABCDA*[d] infinito, sarà doppio del Cilindro *IEDC*. (c) Fig. 73. (d) Fig. 74.

Trattandosi di segare il Conoide Iperbolico col piano *AC* si determina, che il Solido acuto infinito *ABC* sia uguale al Cilindro *DACE*, che li stà sotto in luogo di base, o piedistallo.[e] (e) Fig. 75.

Se i piani, che segano il Solido acuto sono due *HL*, *DE*, il tronco Solido acuto compreso fra i due piani secanti, cioè il Solido *DHLE* è uguale al Solido acuto soprapposto *HBL*.[f] (f) Fig. 76.

Se i piani che segano sono tre, quattro, o cinque &c. possono segare l' asse del Solido proporzionalmente, o in parti uguali: se proporzionalmente, di modo che[g] *GH* stia a *GI*, come *GI* a *GL*, sarà il Tronco *ACDB* al tronco *CEFD*, come *LI* ad *IH*, cioè in reciproca ragione della altezza. Se poi[h] *IL*, *LM*, *MN*, *NO* &c. sono uguali, il primo tronco *AD* starà al secondo *CF*, come il 3. all' 1. il secondo al terzo, come il 4. al 2. il terzo al quarto, come il 5. al 3. il quarto al quinto, come il 6. al 4., e così sempre in modo, che i numeri sieno differenti di due unità, e all' uno, e all' altro termine della ragione si aggiunga l' unità. (g) Fig. 77. (h) Fig. 78.

Potrebbe darsi il caso, che i piani secanti fossero superficie Cilindriche, ed in questo caso gli anelli Solidi compresi fra le Cilindriche superficie sarebbero fra di loro, come le

por-

porzioni dell' Asintoto, fatte dalle medesime Cilindriche superficie. Se non è piano secante il Cilindro; ma più tosto se questo è circoscritto al tronco del Solido acuto, o inscritto al medesimo, in questo caso starà il Cilindro al tronco, (a) come il diametro della base maggiore del solido AB al diame- Fig. 79. n. 1. n. 2. tro della base minore DC [a] e il tronco medesimo $ADCB$ sarà medio proporzionale fra l' inscritto, e circoscritto Cilindro.

In caso che la base del tronco Solido acuto sia la medesima, che la sola base del Cilindro, oppure se l' altezze del tronco Solido, e del Cilindro sono uguali, il tronco Solido acuto non sarà uguale al Cilindro, ma staranno fra loro, come il rettangolo fatto dalla minor base del tronco nella sua altezza, stà al rettangolo per l' asse del Cilindro, o staranno, come il rettangolo fatto dalle due basi del tronco stà al quadrato della base del Cilindro, o universalmente il tronco del Solido Iperbolico acuto starà a qualsisia Cilindro in ragione composta della ragione del rettangolo fatto dalla mionr base del Solido nella sua altezza, al rettangolo fatto dalla base maggiore del Solido nella altezza del Cilindro, e dalla ragione del quadrato della maggior base del Solido al quadrato della base del Cilindro. E se un Circolo si ponesse medio proporzionale fra le due basi del tronco Solido, e si alzasse un Cilindro di qualunque altezza, il tronco starebbe all' altezza del Cilindro, come l' altezza del tronco sarebbe all' altezza del Cilindro; cioè se queste altezze fossero fra loro uguali, uguale ancora sarebbe al Cilindro il tronco del Solido acuto, il qual tronco rimarrebbe ancora uguale al Cilindro, se la ragione delle loro altezze fosse reciproca alla ragione delle basi, e quando mai non li fosse uguale si potrebbe tagliare in ma- (b) niera da renderglielo uguale, o che almeno al medesimo Ci- Fig. 80. n. 1. lindro circoscritto [b], ed inscritto [c] avesse la data ragione di (c) n. 2. C a D, o di minore inegualità, se fosse circoscritto, o di maggiore, essendogli inscritto, e la prima sarebbe, se la ragione data si trasportasse sopra la porzione minore EF dell' asse del Solido acuto tagliato dal piano all' intero asse FG, o sopra l' intero asse FE alla sua porzione FG.

Rimane, che si paragonino i tronchi de' Solidi acuti Iperbolici fra loro per aversene le loro misure, al qual effet-

to

to si nota, che il confronto può farsi in due tronchi di diversi Solidi acuti Iperbolici, o in due tronchi del medesimo, segato in qualunque luogo del suo asse, o del medesimo segato nel mezzo. Se si dovesse verificare il primo caso, si dovrebbe presupporre, che la ragione di quei due tronchi fosse composta della ragione de i rettangoli delle loro basi, e della ragione delle altezze. Nel secondo caso si premetterebbe, che stanno fra loro i due tronchi, come i rettangoli fatti dalle porzioni dell' asse *IL*, *HM*, ed *HI*, *LM*.[a] Nel terzo caso le porzioni starebbero fra di loro, come i diametri estremi del Solido acuto *AD*, *BC*.[b] Da tutte queste premesse di supposizioni, prese le misure de' primi termini della proporzione, per sua regola si avrebbe la misura dell'ultimo ricercato. Che per trovarlo, secondo la data ragione, cioè di *E* ad *F*, basterebbe dopo le due basi *AD*, *BC*, e prima grandezza data trovare la quarta proporzionale *G*, e poi come questa *G* alla seconda data *F*, così fare la porzione dell' Asse *HI* ad *IL*, e per il punto *I* tirare il piano *MN*, che il tronco *AN* al tronco *MC* avrebbe la data ragione.

(a) Fig. 81.

(b) Fig. 82.

Misura del Solido Logistico.

Problema XXVI.

Si misura questo Solido per mezzo di un Cono la di cui altezza sia uguale alla subtangente della curva Logistica, e il semidiametro della base sia uguale alla ordinata alla medesima Logistica, perchè essendo questo Cono subsesquialtero del Solido prodotto dallo spazio infinito nel ravvolgersi intorno all' Assintoto, trovata la misura di esso si troverà la misura di questo, facendosi come il 4. al 6. così il Cono misurato ad un altra misura, cioè alla misura del Solido infinito Logistico.

Paragonandosi insieme due di questi Solidi Infiniti dopo diverse ordinate per trovarsi le loro misure, servirà il trovare la misura de' Coni corrispondenti, che confrontati fra loro ci lascieranno la misura di questi Solidi infiniti. E se si volesse la misura de' medesimi considerati sotto finita estensione, cioè come di porzioni di un medesimo Solido, per esempio

AVCB

AVCB, *BAQD* si troverebbero queste misure con trovare le differenze de' quadrati delle *AB*, *CV* ordinate dentro la Logistica
Fig. 83. e le rette *AB*, *QD* [a], oppure con determinare le Zone circolari descritte dalle rette *VE*, *DK* girate intorno a *BQ*. Siccome con determinare la misura del Cilindro fatto dal Parallelo-
Fig. 84. grammo *NAGO*, [b] si avrà la misura del Solido Logistico *NABC*, che stà a quello in subdupla ragione, o si avrà la misura della porzione *naAN* prodotta dal girare, che fa la curva Logistica intorno ad *uN*, imperocchè questa si mostra la metà del Tubo Cilindrico fatto dal Parallelogrammo *Arò*, che si produce nel raggirarsi intorno al medesimo Asse, cioè si fa vedere uguale al Cilindro, che ha per base la differenza de' circoli, *AN*, *Nr*, e per l'altezza la metà della subtangente, e di poi tolto il Cilindro dall' infrascritto parallelogrammo *nar*, ciò che rimane è uguale all' anello fatto dallo spazio trilineare *arA* rivoltato intorno all' Asse, il quale, o all' altro anello *arA*, o al Tubo Cilindrico fatto dal parallelogrammo ad esso circoscritto avrà la nota ragione. Questa proprietà conviene pure alli spazj trilineari della curva Spirale Geometrica, o si paragonino fra loro, o alle circoscritte porzioni delle Zone circolari. Paragonandosi poi il solido Logi-
TAV. VI. Fig. 85. stico fatto dallo spazio *TRQB* [c] intorno a *BQ* al solido fatto dallo spazio Iperbolico *OPQN* intorno ad *OP*, staranno questi due solidi fra loro, come il quadrato fatto dalla subtangente della Logistica *TG* al parallelogrammo inscritto all' Iperbola *KOBP*.

Misura del Solido Cicloidale, e Cissoidale.

Problema XXVII.

Fig. 86. Sia la Cicloide *OaA* raggirata intorno alla tangente *AN* [d] il Solido, che nasce da questo ravvolgimento è la metà dell' anello fatto dal semicircolo *NoO* raggiratosi intorno alla tangente medesima, sicchè il restante del Cilindro circoscritto a quel Solido, cioè quel Solido, che si descrive dalla Semicicloide convessa avrà la nota misura, come tutte egualmente le di lui parti nel medesimo modo rimarranno misurate.

Nella Cissoide ancora dove le linee rette *Ar*, *rd*, *rN*,

ro

ro [a] si danno con una determinata proporzione, si rende manifesta la misura del Solido prodotto dalla rivoluzione della curva Cissoidale intorno all' Assintoto *AO*, imperochè, come stanno fra loro i rettangoli *ArO*, *drN*, o le cilindriche superficie da questi descritte, così deve stare l'intero Solido Cissoidale all' intero anello prodotto dal semicircolo genitore nel ravvolgersi intorno alla tangente *NC*, o qualunque porzione di esso solido a qualunque porzione del medesimo anello, che già si sa essere ragione di ugualità. (a) Fig. 87.

Si scopre di più la misura del Solido, che dall' incavato spazio Cissoidale *ooNAO* è prodotto nel ravvolgimento suo intorno ad *Nn*, come pure si vede nota la misura delle parti del medesimo, fatto il confronto all' intero Fuso cicloidale, generato da *CAN*, o a qualunque sua parte. E si misureranno ancora i Conoidi degli spazj Convessi compresi dalla curva *Noo* dall' asse *Nn*, e dall' ordinata dal punto, o parallela ad *nN* per essere avanzi de i Cilindri fatti da' rettangoli *Nro*: e finalmente si avrà la misura del solido fatta dalla curva dei Projetti, o curva Trajectoria [b] *NooO* con determinarlo subduplo dell' Emisfero generato dal quadrante *CNA* intorno all' Asse *NA*. (b) Fig. 88.

Misura del Solido, che volgarmente è chiamato Coclea.

Problema XXVIII.

Si produce questo Solido quando due figure piane, che stanno sempre nello stesso piano, cioè il rettangolo *BCAD* si muove intorno all' asse *AB* con moto circolare, ed equabile, e qualunque figura *GE* con moto progressivo si move sopra il lato *GC*. [c] (c) Fig. 89.

La misura di questo Solido, se è descritto dal Triangolo *DGF*, è uguale al Conoide Iperbolico, che ha per altezza il lato *GC*, e per lato retto un quarto proporzionale dopo *AD*, *DF*, e la *AD* raddoppiata, e per lato verso un altra quarta proporzionale dopo *FD*, *GD*, e la *AD* similmente raddoppiata. Se questo Solido è prodotto da un parallelogrammo rettangolo *DGF* si mostra uguale ad un Cilindro, che ha per altezza il lato *DG* altezza del rettangolo, e per

femidiametro della bafe una media proporzionale fra *FD*, e la retta compofta di *FA* † *AD*.

Ma fe la figura, che genera quefto Solido è un circolo, avrà quefto Solido alla Sfera del fuo circolo genitore la ragione, che ha la periferia, che fi defcrive dal raggio, che fia uguale alla retta *DA* aggiunta al femidiametro del circolo genitore, a due terzi del diametro del medefimo circolo genitore.

Nella Serie di tutti i precedenti Problemi è occorfo più di una volta nominare le feguenti voci *Lato trafverfo*, *Ordinate*, *Parametro*, o Lato retto, *Tangente*, *Normale*, *Subnormale*, o Subtangente, *Affintoti*, che quì ora le fpieghiamo, per torre qualunque difficoltà fe l'aveffero potuta cagionare. Il *Lato trafverfo* sì nella Parabola, che nell'Elifse è il loro Affe medefimo: l'*Ordinata* è quella linea, che è perpendicolare all'Afse della Parabola, della Elifse, e della Iperbola. Il *Parametro*, o Lato retto è quella linea, che ancora efsa è perpendicolare all'Afse, ma fi fa partire dal Vertice della Parabola, della Iperbola, e dell'Elifse, e viene ad efsere terza proporzionale dopo il lato trafverfo, e l'ordinata nella Parabola; nella Elifse poi ftà al lato trafverfo come il quadrato dell'Ordinata ftà al rettangolo de' pezzi del lato trafverfo fatti dalla ftefsa Ordinata: e nella Iperbola ftà come il quadrato fimilmente della ordinata ftà al rettangolo fatto dall'unione del fuo lato trafverfo coll'Afse della Iperbola nel medefimo Afse. La *Tangente* è una linea retta, che tocca in un fol punto tutte le curve. La *Normale* è una linea retta perpendicolare alla tangente in quel punto dove tocca la curva. La *Subtangente*, o Subnormale è quella linea retta, che fi trova fotto la Normale, e fopra cui la detta Normale fi pofa. Nella Parabola la Subnormale è uguale alla metà del Lato retto, nella Elifse poi, ed Iperbola il femiparametro ftà alla Subnormale, come la metà del Lato trafverfo ftà alla diftanza che vi è fra l'ordinata alla tangente, ed il centro della Elifse, o della Iperbola. Gli *Affintoti* finalmente fono certe linee, che fi fanno partire dal centro della Iperbole, e pafsare per l'eftremità delle tangenti verticali prefe in tanta quantità, che il quadrato loro fia uguale alla quarta parte del rettangolo fatto dal Lato trafverfo nel Lato retto della Iperbola, e fi prolungano in infinito colla curva Iperbolica

lica, a cui infinitamente si accosteranno, e non mai la toccheranno, e si chiamano per questo *linee non coincidenti*. Il Lato trasverso nella Iperbola è la retta aggiunta all'Asse della medesima sopra il vertice in tanta porzione, che basti, perchè il Lato retto stia ad esso, come il quadrato della ordinata stà al rettangolo fatto da questa porzione sommata coll'asse della Iperbola preso fino all'ordinata in questa stessa porzione d'asse, come da una sola. Il centro della Iperbola finalmente è nella metà del suo Lato trasverso.

Delle Progressioni.

C A P. V.

I. SE si continua una serie di più ragioni, che mantengono fra di loro li stessi riguardi, in questa serie si fa vedere la Progressione, di cui ora siam per parlare. Dunque la *Progressione* altro non è, se non che una continuazione di più ragioni, che mantengono fra di loro o la proporzione Aritmetica, o la Geometrica, o l'Armonica, dalle quali poi essa prende il suo nome. Certi particolari caratteri accompagnano qualsisia progressione, e si verificano di una tali cose, che non convengono all'altre, e tutte maravigliosamente contribuiscono ad informarci in ciò, che è utile di sua natura, e desiderabile da sapersi per la sua vaghezza. Facendosi dunque dalla Progressione Aritmetica, di cui un esempio può essere il seguente 2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. primieramente osserviamo, che nell'esempio dato la differenza di un termine dall'altro è il 2. il quale, se lo multiplichiamo per il numero de' termini meno uno, cioè per 7. produce 14. che unito all'ultimo termine della Progressione, cioè al 2. fa 16. cioè fa vedere, che il primo termine è uguale all'ultimo, aumentato del prodotto, che si fa risultare dalla differenza, che è fra i termini, multiplicata per il numero degli stessi termini meno uno. Da che poi ha da seguire, che si troverà la differenza dei termini della Progressione, ed il numero degli stessi termini, diminuito di una unità, se per avere la prima notizia si prenderà la differenza del primo termine 16. dall'ultimo 2, che è 14. e questa partita per il numero

mero de' termini meno uno, cioè per 7. si prenderà il suo quoziente, che è 2. e se per avere la seconda, in vece di partire per 7. il 14 preparato, si partirà per 2., che è la differenza supposta, e si prenderà il quoziente 7. con una unità di più, perchè nel primo caso veramente il due è la differenza cercata, e nel secondo il 7. † 1., è veramente il numero de' termini dati nell'esempio della Progressione Aritmetica. Rilevasi il fondamento di ciò, che abbiamo detto da questo raziocinio.

II. L'ultimo termine della Progressione Aritmetica, cioè il 16. è maggiore dell'altro termine, cioè del 14. di due unità; siccome questo 14. supererà il 12. di due unità, dunque il 16. è maggiore del 12. di 4. unità, ovvero della differenza de' termini della progressione presa due volte, dunque invertendo il 12. colla differenza presa due volte, sarà uguale al 16. ma lo stesso riguardo, che ha il 16. rispetto al 12. lo ha il 12. rispetto all' 8., e l' 8. rispetto al 4., dunque l' 8. colla differenza presa due volte sarà uguale al 12. siccome il 4. colla stessa differenza presa due volte sarà uguale all'8., dunque il quattro aggiunto alla differenza presa 4. volte sarà uguale al 12. ma abbiam veduto, che il 12. colle differenze prese due volte era uguale al 16., dunque il 4. colla differenza presa 6. volte sarà uguale al 16., ma il 2. è la metà del 4. cioè supera il 4. della differenza presa una volta, dunque il 2. colla differenza presa 7. volte sarà uguale al 16., dunque il primo termine della data progressione è uguale all'ultimo, aumentato dal prodotto, che si fa risultare dalla differenza, che è fra i termini, multiplicata per il numero degli stessi termini, meno uno, che era la prima proprietà, che in questa progressione si voleva mostrare.

Da questo raziocinio, ecco come si fa vedere altresì vera la seconda proprietà stabilita per la medesima progressione. Abbiamo veduto, che nella serie di 8. termini proporzionali di proporzione Aritmetica il 2. si è reso uguale al 16. con averlo ricresciuto della somma della differenza degli stessi termini, presa 7. volte; dunque per operazione contraria si troverà questa differenza, se tutta la somma aggiunta al primo termine si partirà per 7. mentre il quoziente, che ne verrà, mostrerà la differenza cercata; così se 2. † 2. $\times$ 7. = 16. ancora

ra 16. — 2. ſarà = 14. : 7. = 2., cioè nella ſerie de' termini dati proporzionali aritmeticamente ſi ſarà trovato, che il 2. è la differenza, e che ſi cercava, e che era la ſeconda coſa, che ſi voleva trovare.

La terza proprietà ſi dimoſtra così. La ſomma delle differenze è minore dell' ultimo termine di due unità, ma l' ultimo termine è 16., dunque la ſomma delle differenze è 16. — 2., cioè 14. ma la differenza trovata è il 2., dunque l' ultimo termine, cioè il 16. preſuppone 7. volte la ſteſſa differenza; ma ogni differenza è parte di qualunque termine, che è poſto nella progreſsione dopo il primo; dunque in queſta progreſsione dopo il primo, dovranno trovarſi ſette altri termini, dunque tutti i termini della progreſsione data ſaranno 8., dunque ſi ſarà trovato quello, che in terzo luogo occorreva trovare.

III. Con queſto terzo raziocinio ſi trova il numero de i termini, ma come ſi potrà operare per individuarli? Se ſi ſuppone, che ſia noto il primo, ed ultimo termine della progreſſione, e di più la differenza, che ha da eſſere fra ciaſcheduno di loro, s' individueranno facilmente gli ſteſſi termini, con ripetere nel ſecondo luogo il primo ingrandito della differenza data, poi con porre in terzo luogo il ſecondo, ed aggiugnere ancora ad eſſo la ſteſſa differenza, e così di mano in mano con andar ripetendo i precedenti termini accreſciuti della differenza, ſi arriverà finalmente alla individuazione di tutti, e comparirà ogni termine della data progreſſione nella ſua ſpecie.

IV. Ma ſe la differenza non foſſe conoſciuta, prima di venire alla individuazione de i termini, biſognerebbe operare, come quì ſopra ſi è inſegnato per trovare la differenza, e poi ſi paſſerebbe nello ſteſſo modo a ſtabilire in individuo ogni termine della progreſſione, il quale è ſempre uguale al primo ingrandito della differenza ripetuta tante volte, quanto ciaſcun termine dallo ſteſſo primo termine ſi allontana.

V. Potrebbe darſi il caſo, che biſognaſſe non individuare ogni termine della progreſſione, ma un ſolo, come ſi avrebbe da operare?

Per operare in queſto caſo, due coſe venghiamo a preſupporre, come a noſtra notizia, cioè il primo termine della pro-

progressione; e la differenza, che si vuole, che abbiano fra di loro i di lei termini.

Con questi due dati, si passa ad operare così. Si prende la differenza tante volte, quanti sono i termini, che precedono quello, che si dimanda, per esempio, se si dimanda il decimo, si prende nove volte la differenza data, a questa si aggiugne il primo termine, e resta individuato il decimo termine, che si cercava. Così, se il 2. è il primo termine della Progressione, e se il 3. è la differenza, si prende il 3. nove volte, e produce 27., a cui aggiunto il 2. fa 29., e questo è il vero numero dimandato, che nella Progressione ha il decimo posto, come da i precedenti discorsi si è fatto manifesto. Con questa istessa regola si verrà a stabilire, che luogo abbia da avere il medesimo 29. nella Progressione aritmetica, presupposte le due antedette notizie, che è il decimo, perchè, se il 29. è un numero, di cui una parte è il primo termine dato della Progressione, e tutto il resto è un risultato dalla differenza presa più volte; detratto il primo termine, cioè il 2. dal 29. resterà 27. La differenza data è il 3., dunque diviso per esso il 27. si manifesta nel quoziente 9. che il 29. ha da avere il nono luogo dopo il primo, dunque contato il primo, avrà nella Progressione il decimo luogo.

Se non fosse il decimo quel termine della Progressione aritmetica, che si volesse sapere, ma piuttosto il primo, vi è pure una maniera propria di operare per questo effetto, purchè si supponga qualche cosa di certo. Il certo, che si vuol supporre è il numero de i termini, e la loro differenza, e la misura dell'ultimo termine. Sieno dunque otto i termini della Progressione, sia 3. la loro differenza, sia 24. l'ultimo termine, dovendosi trovare il primo, ecco come si discorre. Il 24. è un numero, che risulta dalla unione del primo termine colla somma di tutte le differenze de' termini rimanenti, ma sette sono i termini rimanenti, dunque l'ultimo termine 24. sette volte conterà il 3., che è la differenza data, dunque ciò, che rimarrà, che è pure il 3. sarà il primo termine cercato. Si potrebbero ora voler trovare fra il primo, ed ultimo termine dato i medj proporzionali, quanti se ne vorrebbero; ma già del modo di fare questa operazione si è parlato nel II. Capitolo, dove occorse parlare di questa materia,

ria, si nota solo, che quanto si disse in quel luogo, ha il suo fondamento in questi raziocinj, e che veramente tutti i termini medj proporzionali, che si vogliono, si trovano, quando si ha riguardo di far risultare il termine, che si domanda dal primo numero della proporzione, e dalla unione delle differenze de' termini, che si hanno da trovare fra il primo dato, e quello, che si domanda; così si unirà al primo termine una sola differenza per avere il secondo; se ne uniranno due per avere il terzo; se ne uniranno quattro per avere il quarto; e così degli altri; giacchè, come si è detto, ogni termine della Progressione è composto del primo, e della somma delle differenze prese tante volte, quanti sono i termini rimanenti dati.

Se la differenza non fosse a nostra cognizione, questa si dovrebbe trovare prima di passare più oltre per trovare i termini medj proporzionali alli due numeri dati, e poi si opererebbe come prima.

VI. Oltre a queste proprietà, che si affermano della Progressione Aritmetica ve ne sono pure alcune altre, che convengono alle somme differenti, che si possono intraprendere sopra i termini di questa Progressione.

1. Primieramente dunque si fa vedere, che se i termini dati sono un numero pari, le somme degli estremi sono uguali a tutte le somme degl' intermedj, così nell' esempio dato 2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. se la somma del primo coll' ultimo produce 18. questa medesima somma la producono tutti gli altri estremi 4. e 14., 6. e 12., 8. e 10.

2. E se il numero de i termini è dispari, come sarebbe levando il 16. dalla Progressione data, in questo caso la somma degli estremi è doppia del numero di mezzo, come in fatti la somma del 14. col 2., del 4. col 12., del 6. col 10. è doppia dell' 8. che è il termine, che si trova nel mezzo a i termini dati.

3. In oltre, se si multiplica la somma degli estremi per la metà del numero de i termini, essendo il numero pari, risulta un prodotto, che è uguale alla somma di tutti i termini dati.

4. Ma se è dispari il numero de i termini, in questo caso la somma di tutti si mostra uguale al risultato dalla multiplicazione di quel di mezzo, per il numero de i termini, e

però

però continuando la Progressione dal 2. fino al 14. sette sono i termini dati, de i quali quel di mezzo è l'8. e così multiplicato questo 8. per il 7. risulta 56. che è per l'appunto la giusta somma di tutti i termini della Progressione.

5. In un altra maniera si possono pure trovare queste somme de' termini della Progressione, quantunque non sieno espressi gli stessi termini, se qualche cosa si supponga sufficiente per questo effetto, come sarebbe, se si supponesse nota la differenza, il numero de' termini, ed il primo termine della Progressione, perchè in questo caso, se il numero è pari, prima si trova l'ultimo termine colle regole antecedenti, e poi come prima si rileva la somma di tutti, e se è dispari, prima si trova la misura del medio, e poi nello stesso modo di prima multiplicato, come si è detto, questo medio trovato, risulta la somma di tutti. Per la qual cosa, se otto sono i termini della Progressione, se la loro differenza è 2, ed il primo termine similmente è il 2. si trova colle regole passate l'ottavo termine, che si vede essere il 16., e poi aggiunto al primo 2. si dice 4. via 18. fa 72. che corrisponde questo prodotto esattamente alla somma di tutti i termini; e se in vece di essere otto termini sono sette soli, si cerca nel modo predetto quel di mezzo, e si trova, che è l'8. poi si dice 7. via 8. fa 56. e questo 56. è la somma dimandata.

VII. Di tutte queste proprietà, che or ora si sono aggiunte per la Progressione aritmetica, eccone i fondamenti per assicurarci della loro bontà.

1. Primieramente dunque abbiamo detto come le somme di tutti i termini estremi sono uguali fra loro. Ciò manifestamente è vero, attesochè essendo i termini estremi della Progressione uno minore, e l'altro maggiore, ed essendo il maggiore un complesso delle differenze de' minori, si osserva, che di quanto l'ultimo de' maggiori per cagione delle differenze sopravanza il penultimo, e questo il terzo ultimo, e questo il quarto ultimo, di altrettanto il primo de' minori si vede inferiore al secondo, questo al terzo, e il terzo al quarto, dunque facendosi l'Equilibrio fra i termini estremi per quello, di cui scemano i maggiori, e quello per cui crescono i minori, è necessario, che le loro somme risultino sempre uguali, come stabilisce la prima di queste proprietà.

2. Che

2. Che poi ciascuna di queste somme sia doppia del termine di mezzo in una serie di termini numerati impari, che è ciò, che in secondo luogo si afferma, è egualmente vero, a motivo, che il termine di mezzo viene ad essere medio proporzionale fra i termini estremi di qualunque somma, il quale termine medio proporzionale sempre è la metà de' due estremi a riguardo, che per eguale intervallo da essi si discosta, o per egual numero di parti di essi è maggiore, come si vede nell'esempio dato 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, in cui l' 8, che è il termine di mezzo, tanto si discosta, o di tante unità è maggiore del primo termine 2. quanto si discosta, o è minore del 14. che è l'ultimo termine, o da gli altri intermedj; essendo dunque le differenze 6, e 6 nel primo confronto 4, e 4 nel secondo 2, e 2 nel terzo. La somma de' termini estremi starà alla somma del medio proporzionale, come la somma delle differenze stà ad una di loro, ma la somma delle differenze è doppia di una sola, dunque le somme de' termini estremi saranno doppie de' termini di mezzo, che è ciò, che si voleva provare.

3. Che poi, se si multiplica la somma degli estremi per la metà del numero de' termini abbia da risultare un prodotto eguale alla somma di tutti i termini, ciò si rileva da quello, che quì sopra abbiamo detto in ordine alle somme de i termini estremi, mentre, se tutte le somme sono uguali fra loro, servirà multiplicarne una di esse per la metà del numero de' termini, per avere in questo prodotto tutte le somme unite insieme, essendo pari il numero de' termini. Ed in fatti sieno questi i termini della Progressione 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24. egli è evidente, che se la somma del 3. col 24. è uguale alla somma del 6. col 21. queste due somme unite insieme paragonate ad una sola, avranno ad essa una ragione dupla, e similmente se tre, o tutte quattro si sommeranno, e queste somme si paragoneranno ad una sola, avranno ad essa la ragione tripla, e quadrupla, dunque staranno fra loro come l' 1. al 3. al 4. ma la ragione dell' 1. al 4. è la medesima, che la ragione, che risulta fra la somma degli estremi 27. multiplicata per la metà del numero de' termini, cioè per 4. al prodotto 108., dunque questo prodotto sarà uguale alla unione delle quattro somme, che col dato esem-

Ddd pio

pio si preparano; e generalmente parlando, la somma degli estremi multiplicata per la metà del numero de' termini produrrà sempre un termine, che in se conterrà la somma di tutti i termini dati, se il numero loro è pari.

4. Come poi, se il numero de' termini è dispari, la somma degli stessi termini abbia da essere uguale alla multiplicazione di quel di mezzo per tutto il numero de' termini, si prova nella seguente maniera.

Sieno i termini della Progressione 3, 6, 9, 12, 15, è manifesto, che il 9. è un termine medio proporzionale fra il 3. ed il 15., e fra il 6., ed il 12., ma il termine medio proporzionale è la metà della somma degli estremi; dunque il 9. sarà la metà della somma nata dalla unione del 3. col 15., e del 6. col 12., dunque congiungendo le due somme prese insieme, saranno quadruple dello stesso 9., ma ognuna di quelle, non considerato il termine del mezzo, multiplicata per la metà del numero degli altri termini, fa un prodotto uguale a tutte le somme raccolte insieme; dunque il termine medio multiplicato per l'intero numero de' termini, non considerato fra essi lo stesso termine medio, sarà un prodotto uguale a tutte le stesse somme senza il termine di mezzo, dunque aggiunto questo termine, la multiplicazione del termine di mezzo per il numero di tutti i termini, compreso il medio, sarà un prodotto uguale alla somma di tutti i termini, compreso lo stesso medio, come si doveva mostrare.

5. Quello che si è aggiunto intorno all'altro modo da potersi praticare per provare le predette somme de' termini della Progressione, riesce con profitto, e non si osserva sopra di ciò altra cosa particolare, fuori che sussista la verità del supposto, e che si applichino con giudizio le regole già stabilite, mentre dal buon uso di esse ha da risultare la bontà della operazione nell'uno, e nell'altro de' supposti casi, cioè e quando si opera in una serie di termini pari, e in un altra di termini, de' quali il numero sia dispari. Siccome tutte le predette verità si verificano, o sia la Progressione in una serie di numeri, che procedono secondo l'ordine naturale, o sivvero sia in una serie di altri, che si avanzano secondo la serie di numeri dispari.

VIII.

VIII. Dalla notizia delle proprietà della Progressione aritmetica, che si sono già osservate, deriva a noi la soluzione di diversi quesiti, ne' quali essa principalmente vi ha luogo. Eccone alcuni, che serviranno di esempio agli altri, che si potessero preparare nella stessa materia.

I.

Movendosi un corpo da una qualche altezza con moto equabilmente accelerato, nel primo minuto passa per uno spazio di cinque braccia, nel secondo per 3., nel terzo per 5., nel quarto per 7. &c. e così sempre con questa Progressione, si cerca quanti spazj farà l'ultimo minuto d'ora, e quanti ne avrà passati in un ora intera.

II.

Un pendolo in un tempo ha fatto 7. vibrazioni, in un altro ne ha fatte 12. in un altro 14., e così sempre, fintantochè nell'ultimo tempo ne arriva a fare 62. Si dimanda in quanti tempi queste 62. le abbia fatte, e quale sia tutto il numero delle vibrazioni.

III.

Una Piazza è battuta da 6. parti, riceve in un ora dal secondo lato un numero di tiri d' Artiglieria, che supera quelli venuti dal primo lato di 15. tiri, dal terzo lato ne riceve 15. altri più, che non ha ricevuti dal secondo, così da tutti i lati rimanenti è battuta la detta Piazza collo stesso ordine di tiri, talmentechè in un ora tutti li tiri, che riceve sono 1815. Si dimanda quanti tiri sieno venuti in un ora da ciascheduna delle sei parti.

Risposta a' Quesiti.

I. Due dimande fa il primo quesito, si risponde alla prima, che nell'ultimo minuto d'ora il corpo, che si muove col moto equabilmente accelerato dee descrivere 119. volte il primo spazio, cioè dee muoversi per 595. braccia. Alla seconda si dice, che tutti gli spazj passati in un tal tempo, conterranno 3600. volte il primo, cioè sarà un numero di 18000. braccia. Si deduce la verità della prima risposta dalla prima

proprietà ſtabilita per la progreſſione, con cui ſi moſtra, che il primo termine della progreſſione data è uguale all' ultimo aumentato dal quadrato, che ſi fa riſultare dalla differenza, che è fra' termini multiplicata per il numero degli ſteſſi termini meno uno. Per la qual coſa, ſe 5. braccia ſono quelle, che ſi paſſano nel primo minuto, e 15. le altre paſſate nel ſecondo, ecco, che la differenza ſarà di 10. braccia. E ſe il tempo, che ſi aſſegna al moto di queſto corpo ſono 60. minuti, ecco che la ſomma delle braccia, che ſi hanno da paſſare ha da rilevarſi dal prodotto del 60. meno uno, cioè dal 59. multiplicato per 10. coll' aggiunta della miſura del primo ſpazio paſſato, che ſono 5. braccia, e così dee veramente eſſere uguale a 595. La ſeconda riſpoſta ha il ſuo fondamento nella terza proprietà della progreſſione poſta ſotto il numero 2. per chè eſſa è quella, che ha luogo in queſta. Il 1800. riſulta dalla multiplicazione della ſomma de i termini eſtremi della data progreſſione 5., e 595., cioè 600. per la metà del numero de i termini dati, cioè per 30.

II. Si riſponde al ſecondo queſito, il quale come il primo è diviſo in due dimande, che in dodici tempi eguali al primo, il primo avrà fatto le 62. vibrazioni, e che a 414. aſcenderanno le vibrazioni fatte in tutti queſti tempi. Dipende la verità della prima riſpoſta dalla terza proprietà della progreſſione poſta ſotto il primo numero, mentre il caſo del queſito è lo ſteſſo, che quello, di cui ivi ſi parla, e che per riſolverlo ſe gliene aggiugne la regola, la quale poſta in uſo in queſto luogo con levare dalle 62. vibrazioni, che fanno l' ultimo termine della progreſſione, le 7. prime, e con partire l' avanzo 55. per la loro differenza, che è 5. rimarrà per quoziente l' 11., che come ſi è detto, è minore dell' unità, perchè giuſtamente poſſa moſtrare la quantità del tempo, in cui le dette 62. vibrazioni ſi dovranno fare. L' altra parte poi della riſpoſta è appoggiata alla verità della terza proprietà di ſopra accennata ſotto il numero 2., mentre quello, che per eſſa ſi manifeſta, non è niente diverſo da quello, che ivi ſi prova, e che ora quì ſi produce per ſapere, che realmente non più di 414. vibrazioni ſaranno quelle, che in tutto il dato tempo ſi conteranno; mentre ſe al 62. ſi aggiugne il 7., cioè ſe gli eſtremi termini della Progreſſione ſi aggiungono

gono insieme, dovrà infallibilmente il loro risultato 69. multiplicato per la metà de i tempi, produrre il 414., che è la giusta somma di tutte le vibrazioni fatte nel tempo, che 12. volte è maggiore del primo, in cui 7. sole vibrazioni si fecero.

III. Per rispondere al terzo quesito, si osserva, che contribuisce alla soluzione di esso quella proprietà della progressione, per cui si conosce, che la somma di tutti i termini è uguale alla somma degli estremi multiplicata per la metà del numero de' termini; dunque, se noi abbiamo noto questo prodotto nell' intero numero de' tiri, che si fanno da tutti li 6. lati, che battono la Piazza, che sono 1815. troveremo pure con dividere questo prodotto per la metà del 6., cioè per 3., che 605. tiri saranno il complesso dell' ultimo termine della progressione col primo; ma l'ultimo termine risulta dalla unione delle differenze prese tante volte, quanti sono i termini dopo il primo, e delle parti del primo termine, come di sopra si è detto: dunque questo 605. sarà un composto del primo termine preso due volte, e della differenza cinque volte presa, per essere esso nella Progressione data il quinto termine dopo il primo, ma la differenza data è 15., dunque il 605. conterà in se cinque volte il 15., e quel che avrà di più, sarà il primo termine preso due volte, ma 5. volte 15. fa 75. Dunque, tolto 75. da 605. rimane 530., che sarà il doppio del primo termine di questa progressione; dunque, se si divide per mezzo il 265. sarà esso il primo termine della progressione, e sarà trovato il numero de' tiri, che dal primo lato si faranno sopra la Piazza. Con questo numero trovato, si renderà ora facile trovare le somme degli altri tiri, che da ciascuno de i rimanenti cinque lati si fanno sopra la stessa Piazza, mentre ognuno di loro numera più del precedente soli quindici tiri, che però si troveranno essersene fatti dal secondo lato 280, dal terzo 295, dal quarto 310, dal quinto 325, dal sesto 340, e tutte queste somme raccolte faranno esattamente il numero di 1815. tiri fatti sopra la Piazza da tutte le 6. parti, dalle quali era battuta.

IX. Dalle proprietà, che si sono addotte per la progressione aritmetica si possono inferire le seguenti cose.

1. S' inferisce in primo luogo, che se sono dati quanti

si vo-

si vogliono numeri differenti fra loro per un eguale eccesso, la somma degli estremi multiplicata per il numero di tutti i termini, ha da essere il doppio della loro somma.

2. In secondo luogo s'inferisce, che se si prenderà la differenza, che passa fra il minimo termine della progressione, ed il massimo, questa conterrà la comune differenza tante volte, quante sono i di lei termini, purchè di essi se ne lasci uno, senza contarsi con gli altri.

La verità di queste due illazioni si manifesta dalla dimostrazione già fatta alle precedenti proprietà, perchè se in fatti si mostrò vera la prima, che la somma degli estremi multiplicata per la metà del numero de' termini, produce un risultato, che è uguale alla somma degli stessi termini, non facendosi altro adesso, se non che multiplicare la medesima somma per un numero doppio del primo, dee necessariamente da questa multiplicazione derivare un prodotto doppio del primo, che è ciò, che dice la prima illazione. Similmente, se abbiamo veduto, che l'ultimo termine della Progressione è un composto delle differenze di tutti i precedenti, compreso il primo, dunque la differenza fra il primo, e l'ultimo dovrà essere un aggregato delle stesse differenze prese tante volte, quanti sono i termini della progressione uno meno, che è ciò, che la seconda illazione stabilisce.

3. In oltre se in una proporzione aritmetica di tre numeri, la somma degli estremi è doppia di quel di mezzo, si fa pur vedere, che se quel di mezzo si prende otto volte, e si multiplica per qualunque degli estremi, ed al prodotto si aggiugne il quadrato dell' altro degli estremi; nasce un prodotto, che è uguale al quadrato di quel numero, che risulta dal doppio del numero medio proporzionale unito al termine estremo, che lo multiplicò, dopo che fu inalzato ad essere otto volte maggiore di quel, che fosse. Per ragione di esempio sono i tre numeri proporzionali 5. 9. 13. il 9. preso 8. volte, diventa 72., ed il 72. multiplicato per 5. cresce fino a 360., ed aggiunto il quadrato del 13., cioè il 169. diventa 529. questo è quel numero, che è uguale al quadrato del 23. che è un numero composto del doppio del 9. e del 5. che multiplicò il 72. numero 8. volte maggiore dello stesso 9.

Se poi non tre fossero i termini proporzionali, ma due soli,

soli, in questo caso il quadrato del primo, preso col quadrato della metà del secondo, dee essere uguale al prodotto del primo termine multiplicato pel secondo, unito al quadrato della differenza, che si trova tra il primo termine dato, e la metà del secondo; così se i numeri, che si prendono sono 9. 6. il quadrato del 9. cioè 81. insieme col quadrato del 3. metà del 6., cioè 9. fanno 90., e tanto egualmente produce la multiplicazione del 9. per 6., cioè il 54. aggiunto al 36. quadrato della differenza del 9. dalla metà del 6.

Ecco la prova di tali proprietà. Già abbiamo dimostrato, che essendo tre termini proporzionali aritmeticamente, il doppio di quel di mezzo è uguale alla somma degli estremi, dunque la differenza, che si troverà fra il medio raddoppiato, ed il primo sarà il terzo termine; ma il quadrato del termine, che risulta dalla unione del primo col doppio del medio, è uguale a i quadrati di ognuno di loro, ed al risultato dalle multiplicazioni di uno per l'altro preso due volte (Eucl. 4. II.) cioè è quadruplo di quel numero, che si produce dalla multiplicazione del medio per il primo; e similmente il quadrato del doppio del medio col quadrato del primo, di nuovo si vede uguale al prodotto del medio raddoppiato, che si multiplica per il primo preso due volte, ovvero è quadruplo del risultato dalla multiplicazione del medio per il primo col quadrato del terzo. Dunque il quadrato fatto del doppio del medio col primo, come da un termine solo, sarà otto volte maggiore del risultato del medio per il primo col quadrato aggiunto del terzo, che è quello, che in questa illazione si diceva in primo luogo.

L'altra parte della illazione con egual facilità si vede, che è vera. Imperocchè il quadrato del primo termine col quadrato della metà del secondo è uguale per la 7. del II. di Euclide al prodotto dalla multiplicazione di uno di loro per l'altro, preso due volte col quadrato della differenza degli stessi termini, ma ad un tal prodotto preso due volte, è pure uguale il prodotto del primo termine dato, e multiplicato per il secondo, per essere questo il secondo termine, che ora multiplica, doppio dell'altro, che intraprese la precedente multiplicazione, dunque i predetti quadrati sono eguali al prodotto, che risulta dalla multiplicazione del primo termine da-

ne dato per il ſecondo, inſieme col quadrato fatto dalle loro differenze, che è quello, che ſtabiliva la ſeconda parte della terza illazione.

4. S' inferiſce in quarto luogo, che ſe ſi prenda nella Progreſſione aritmetica la ſua differenza, e queſta ſi multiplichi per il maſsimo de i termini dati, e poi ſi uniſca al prodotto il quadrato dell' eceſſo del primo termine ſopra la metà della differenza, ſi farà un numero, che ſarà uguale al quadrato del minimo termine ſommato col quadrato della metà della differenza, e col quadrato della differenza tante volte preſo, quanti ſono i termini della Progreſsione, ſenza l' ultimo.

Sono i termini della Progreſsione 3. 7. 11. 15. ſi prenda il 60. che è il termine, che riſulta dalla multiplicazione dell' ultimo per la differenza, e ſi aggiunga l' uno, che è il quadrato dell' avanzo del primo termine impiccolito della metà della differenza. Si vede con verità, che la ſomma di queſti due termini, cioè 61. è uguale a tre quadrati, cioè al quadrato del primo termine, che è 9. al quadrato della metà della differenza, che è 4., ed al 48. che è il quadrato della differenza intera preſo tre volte per eſſere quattro i numeri della Progreſsione.

Si dimoſtra quanto in queſta quarta illazione ſi dice con queſto diſcorſo. La differenza, con cui l' ultimo termine ſupera il primo, tante volte contiene la differenza della Progreſsione data, quanti ſono i termini della medeſima, meno uno, come già abbiamo detto altre volte; dunque tanto è multiplicare l' ultimo termine per la differenza della Progreſſione, quanto che multiplicare la ſteſſa differenza tante volte in ſe ſteſſa, quanti ſono i termini della Progreſsione meno uno, ed una volta nel primo termine. Ma il prodotto dalla differenza nel primo termine col quadrato fatto da ciò, che rimane al primo termine ſcemato della metà della differenza è uguale alli quadrati del primo termine, e della metà della differenza per la precedente dimoſtrazione: dunque il riſultato della multiplicazione della differenza nell' ultimo termine, col quadrato dell' avanzo del primo termine, ſcemato della metà dalla differenza, è uguale al quadrato del primo termine col quadrato della metà della differenza, col quadrato dell' intera dif-

differenza, preſo tante volte, quanti ſono i termini della Progreſsione meno uno, coſa, che ſi doveva provare.

5. In quinto luogo ſi rileva come nella Progreſsione aritmetica, fatta una ſola ſomma del quadrato del più piccolo termine del quadrato della differenza, preſo tante volte, quanti ſono i termini, che precedono il maſsimo, e del doppio del riſultato dalla multiplicazione di ciaſcun termine, che precede lo ſteſſo ultimo, per la differenza, queſta ſomma ſarà uguale al quadrato del maſsimo termine preſo una ſola volta 2. 5. 8. 11. 14. ſieno i termini della Progreſsione, in cui la differenza è 3., ſe queſta ſi multiplica per ciaſcuno de' primi quattro termini, e ſi raccolgono li prodotti, riſulta 78. che ſi raddoppia, e ſi ha 156. che ſi congiugne al 4. quadrato del 2. che è il termine minimo, e produce 160. queſto 160. ora ſi aggiunga al 9. quadrato della differenza preſo quattro volte, cioè al 36. ed il riſultato 196. ſi vede, che corriſponde eſattamente al quadrato del 14. Perchè ſe la differenza unita al penultimo termine, cioè all' 11. fa un quadrato, che è uguale al quadrato della differenza medeſima col quadrato dell' 11. inſieme, con ciò, che riſulta dalla multiplicazione fatta due volte dell' 11. per la ſteſſa differenza (Eucl. 4. II.) e ſe per la ſteſſa ragione il quadrato dell' 8. è uguale a i quadrati del 3. e del 5. col riſultato del 3. per il 5. preſo due volte, e ſe pure finalmente il quadrato del 5. è uguale alli quadrati del 3. e del 2. col riſultato ſimilmente della multiplicazione del 3. per il 2. preſo due volte; dunque il quadrato dell' ultimo termine dee eſſere uguale al quadrato del primo termine della Progreſsione preſo una volta, e poi al quadrato della differenza, tante volte preſo, quanti ſono i termini della Progreſsione meno uno, ed in oltre al doppio del prodotto della differenza multiplicata per tutti gli ſteſsi termini meno l' ultimo, come in queſta illazione ſi è ſtabilito.

6. Quello che in ſeſto luogo può inferirſi è, che ſe ſi riquadra il numero maſsimo della Progreſsione, e ſi ricreſce della metà della differenza, ſi vede un riſultato, che è uguale al prodotto della differenza due volte multiplicata per ciaſcun termine inſieme col quadrato fatto da ciò, che avanza al minor termine diminuito della metà della differenza; laonde prendendo li termini della progreſſione, queſti numeri 7. 9. 11.

 13.

13. 15. 17. in essi si vede, che la differenza è 2. la metà di essa aggiunta al massimo termine 17. fa 18. il quadrato è 324. e la stessa somma risulta, se si raccolgano in una sola somma i prodotti di tutti i termini della Progressione multiplicati due volte per la data differenza, con aggiugnere ad essa il quadrato del 6. che è la porzione rimasta del 7. che si diminuisce della metà della predetta differenza.

E per verità il quadrato fatto dall' ultimo termine della Progressione colla metà della differenza, come da un termine solo, se, come tante volte si è detto, è uguale al quadrato di ognuno di loro, ed al risultato dalla multiplicazione di uno per l' altro preso due volte, ovvero al risultato fatto dalla multiplicazione dell' ultimo termine per la differenza intiera, ne viene, che se il quadrato dell' ultimo termine per quello, che antecedentemente abbiamo detto, è uguale al doppio del prodotto dalla multiplicazione della differenza per ciascheduno de i precedenti termini, senza l' ultimo col quadrato del primo termine preso una volta sola, e col quadrato della stessa differenza altrettante volte preso, quanti sono i termini della Progressione meno uno, sarà altresì il quadrato dell' ultimo termine uguale al numero, due volte fatto dalla differenza multiplicata per i primi termini, senza l' ultimo, ed al numero, che risulta dalla multiplicazione della differenza stessa per l' ultimo, unitamente con i quadrati del primo, e della metà della differenza presi insieme, e col quadrato della differenza tante volte preso, quanti sono ~~i~~ termini, meno uno, ma per la quarta illazione i quadrati fatti dal primo termine, e dalla metà della differenza insieme col quadrato della intera differenza tante volte preso, quanti sono gli stessi termini, meno uno, sono uguali al prodotto della differenza nell' ultimo termine insieme col quadrato del primo scemato della metà della differenza, dunque il quadrato dell' ultimo termine unito alla metà della differenza, dee essere uguale al doppio del risultato dalla differenza multiplicata per tutti i termini, insieme col quadrato del primo termine diminuito della metà della differenza, come questa sesta illazione determina.

7. Se non due volte si multiplicano i termini della precedente Progressione per la loro differenza, ma otto volte, e se de' prodotti se ne fa una sola somma, e ad essa si aggiu-

giugne il quadrato fatto dal doppio del primo termine meno la differenza degli stessi termini, cioè fatto dal 12. si rileva, che tutto il risultato è uguale al quadrato, che si fa dal doppio del 17 † 2., cioè dal 36., cioè dall' ultimo termine della Progressione raddoppiato, e dalla differenza de' termini come da un termine solo.

In questa settima illazione per rilevare la verità di ciò, che si dice, prendasi la somma dell' ultimo termine unita alla metà della differenza, cioè il 18. essendochè dunque il risultato due volte preso della differenza multiplicata per tutti i termini insieme col quadrato del primo termine, scemato della metà della differenza, è la quarta parte del prodotto, che risulta dalla multiplicazione della differenza medesima multiplicata per tutti i termini della Progresione otto volte presi, insieme col quadruplo del quadrato del primo termine, scemato della metà della differenza, ne viene, che essendo il primo prodotto uguale al quadrato fatto dall' ultimo termine, unito alla metà della differenza, cioè il 18. come si è veduto nella precedente illazione, ancora il secondo prodotto sarà quadruplo dello stesso quadrato fatto dal 18., ma il quadrato fatto dal 18. preso quattro volte, è uguale al quadrato fatto dal 36., cioè dal doppio dell' ultimo termine della Progresione, unito alla differenza, che è fra tutti i termini, dunque il secondo prodotto sarà uguale al quadrato, fatto dal 36., perchè poi ciò, che rimane al primo termine, scemato della metà della differenza, fa un quadrato, che è la quarta parte del doppio di questo avanzo; dunque il secondo prodotto insieme col quadrato del doppio di questo avanzo dee essere uguale al quadrato fatto dal 36. che è quello, che la presente illazione determina.

8. S' inferisce finalmente, che nella naturale Progresione de i numeri, qualunque sia il numero de i termini, se al prodotto della multiplicazione del doppio numero de i termini, meno uno, per la loro differenza, si aggiunga due, si ha un risultato, che è uguale al risultato dalla unione del doppio dell' ultimo termine alla differenza degli stessi termini. Sieno dunque dati questi cinque termini 1. 10. 19. 28. 37. i quali mantengono costante la differenza 9. si vede, che in fatti il doppio dell' ultimo termine, cioè 74. unito alla differenza 9.

produce 83, come pure producono 83. il 9. che è numero, il doppio de i termini dati meno uno, multiplicato per il 9. coll' aggiunta di due unità.

La stessa cosa si deduce ancora da questo discorso. Il risultato dal numero de i termini meno uno, multiplicato per la differenza degli stessi termini, è uguale all' eccesso dell' ultimo termine sopra il primo per la seconda illazione, dunque se a questo risultato si aggiugnerà uno, il suo valore corrisponderà al valore dell' ultimo termine della Progressione. Prendasi ora il doppio del numero de i termini meno due, e per esso si multiplichi la comune differenza, e poi si aggiunga due, che risulterà un prodotto, il quale sarà il doppio dell' ultimo termine della Progressione, e mancherà della somma, che si cerca, della misura della comune differenza, dunque il doppio, che si prenda del numero de' termini meno uno, e per esso si multiplichi la stessa differenza comune, e se gli aggiunga due, in questo ultimo risultato comparirà il numero uguale al doppio dell' ultimo termine, e alla differenza comune, che è quello, che questa ultima illazione stabiliva.

X. Una sola cosa si può aggiugnere in proposito di volere stabilire la proprietà di due numeri, presi secondo l' ordine naturale, come sarebbero 6, e 7. però si dice in primo luogo, che se di essi si formino due quadrati, e si multiplichino fra di loro, produrranno un risultato, che sarà il quadrato di quel numero, che risulterà dalla multiplicazione scambievole de' due numeri dati: e secondariamente si osserva, che il quadrato del maggiore sarà uguale al quadrato del minore, presa di più la sua radice due volte, e l' unità. La prima di queste due cose ce la dimostra Euclide nell' 11. Prop. del Libro ottavo, perchè mostra, che il risultato del primo termine per il secondo è medio proporzionale fra il quadrato del primo, e quello del secondo, dunque il prodotto della multiplicazione de' due quadrati fra loro, che sono 36. e 49. deve essere uguale al quadrato di quel di mezzo, cioè al quadrato del 42.

L' altra proprietà stabilita è ugualmente certa, atteso che il quadrato del secondo termine, paragonato al quadrato del primo, ha cinque unità di più, che non ha il primo, ma que-

ste

ſte cinque unità eſattamente miſurano due volte la radice del primo coll' avanzo di uno, dunque il quadrato dell' ultimo termine è uguale al quadrato del primo, aggiunta due volte la radice di eſſo primo con uno di più. Notiſi però, che queſta proprietà unicamente ſi verifica in quei quadrati, che ſi fanno da i numeri, che creſcono ſecondo la naturale progreſſione de i numeri pari, laddove la prima proprietà non ammette alcuna eccettuazione; dandoſi per tanto due numeri, che ſi avanzino ſecondo la progreſſione naturale de i numeri diſpari, come ſarebbero 5. e 7. non è altrimenti vero, che il quadrato del ſecondo ſia uguale al quadrato del primo aggiunte le ſteſſe coſe di prima, ma ſolo per queſti numeri, che creſcono ſecondo la ragione de i diſpari, ſi avverte, che facendo l' unione uno per volta de i numeri diſpari, le ſomme de i ſuſseguenti producono i quadrati de' precedenti. Si vede queſto nella ſeguente ſerie 1. 3. 5. 7. 9. in cui la ſomma de i primi due contiene il quadrato di quel numero, che ſi troverebbe medio fra loro, cioè del 2, e la ſomma dell' 1. 3. e 5, moſtra il quadrato del 3; ſiccome pure la ſomma dell' 1. 3. 5. 7. contiene il quadrato del quattro, e così ſempre, da che poi ſi viene ad inferire, che la ſomma di tutti i numeri, che creſcono ſecondo la naturale progreſsione de i numeri diſpari, ſia qualunque il numero de i termini, è ſempre uguale al quadrato del numero degli ſteſsi termini, per queſta ragione, perchè il numero de i termini o viene ad eſſer medio proporzionale fra la ſomma degli eſtremi, o è il medeſimo medio termine, ſecondo che il numero de' termini è dato pari, o diſpari, e come nelle paſſate regole abbiamo provato il medio proporzionale è ſempre la metà della ſomma degli eſtremi, dunque ſe due ſono queſte ſomme, come due riſultano, eſſendo dati queſti numeri 1. 3. 5. 7. il medio proporzionale quattro volte ſarà contenuto da queſte ſomme, ma giuſtamente il 16. contiene quattro volte il medio proporzionale alle due ſomme date, ovvero il quadrato del medio proporzionale, cioè del numero de i termini della progreſsione è eſattamente quadruplo dello ſteſſo numero, dunque il quadrato del numero de i termini deve eſſere uguale alla ſomma, che riſulta dalla unione de i quattro termini dati. Che ſe poi i termini dati nella progreſsione foſſero cinque, il medio loro, non ſolo

solo sarebbe submultiplice tante volte delle somme degli estremi, quanti sono i termini delle dette somme, ma oltre le dette somme si dovrebbe aver riguardo allo stesso medio termine, che però in questa serie 1. 3. 5. 7. 9. in cui cinque sono i termini della progressione, il medio proporzionale cinque volte sarà contenuto dalle estreme somme, ma il 25. è il numero, che cinque volte contiene il termine medio proporzionale 5. cioè il quadrato del 5., dunque il quadrato di questo numero conterrà l' unione di tutti i termini, e però in qualunque caso di una serie, che procede secondo il naturale avanzamento de i numeri, sempre il quadrato del numero de i termini è uguale alla somma degli stessi termini, come si voleva provare

XI. Dalle somme delle Progressioni Aritmetice, che hanno il loro principio dalla unità derivano certi numeri denominati Poligoni, che poi si dividono in numeri Triangolari, Quadrati, Pentagoni, Esagoni, Eptagoni &c. se la differenza de i loro termini è 1. 2. 3. 4. 5. &c.: siccome se si raccolgono insieme le somme de' numeri Poligoni fatte nella stessa maniera, con cui sono formati li stessi poligoni dalle progressioni Aritmetiche nascono i numeri detti Piramidali primi, e dalle somme di questi nascono i Piramidali secondi, e poi dalle loro somme hanno origine i Piramidali terzi, e così sempre, se collo stesso metodo delle somme si inoltriamo nell' infinito.

I numeri Piramidali si dicono ancora Triangolari primi, secondi, terzi, &c. ovvero Piramidali Pentagoni primi, secondi, terzi &c., se derivano dà numeri Triangolari, o dà numeri Pentagoni, che però, giacchè conoscono le differenze di tutti questi numeri per cagione delle loro somme, noi quì ne aggiunghiamo alcune per dare anche di essi una sufficiente notizia.

Sia la progressione Aritmetica in questi numeri - - - - -	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7.
Ecco come dalle loro somme nascono i numeri Triangolari	1. 3. 6. 10. 15. 21. 28.
Sia quest' altra la Progressione Aritmetica	1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15.
Fatte le somme, ecco i numeri Quadrati	1. 4. 9. 16. 25. 36. 49. 64.
Così se si pone la progressione in questa guisa	1. 4. 7. 10. 13. 16. 19.

Le

Le somme che risulteranno saranno numeri Pentagoni	1. 5. 12. 22. 35. 51. 70.
Come finalmente data questa progressione	1. 5. 9. 13. 17. 21.
Comparisce la serie de i numeri Esagoni	1. 6. 15. 28. 45. 66.

e ripetendo altri esempj di progressione Aritmetica, ne i quali le differenze superassero sempre di una unità le differenze delle serie precedenti, le somme produrrebbero i numeri Eptagoni, Ottagoni &c., che si tralasciano, perchè non contengono, e non promovono alcuna difficoltà. Come che poi i Poligoni hanno i loro lati, ed hanno i loro angoli, avvertiamo, che il numero de i termini della Progressione Aritmetica, che si sommano produce il lato del numero Poligono, e che il numero degli angoli è quello, che manifesta quanti angoli ha la figura, dalla quale il Poligono si denomina.

XII. Dovendosi trovare il Poligono, quando è dato il lato si può operare nella seguente maniera.

Il lato dato si scema di una unità: similmente il numero degli Angoli si diminuisce di due unità: gli avanzi si multiplicano fra di loro, ed aggiunto due al risultato, questo si multiplica per il lato dato, e se ne prende del prodotto la metà, che ci lascia il cercato Poligono. Rilevasi il fondamento di questa operazione da questo discorso. Essendo dato per ragion di esempio il 5. lato del Poligono, si dispongono i termini nella progressione Aritmetica 1. 4. 7. 10. 13. che hanno da fare il Poligono, che ha da avere il dato lato, dunque la somma di tutti i termini dati, sarà uguale a quel Poligono, ed il primo termine sarà 1., e la differenza 3. e 5. sarà il numero de i termini. Perchè dunque la differenza fra il primo termine, e l' ultimo è uguale al prodotto dalla differenza della Progressione nel numero de i termini, meno uno per la seconda illazione, se ad essa si aggiugnerà il due si farà l' intera somma de i termini estremi, dunque se questa somma si multiplicherà per il lato dato, risulterà a tenore della prima illazione il doppio della somma di tutti i termini, cioè il doppio del Poligono, fatto dal lato proposto, che è quello, che si è stabilito.

XIII. In un altra maniera supposte le stesse cose può riu-

scire

scire la misura del Poligono dimandato, avvertendosi, che allora questa si ottiene, quando multiplicato il lato intero del Poligono per se medesimo, diminuito di una unità, si prende il risultato, e si multiplica per il numero degli angoli diminuito esso pure di due unità, e poi se gli aggiugne il doppio di esso lato, mentre dimezzato un tal prodotto, nella sua metà si vede la misura dimandata per questo Poligono.

La dimostrazione è tale. Il lato del Poligono diminuito di una unità, cioè il 5. — 1. nella precedente operazione multiplicava il numero degli angoli scemato di due unità, cioè il 5. — 2, ed in questa il 5. — 1. multiplica se stesso tutto intero, cioè il 5; dunque i due prodotti 12. 20. staranno fra loro come i termini multiplicati, dunque i termini 3. 5. 12. 20. saranno quattro termini continuamente proporzionali, e così il prodotto degli estremi sarà uguale a quello degli intermedj, cioè risulterà uno stesso numero dalle due multiplicazioni, che è il 60. Perchè ora la multiplicazione degli intermedj arrivi a fare il doppio del Pentagono dimandato, serve per la passata, che si aggiunga il due al 12., che è il risultato dal numero degli angoli, scemato di due unità, multiplicato per il lato del Pentagono meno uno, e che di nuovo si multiplichino i due termini 5. e 14. Così ancora i due estremi produrranno la stessa cosa, se dopo la loro multiplicazione si aggiugnerà il 10, che è un numero doppio del lato del Pentagono, e si avrà anche per questo mezzo la misura raddoppiata del Pentagono dimandato, come bisognava ritrovare.

XIV. Per dare ancora una regola più universale per la misura del Poligono, si avverte, che se il lato di qualsivoglia Triangolo si multiplichi per un numero maggiore di due unità di esso lato, risulta una misura, che è doppia dello stesso Triangolo. Sia per esempio *6.* il lato del Triangolo, ed il 7. quel numero, che è maggiore del *6.* di una unità, dico, che il 42. è la misura doppia del Triangolo, di cui si parla. Ogni Triangolo si fa dalla somma della progressione Aritmetica, che comincia dall'unità, e che si inoltra sempre colla differenza di una sola unità; dunque è chiaro, che il numero de i termini, ovvero lo stesso lato del Triangolo è uguale al termine massimo, però se a questo lato si aggiunga l'unità, o il minimo termine, si ha in questa unione la somma degli estremi.

Laon-

Laonde se il lato del Triangolo, ovvero il termine massimo della Progressione si multiplicherà per questa somma, risulterà il doppio di tutti i termini, come si è detto nella prima illazione, cioè produrrà questa multiplicazione il doppio dello stesso Triangolo. Ciò avvertito si dice ora, che se sia dato il 10. per lato del Poligono, ed un numero di una unità minore di esso lato, cioè il 9, e di più 8. per il numero degli angoli del Poligono, diminuito di due unità, e si faccia col lato 9. il Triangolo 45. il quale multiplicato per l' 8. produce 360, e ad esso si aggiunga il dato lato 10., perchè risulti 370., questo 370. è il numero, che è uguale allo stesso Poligono. Per l' osservazione fatta, il 9. multiplicato per il 10. produce 90, che è una misura doppia del triangolo preparato col lato 9, cioè del 45. Essendosi col numero degli angoli diminuito di due unità, cioè coll'8. multiplicato il 45., è risultato 360. Se ora per lo stesso 8. si multiplica il 90. risulta 720. cioè un numero doppio del primo, dunque aggiugnendosi al primo il lato dato, cioè 10, ed al secondo il doppio del dato lato, cioè 20, risulterà per il primo 370, per il secondo 740, ma il 720. col doppio del 10. è il doppio del Poligono fatto dal lato 10. per la passata, dunque il 360. col lato 10. sarà lo stesso Poligono, come esattamente riscontrasi nella somma della seguente Progressione 1. 9. 17. 25. 33. 41. 49. 57. 65. 73.

XV. Nel modo, che col lato s' insegna di trovare il Poligono, così si può suggerire una nuova regola per trovare il lato, se ci sia dato il Poligono, e questa è tale. Il dato Poligono si multiplica per l' ottuplo del numero degli angoli, diminuito di due unità, al risultato si aggiugne il quadrato del numero degli angoli, prima scemato di 4. unità, poi dalla somma si leva la radice quadrata, la quale accresciuta dello stesso numero degli angoli, scemato di quattro unità, si parte per il doppio del numero degli angoli, diminuito di quattro unità, e nel quoziente si riscontra il lato del Poligono. Sia dunque il dato Poligono 370, questo multiplicato per 64. produce 23680, aggiunto il 36. fa 23716. di cui la radice quadra è 154. ed aggiunto il 6. viene a prodursi 160, che diviso per 16. lascia esattamente il 10. per il lato del Poligono, su cui si è operato.

XVI. Dopo di aver trovato i Poligoni facciamo vedere in alcuni eſempj le ſerie degli altri numeri, che ſono chiamati Piramidali, e perchè abbiam detto, che queſti naſcono dalle ſomme de' numeri Poligoni, diamo una ſerie di queſti per dedurne l'altra di quelli.

Serie di numeri Eſagoni.	1.	6.	15.	28.	45.	66.
Piramidali Eſagoni primi	1.	7.	22.	50.	95.	161.
Piramidali Eſagoni ſecondi	1.	8.	30.	80.	175.	336.
Piramidali Eſagoni terzi	1.	6.	139.	219.	294.	630.
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	

Non aggiunghiamo determinata regola per trovare le ſomme di queſti, perchè eſſendoſi data già quella, che ſi ha da oſſervare per trovare i numeri Poligoni, col di lei mezzo poſsiamo riuſcire nel ritrovamento de' numeri Piramidali; ſicchè dunque come appariſce dagli eſempj propoſti non occorre far altro per tale effetto, ſe non che ſecondo il metodo in quella regola fiſſato, ſommare i numeri delle ſerie ſuperiori, per trovare gli altri delle inferiori. Già del valore di queſta ſerie ſi è parlato nella Seconda parte del Primo Trattato al §. II. del Cap. IV. che però paſsiamo a diſcorrere delle Permutazioni, e delle Combinazioni de' numeri, alle quali in gran parte contribuiſce la notizia di quella regola, che ſi oſſerva per far naſcere i predetti numeri Poligoni, e Piramidali.

XVII. Le Permutazioni, o le vogliamo chiamare Variazioni de' numeri, ſi fanno quando l'ordine, ed il ſito loro ſi muta diverſamente, ſenza però che ſi alteri la loro condizione, e ſenza che ne pur uno di più ſe ne introduca nella ſerie, che ſi è preparata, per queſto effetto di permutarne i ſuoi termini. Se il termine dato è ſolo, non può permutarſi in alcun modo; onde non meno che infra due termini ſi può intraprendere queſta operazione, che poi ſi può continuare anche per una ſerie infinita. Se i termini dati ſono due, due Variazioni ſi poſſono fare, ſe ſono 3. ſe ne fanno 6, ſe ſono quattro ſe ne fanno 24., ſe ſono cinque ſe ne poſſono fare 120, e così ſuſſeguentemente ſe ſono dati quanti termini ſi vogliono il numero delle Variazioni, che ſi può fare ſopra di eſſe, contiene tante volte il precedente, quanti ſono i termini, che ſi trovano nella data ſerie ſeguente, che è ſuperiore di quella di un termine, e però ſe ſono ſei i termini dati, le Variazioni,

ni, che esſi comportano, ſono ſeſtuple di quelle, che ſi fanno con cinque termini, come ſaranno ſettuple, ottuple, nonuple, decuple &c. delle precedenti, tutte le altre, che ſi faranno con ſette, con otto, con nove, e con dieci termini &c. talmentechè ſi ſtabiliſce, che volendoſi prontamente trovare le Variazioni tutte, che poſſono convenire a qualunque numero di termini dati, che creſcono di una naturale progreſſione Aritmetica, baſta multiplicare li ſteſsi termini dati l'uno per l' altro, mentre il loro prodotto manifeſta eſattamente ciò, che ſi cerca.

Con queſta regola ſi trova, che data queſta ſerie 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. con eſſa ſi poſſono fare 5040. Variazioni, e data queſt' altra 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. ſe ne fanno 40320. come ſe ne fanno 362880. ſe la ſerie abbia nove termini, e ne riſultano 3628800. ſe nè ha dieci, e di mano in mano ſe ne produrrà un numero ſempre più grande, ſe anche la ſerie, che ſarà data comprenderà un numero di termini ſempre maggiore. E ben vero, che ſolo allora ſi troverà queſto numero, quando già ſi ſarà fatta l' operazione ſopra tutte le precedenti ſerie minori, che è lo ſteſſo che dire, che in queſta ricerca ſi deve procedere col Metodo Sintetico, come ſi ha da cominciare l'operazione dalle prime fra tutte le altre, e dalle più ſemplici Ipoteſi.

XVIII. Se accadeſſe, che nella ſerie foſſero ripetuti li ſteſſi termini, per ſapere in queſto caſo il numero della Variazione, ecco la regola, che ſi ha da tenere. Si ha da operare primieramente, come ſe tutti i termini foſſero differenti, poi ſe un ſolo è il termine ripetuto, ſi ha da dividere la ſomma trovata per quel numero delle Variazioni, che può ricevere il termine ſimile, a tenore di quante volte è ripetuto, come ſe foſſe ripetuto due volte ſi ha da dividere per due, ſe foſſe ripetuto 3. volte ſi ha da dividere per 6., che ſe i termini ripetuti ſono diverſi, ſi ha da dividere la preparata ſomma per il prodotto dalla multiplicazione de i numeri delle Variazioni, che converrebbero a ciaſchedun termine ripetuto, a tenore di quante volte ciaſcuno ſarebbe ripetuto, cioè ſe un termine foſſe ripetuto due volte, ed un altro tre, la preparata ſomma ſi dovrebbe dividere per 12, ed il quoziente nell'uno, e nell' altro caſo moſtrerà la ſomma delle Variazio-

 ni,

ni, che possono convenire a tutti i termini della serie così preparati; dati perciò questi termini *aaabcde* le loro Variazioni dovrebbero essere 5040, ma perchè il termine *a* vien ripetuto tre volte, e con esso si fanno sei Variazioni, quindi è, che il proprio numero dovrà essere diviso per 6, e produrrà 840. Variazioni per il numero di quelle, che con i dati termini *aaabcde* si dovranno fare; che se oltre ad avere ripetuto il termine *a* tre volte, fosse altrettante volte ripetuto il termine *d*, come comparisce nel seguente esempio *aaabc ddde*, questo sarebbe quel caso, in cui multiplicato il numero delle Variazioni, che aspettano al primo termine, ripetuto tre volte per il numero delle Variazioni, che convengono al secondo, si prenderebbe il prodotto, e per esso si partirebbe l' intera somma delle Variazioni, che convengono a 9. termini, cioè in questo caso, per 36. si partirebbe 362880, ed il risultato 10080. darebbe il numero delle Variazioni, che si potrebbero fare nella data serie.

XIX. Venendo ora al particolare delle Combinazioni, primieramente si dice, che questa voce si adopra per manifestare quella operazione, che si fa per trovare tutte le disposizioni, che possono avere, o due, o più cose, quante se ne vogliono prendere, non solo quando si dispongono a due a due, ma ancora a tre a tre, a quattro a quattro, o in qualunque altro numero, o questo succeda per mezzo del sommarle, o più tosto col multiplicarle fra loro, secondo che porta il bisogno. E però vero, che o se ne prendano due, o tre, o molte più, quel numero, che si dà, si prende come esponente della Combinazione, e le cose combinate portano il nome di Binarj, Ternarj, Quaternari &c., o si dicono *Binioni*, *Ternioni*, *Quaternioni &c.*, e le Combinazioni già fatte, chi le chiama *Complicazioni*, o *Complessioni*, e chi forse con maggior aggiustatezza le dice *Elezioni* per denotare quella maniera, con cui le cose, o si prendono tutte separate fra loro, o non se ne prende alcuna. Egualmente, che nelle Permutazioni, ancora nelle Combinazioni li termini che si danno per mutarli, o sono tutti diversi, o alcuni di loro sono ripetuti. Se tutti sono differenti, e se si vuole, che in nessuna Combinazione la stessa cosa si abbia da vedere due volte, si dice, che la somma delle Combinazioni in tutte le serie è uguale al-

la

la somma di altrettanti termini, quanti se ne trovano in una progressione dupla, di cui sia l'unità il primo termine, cioè uguale allo stesso termine susseguente della medesima progressione diminuito di una unità, il qual termine, perchè è quello, che risulta dal due, multiplicato per se medesimo tante volte, quanti sono i termini, che nella progressione lo precedono, però si determina, che subito resta trovato il numero di tutte le Combinazioni nella data supposizione, allorchè dal prodotto del numero binario predetto si levi l'unità, mentre ciò, che rimane, esattamente corrisponde al cercato numero delle Combinazioni. La ragione di una tale dottrina è fondata nello stesso metodo, che si tiene per fare la serie di tutte le Combinazioni, perchè in primo luogo si pone sola quella quantità, che è la prima nella data serie, e poi quella, che è la prima nella seguente serie; unitamente seco prende tutte le Combinazioni delle serie precedenti, da che ne viene, che nella prima serie vi si ha da trovare una sola Elezione, poi nella seconda se ne hanno da far vedere due, quindi quattro nella terza compariranno, e otto saranno quelle della quarta, e così di mano in mano si regoleranno le altre Combinazioni, nelle quali la progressione si continuerà con una serie di ragioni, che saranno costantemente fra loro duple; ma è proprio di questa progressione, come più abbasso osserveremo, che l'ultimo termine risulti dalla somma de' precedenti coll' unità, dunque anche la somma delle Combinazioni, così fatte, corrisponderà a questo stesso termine ultimo diminuito di una unità, come facilmente si può rilevare dall'esempio, che segue.

Le quantità, delle quali si hanno da fare le Combinazioni, senza che alcuna di loro si trovi due volte ripetuta, sono queste *a*. *b*. *c*. *d*. *e*. alle quali corrispondono i numeri 1. 2. 4. 8. 16.

In primo luogo dunque comparirà unicamente il termine *a*, che constituirà la prima Elezione. Proseguendosi poi l'operazione, i termini della seconda Combinazione saranno *b*, *ab*, i termini della terza saranno *c*, *a c*, *c b*, *abc*, i termini della quarta saranno *d*, *a d*, *bd*, *a b d*, *e d*, *a c d*, *b c d*, *abcd*, ed i termini della quinta facilmente saranno *e*, *ae*, *b e*, *ce*, *de*, *abe*, *a ce*, *b ce*, *a d e*, *bde*, *c de*, *abce*, *a bde*, *acde*, *b c de*,

bcde, *abcde*, onde ſi vede chiaramente, che in fatti il numero de' termini in ogni Combinazione ſeguita la progreſsione dupla pertanto ancora nella loro ſomma apparirà la legge della medeſima progreſsione, che è tale, quale quì appreſso ſi pone. cioè la ſomma di tutte le Combinazioni ſarà uguale al termine, che nell' eſempio dato viene dopo il quinto termine, ſe però ſi diminuiſca di una unità, ovvero ſarà uguale al prodotto del 2. tante volte multiplicato per ſe medeſimo, quanti ſono i termini della progreſsione data, ſe però anche da queſto riſultato ſi toglierà l' unità.

1.
1 † 1 = 2.
1 † 1 † 2 = 4.
1 † 1 † 2 † 4 = 8.
1 † 1 † 2 † 4 † 8 = 16.
1 † 1 † 2 † 4 † 8 † 16 = 32.

XX. Per intraprendere le Combinazioni di quei termini, che tutti ſon diverſi fra loro, ma che però ſpeſſo hanno da ritrovarſi nella medeſima Combinazione, la regola è la ſeguente. Quanti termini ſono li dati, ognuno di loro preſo da ſe, ha da dare il principio ad altrettante ſerie di diverſe Combinazioni con queſt' ordine, che per fare i Binioni in qualunque ſerie, il termine, che è il primo in quella ſerie, non ſolo ſi deve Combinare con tutti li precedenti, come ſi è avviſato nella paſſata Combinazione, ma inoltre deve Combinarſi ancora con ſeco, da che ſuccederà, che ſe nella prima ſerie vi ſarà un ſolo Binione, nella ſeconda ve ne ſaranno due, nella terza tre, nella quarta quattro, e così ſempre creſceranno, ſecondo la naturale progreſsione de' numeri.

Dovendoſi poi fare i Ternioni, ciaſcun Ternione, che è il primo in tutte le ſerie, deve Combinarſi con tutti i Binioni delle precedenti, ed inoltre con quelli della propria ſerie, dal che rilevaſi, che nella prima ſerie ſi vedrà un Ternione, tre ſe ne vedranno nella ſeconda, ſei nella terza, dieci nella quarta &c. cioè a dire creſceranno, ſecondo la ſerie de i numeri Triangolari, come nelle altre Combinazioni più alte ſi vedranno creſcere li Quaternarj, li Quinarj &c. all' uſo de i numeri Piramidali, Triangoli Piramidali, e Piramidi Piramidali, o ſecondo altre Serie di numeri figurati di un genere ſempre più alto, &c.

Eccone per tanto l' eſempio, in cui ſi trovano Combinate queſte quattro quantità *abcd*.

Pri-

Prima ſerie	*a . aa . aaa.*
Seconda ſerie	*b . ba . bb . aab . abb . bbb .*
Terza ſerie	*c . ac . bc . cc . aac . abc . bbc . acc . bcc . ccc .*
Quarta ſerie	*d . ad . bd . cd . dd . aad . abd . bbd . acd . bcd . ccd . add . bdd . cdd . ddd .*

XXI. Volendoſi ora conoſcere la ſomma di tutte le Combinazioni, queſta facilmente ſi arriva a ſapere, ſe ſi operi in queſta guiſa. Si oſſerva il numero delle quantità, che ſi hanno da Combinare, e fino a qual modo, cioè ſe fino a Ternioni, o Quaternioni &c. per avere l'eſponente della Combinazione. Ciò avvertito, ſi prende quel numero, che ſupera di una unità il numero de' termini dati, e ſi fiſſa per il primo di una Progreſſione Aritmetica di numeri naturali, che tanti ne deve avere, che corriſpondano al grado delle Combinazioni. Si prepara inoltre un altra Progreſſione, che ſi fa cominciare dall'unità, e ſi va avanti, ſecondo la ſerie naturale de' numeri per tanti termini, quanti ſono ſtati poſti nella prima.

Preparate in tal guiſa le due Progreſſioni ſi multiplicano fra loro i termini della prima, quindi ſi multiplicano i termini della ſeconda, il maggior riſultato ſi parte per il minore, dal quoziente ſi leva uno, e ciò che reſta contiene il numero delle Combinazioni tutte, che ſi ſono fatte ſecondo il caſo dell'eſempio notato. Perchè in queſto Eſempio le Combinazioni non paſſano i Ternioni, e quattro ſono le grandezze date, ecco che così ſi prepara la prima progreſſione Aritmetica 5. 6. 7., e così pure ſi prepara l'altra 1. 2. 3. multiplicati i termini della prima, naſce queſto prodotto 210. multiplicati i termini della ſeconda riſulta 6. il quale entra nel primo prodotto 35. volte, cioè una volta più del numero delle Combinazioni, che nelle quattro preparate ſerie ſi contano. Dunque la regola propoſta fa vedere in queſto caſo con eſattezza quanto ſi voleva ſopra di ciò arrivare ad intendere.

XXII. Queſta regola, come ognun vede, raccoglie inſieme tutti i termini della ſerie, cioè le unità, li Binioni, e li Termini, che quando ſi voleſſe ſapere il ſolo numero de' termini, ſi dovrebbero preparare così le due progreſſioni Aritmetice. Il termine, che ha da cominciare la prima eſprimerà il numero delle grandezze date per Combinarle, ſeguiteranno

no gli altri due, secondo la serie naturale. La seconda poi comincierà dall' 1. e si avanza col due, e col tre; poscia fatte le loro multiplicazioni, e per il risultato del minore, diviso il maggiore, si vedrà nel quoziente il numero di tutti i termini, così per ritornare all' esempio dato, ecco quali saranno le due progressioni 4. 5. 6. sarà la prima, 1. 2. 3. sarà la seconda. Il prodotto della multiplicazione scambievole de i termini della prima sarà 120. il prodotto della multiplicazione de' secondi sarà 6. questo 6. nel 120. ci sta 20. volte, dunque nel dato esempio si troveranno 20. Termini, come in fatti, se si riscontrano, sono tanti.

XXIII. Può darsi il caso, che l'esponente della Combinazione sia maggiore del numero delle cose date da Combinarsi, come sarebbe se dati quattro termini si dovessero comporre de' Settennarj, e posto ciò la prima progressione, che si ha da preparare, dovrà avere per primo termine un numero, che sia maggiore di una unità del dato esponente 7. cioè in quest' esempio l' 8. e poi gli altri termini, che essa comprenderà, che saranno tanti, quante sono le quantità da Combinarsi, meno una, si supereranno scambievolmente di una unità. La seconda progressione poi comincierà dall'unità, come le altre, ed avrà lo stesso numero di termini, che si troveranno nella prima, ed al solito fatte le loro multiplicazioni, e la divisione, nel quoziente si manifesterà il numero delle Combinazioni, fissate per il dato esempio; cioè si troverà un numero, uguale al 120.

XXIV. Quello, che ora si vuol supporre è, che se sieno date quante si vogliono quantità per Combinarle con questa legge, che ogni una di esse si trovi nella Combinazione tante volte, quante ella è ripetuta in tutto il numero delle cose date. Si cerca il numero, che dovrà risultare da queste Combinazioni. Dovendosi fare le Combinazioni di questa quantità $a^5\ b^4\ c^3\ d^2$, egli è evidente, che tante Combinazioni convengono alla prima, quante volte essa è ripetuta, e perchè è ripetuta 5. volte, cinque saranno le Combinazioni, che le potranno convenire *a*. *aa*. *aaa*. *aaaa*. a^5. Aggiungasi, che può ancora non prendersi alcuna volta, onde della prima quantità si potranno fare sei Combinazioni, e queste saranno o. *a*. *aa*. a^3. a^4. a^5. Se si hanno da tirare avanti le Combinazioni colla

colla seconda quantità, ripetuta quattro volte b^4, egli è certo, che si faranno subito 6. Combinazioni, solo che essa si aggiunga a ciascuna delle precedenti, e perchè se fosse sola, essa servirebbe per stabilire quattro Combinazioni, dunque oltre di avere prodotte la lettera b le sei prime Combinazioni unita all' a, ne produrrà tre volte altre 6. coll' unirsi di mano in mano a se stessa, sicchè con queste due quantità $a^5 b^4$ si faranno cinque volte sei Combinazioni. Nella stessa maniera sopraggiugnendo la terza quantità c ripetuta tre volte essa, farà tre Combinazioni, cioè si prenderà sola, si Combinerà con tutte le precedenti, che sono 30. e farà le prime 30. Combinazioni, e poi aggiunta a se stessa farà due volte trenta altre Combinazioni, dunque colle tre quantità $a^5\ b^4\ c^3$ si faranno quattro volte 30. Combinazioni. La seguente quantità d, che due volte è ripetuta ha da fare due Combinazioni, fa la prima, quando si aggiugne a tutte le precedenti 120. fa la seconda, quando si aggiugne a se stessa, che ne contiene altre 120, dunque tutte le Combinazioni, che faranno le date quantità $a^5 . b^4 . c^3 . d^2$ faranno tre volte 120. cioè 360, Se fossero dati più altri termini per proseguire le stesse Combinazioni col medesimo metodo si anderebbe avanti in questa operazione, e nel termine di essa comparirebbe la verità della regola, che si determina per sapere in un tratto la somma delle Combinazioni, che possono farsi con diverse quantità, secondo il numero delle volte, che si trovano ripetute nella data serie.

La regola dunque è tale. Si prende ogni termine dato in un numero, che abbia una unità di più delle parti dello stesso termine. Così se il primo termine è stato a^5 si prende 6, se il secondo è stato b^4 si pone 5, se il terzo era c^3 si sostituisce 4, finalmente se il quarto aveva d^2, nel suo luogo si adopra il 3, e si fa questa serie 6. 5. 4. 3. Preparata in questa guisa la serie, si multiplicano tutti i termini fra di loro, e si ha da vedere 360, che è il numero ricercato delle Combinazioni, quali si sono trovate quì sopra. Si deve avvertire su questa regola, che si ha da levare l' unità, se si voglia, che la nullità espressa non si congiunga alle Combinazioni, che se l' unità non si toglie, il numero che risulta comprenderà il numero di tutte le Combinazioni, compresa quella pure, che forma la nullità.

C A P. VI.

Della Progressione Geometrica.

I. PIU' singolari per vero dire sono le proprietà della Progressione Geometrica, e superiori di gran lunga a quelle, che nel precedente Capitolo si sono apportate intorno all' Aritmetica; incominciando dunque a discorrere di esse in questo luogo, avvertiamo, che si abbia sempre in vista l'esponente della Progressione, perchè di esso quasi in ogni operazione ci serviamo, quando di mano in mano dobbiamo scoprire le di lei proprietà. L' esponente della Progressione è lo stesso, che il denominatore della proporzione, che si mantiene ne i termini della Progressione, e questo è il quoziente, che risulta dalla divisione del maggior termine per il minore, onde essendo dati i termini di una ragione 12. e 4, giacchè il 12. diviso per 4. lascia 3, dico che questo 3. è il denominatore della ragione, che ha il 12. al 4, e che questo denominatore è altresì quello, che si chiama l'esponente di quella Progressione, di cui tutti i termini mantengono la Progressione medesima.

II. Già altrove abbiamo portata la differenza di questa dalla Aritmetica, ed abbiamo detto, che ha di proprio non di risguardare il numero delle parti, che restano sopra un termine, e l' altro, ma che consiste nell' avere tutti i termini fra di loro paragonati le simili differenze, per la qual cosa, un esempio della Progressione Geometrica può stabilirsi in questa serie 2. 4. 8. 16. 32. &c. nella quale certamente il numero delle parti, che in ogni termine sopravanzano, non è lo stesso, ma è bene la medesima quella differenza, per cui ciascheduno de' termini dati è superato, o scambievolmente supera l' altro; vedendosi, che si continua fra tutti i termini quella ragione, che è chiamata submultiplice dupla.

III. In questa Progressione cinque sono quelle proprietà, che principalmente si notano.

La prima è, che il prodotto degli estremi è uguale al prodotto di due termini egualmente lontani degli estremi.

La seconda è, che il secondo termine è uguale al primo, multiplicato per la prima potenza dell' esponente della ragione, che resta in questa Progressione &c. La

La terza è, che il secondo termine, meno il primo, è al primo come l'ultimo, meno il primo, è alla somma di tutti i termini, che lo precedono.

La quarta è, che il primo termine è al secondo, come la somma di tutti, eccettuato l' ultimo, è alla somma di tutti, eccettuato il primo.

Finalmente la quinta proprietà è, che la somma di una Progresśione infinita può essere uguale ad un numero finito.

IV. La prima di queste cinque proprietà l'abbiamo già dimostrata nel Capit. II. di questo Trattato, dove si diede ragione per qual motivo in quattro termini direttamente proporzionali il prodotto dalla multiplicazione degli estremi doveva essere uguale al prodotto dalla multiplicazione degli intermedj, che però correndo la stessa parità di ragione in una proporzione di quattro termini, che in una qualunque Progresśione Geometrica, è necessario, che alla multiplicazione de' termini di questa succeda ciò, che si mostrò convenire alla multiplicazione de i termini di quella, che è ciò appunto, che si diceva, che il prodotto de' termini estremi deve essere uguale al prodotto de' termini, che ugualmente si allontanano da i loro estremi.

V. Passando dunque alla prova delle altre proprietà. Per prova della seconda si dice, che il primo termine della Progressione in Ipotesi è minore del secondo dell' esponente della ragione, che si pone fra il primo termine, ed il secondo; dunque il primo termine preso insieme coll' esponente, deve essere uguale al secondo, che è lo stesso, che dire, che il secondo termine è uguale al primo, multiplicato per la prima potenza dell' esponente della ragione, che si trova in questa Progresśione, cioè se i termini sono 2. 4. 8. 16. &c. si dice il $4 = 2 \times 2$, che se si prenda il terzo termine, o il quarto di ciascuno di questi si dice, che è uguale al primo, multiplicato nel primo caso per la seconda potenza del 2, cioè per 4, e multiplicato nel terzo caso per la sua terza potenza, onde si scriverà $8. = 2 \times 4.$ e $16. = 2. \times 8$, e così ogni altro termine, che si possa trovare nella Progressione sempre si farà vedere uguale al primo, multiplicato succesśivamente per quella potenza; che mostrerà la distanza del termine dato dallo stesso primo, che deve essere multiplicato.

VI. Si inferiſce da queſta proprietà quella regola, che ſi ha da oſſervare per ſcoprire ſubito nella Progreſsione qualunque termine dimandato dopo il primo dato, e dopo ſtabilita la condizione della ragione, che ha da mantenerſi nella Progreſsione, perchè ſe qualunque termine dopo il primo è uguale allo ſteſſo primo multiplicato per la ſua potenza, caratterizzato dal numero del luogo, nel quale il termine dato ſi trova, diminuito di una unità, ne ſegue, che dimandato per ragione di eſempio il ſettimo termine della Progreſsione, in cui il primo è il 2, e l'eſponente 3, riſulterà queſto termine dalla multiplicazione del $2. \times 3^6$, e perchè la ſeſta potenza del 3. è 729. multiplicato per eſſa il 2. riſulterà 1458. e queſto ſarà il termine richieſto nel ſettimo luogo della data Progreſſione, come dalla ſeguente ſerie appariſce 2. 6. 18. 54. 162. 486. 1458.

VII. Quando poi la ſerie non foſſe data nella Progreſſione aſcendente, come nella ſeconda proprietà ſi è ſuppoſto, ma nella deſcendente, qual ſarebbe queſta ſerie 16. 8. 4. 2. &c. per avere il di lei eſponente ſi dividerebbe il ſecondo termine per il primo, e ci laſcierebbe la frazione $\frac{1}{2}$, di cui preſe le potenze, a tenore della regola data, con queſto mezzo verremo a conoſcere tutti i conſeguenti termini della Progreſſione, ovvero ognuno di quelli, che ci foſſe dimandato, ſcrivendo dunque così $16. = \frac{1}{2} \times 16.$ ſi trova l'8, che è il ſecondo termine, e ſcrivendo $16. = \frac{1}{4} \times 16.$ ſi trova il 4, che è il terzo termine, come finalmente ſcrivendoſi $16. = \frac{1}{8} \times 16.$ riſulta il 2, che è il quarto termine della Progreſſione data, e ſe foſſe dato il 1458, perchè ſi trovaſſe nella Progreſſione deſcendente il quinto termine coll'eſponente $\frac{1}{3}$, queſto ſi troverebbe ſe inalzato il 3. alla quarta potenza $\frac{1}{81}$ ſi ſcriveſſe $1458. = \frac{1}{81} \times 1458. = 18$, mentre il 18. eſattamente ſi trova nel quinto luogo della ſuppoſta Progreſſionne deſcendente, di cui il primo termine è il 1458. coll'eſponente della ragione $\frac{1}{3}$, cioè in una ſerie di ragioni, che hanno da eſſere ſubmultiplici triple. Con queſte notizie dati i termini eſtremi di qualſiſia Progreſsione, o aſcendente, o deſcendente coll' eſponente delle ragioni, che ſi hanno da mantenere fra i loro termini, rieſce facile il ritrovare quanti medj proporzionali poſſono aver luogo fra eſsi, ſenza anche aver biſogno di camminare con ordine

in

in questa ricerca. Per esempio io voglio sapere qual sia il quarto termine proporzionale fra il 2, ed il 1458. che sono i termini estremi dati, e che mantenga la ragione stabilita di submoltiplice tripla paragonato al quinto, che lo deve seguire. Si prenderà la terza potenza dell' esponente 3, cioè il 27, e si scriverà $2 \times 27 = 54$, ed il 54. sarà il quarto numero proporzionale ritrovato nella Progresione ascendente, ovvero si scriverà $\frac{1}{27} \times 1458. = 54$, se si vorrà trovare nella Progresione descendente. Si può altresì con queste notizie trovare un termine proporzionale, secondo la data ragione, che si allontani dal primo, quanto si vuole, cioè che abbia il decimo il ventesimo, il centesimo posto, che ancora in infinito si discosti dal primo, e quando questo si sarà trovato nella Progressione ascendente sarà oo, e nella descendente sarà —oo, come altrove si avvertì parlando della espressione di una potenza, o ingrandita, o diminuita fino all' infinito.

VIII. La terza proprietà, che ora abbiamo a dimostrare si manifesta evidentemente nella sola combinazione de' termini della data serie 2. 4. 8. 16. 32. &c. vedendosi in fatti, che il 4.— 2. sta al 2, come il 32.— 2. sta al 30, cioè che il secondo termine, meno il primo, sta al primo, come l'ultimo, meno il primo, sta alla somma di tutti quelli, che lo precedono, che è lo stesso, che dire, paragonati i predetti termini fra loro, si vede chiaramente, che formano due ragioni di ugualità. La dimostrazione è la seguente. I termini, che si sono notati nella data serie possono considerarsi, come distribuiti in tante ragioni, nelle quali i conseguenti delle prime servono di antecedenti alle seconde. Fatta questa considerazione, rilevasi prima di ogni altra cosa quella conseguenza, che si ha nella nona Combinazione, posta nel I. Capitolo di questo Trattato, qual dice, che in una serie di ragioni tutte simili, la somma di tutti gli antecedenti sta alla somma di tutti li conseguenti, come il primo antecedente sta al primo conseguente, onde nel nostro caso formate colla data serie queste ragioni 2. 4. 8. 16. si verifica, che la ragione del 2. al 4, è la stessa, che la ragione del 2. † 4. † 8. † 16. al 4. † 8. † 16 † 32, dunque seguitando il discorso colle conseguenze inferite dalle citate Combinazioni, starà pure, *invertendo* i termini delle ragioni, il 4. al 2, come il 4. † 8. † 16. † 32.

sta

ſta al 2. † 4. † 8. † 16, che è quello, che ſi voleva provare. Si verifica la ſteſſa coſa, ſe la Progreſsione data è deſcendente, come ſarebbe 32. 16. 8. 4. 2, perchè, o ſi arroveſcia, e queſta Progreſsione torna la ſteſſa, che la prima, o pure il ſecondo termine 16, e l' ultimo 2. ſi levano dal primo 32, e ſi dice, come prima, che il 32 — 16. ſta al 16. come il 32. — 2. ſta ad un altro il quale ſarà il 30, che è il prodotto della ſomma di tutti i termini della Progreſsione data, eſcluſone il primo. Non ſolo quanto quì abbiamo dimoſtrato conviene a quei termini, che ſi ſono preſi nella data Progreſsione, ma altresì ciò ſi verifica, ſe ſi prenda qualunque altro termine fuori del primo, e del ſecondo, per eſempio ſe ſi prenda il terzo, ed il quarto, o il quinto, e il ſeſto, e ſi facciano i paragoni nella predetta maniera, perchè ſempre ſi riſcontrerà, che il ſecondo de i preſi termini, meno il primo, è al primo come l' ultimo, meno il primo de' preſi termini, è alla ſomma di tutti quelli, che lo precedono; e così in fatti ſi vede in queſta ſerie 2. 4. 8 16. 32. 64. 128, che ſe ſi prendano il 16, ed il 32. ſi verifica queſta poſizione, che il 32. — 16. ſta al 16, come il 128. — 16. ſta al 112, che è la coſa appunto, che ſi diceva nella terza proprietà ſtabilita per queſta progreſſione. Si avverte, che ſe la ragione, che ſi fiſſa fra i termini della progreſſione non è la dupla, ma la tripla, la quadrupla, la quintupla, &c. in queſti caſi l' ultimo termine, meno il primo, non è più uguale alla ſomma de i precedenti, ma o è duplo, o è triplo, o quadruplo, ed univerſalmente queſto termine ultimo diminuito del primo, agli altri, che lo precedono avrà ſempre quella ragione, che ſi trova immediatamente ſopra la proporzione, che ſi mantiene fra i termini della Progreſſione. Il diſcorſo precedente conferma quello, che ora ſi dice, e l' eſempio aggiunto lo dimoſtra ad evidenza. Ecco la Progreſſione 2. 6. 18. 54. 162. da queſta naſcono quattro ragioni tutte ſubmultiplici triple 2. 6. 18. 54., dunque raccogliendo, il 2. ſtarà al 6., come il 2 † 6 † 18 † 54 ſta al 6 † 18 † 54 † 162 e roveſciando le ragioni il 6. ſtarà al 2. come il 6 † 81 † 54 † 162. ſta al 2 † 6 † 18 † 54, e dividendo i termini, il 6 — 2 ſtarà al 2, come il 6 † 18 † 54 † 162 — 2 — 6 — 18 — 54 ſta al 2 † 6 † 18 † 54, cioè ſtarà il 6 — 2 = 4 al 2, come il 240 — 80 = 160 all' 80, che è la ragione dupla giuſtamente fiſſa-

fiffata. Si oſſerverebbe negli altri caſi, ciò che per eſſi ſi è ſtabilito, ſe collo ſteſſo diſcorſo, con cui ſi è provato il primo, ſi voleſſe ora far vedere vero ciaſcuno de i rimanenti, che per non allungarci tralaſciamo di dimoſtrarlo, abbaſtanza aſsicurati, che la ragione, la quale in eſsi riſulterebbe, ſarebbe realmente tripla, quadrupla, ovvero quella, che ſi trova immediatamente ſopra la proporzione, che ſi mantiene fra i termini della Progreſsione.

IX. La quarta proprietà già notata per la Progreſsione Geometrica determina, che il primo ſuo termine ſta al ſecondo, come la ſomma di tutti, eccettuato l' ultimo ſta alla ſomma di tutti, eccettuato il primo. E non ſi può in fatti dubitare, che non ſia così; perchè, ſe i termini della Progreſsione ſono i precedenti 2. 6. 18. 54. 162., e ſe le ragioni ſimili, che ci laſciano ſono $\frac{2.}{6.}\ \frac{6.}{18.}\ \frac{18.}{54.}\ \frac{54.}{162.}$ ſtarà il primo antecedente al primo conſeguente, come il ſecondo antecedente al ſecondo conſeguente, e permutando, ſaranno gli antecedenti fra loro, come ſtanno fra loro i conſeguenti, e componendo i due antecedenti inſieme ſtaranno al ſecondo, come i due conſeguenti preſi inſieme ſtanno al ſecondo, ma il ſecondo antecedente ſta al terzo, come il ſecondo conſeguente ſta al terzo, dunque per ugualità ordinata, i primi due antecedenti preſi inſieme ſtaranno al terzo, come i due conſeguenti preſi inſieme ſtanno al terzo, e di nuovo componendo i due antecedenti col terzo ſtaranno al terzo, come i due conſeguenti col terzo ſtanno al terzo, ma il terzo antecedente ſta al quarto, come il terzo conſeguente ſta al quarto; dunque per ugualità ordinata i primi tre antecedenti preſi inſieme ſtaranno al quarto, come i primi tre conſeguenti preſi inſieme ſtanno al quarto, e di nuovo componendo, tutti i quattro antecedenti ſtaranno al quarto, come tutti quattro i conſeguenti ſtanno al quarto, e permutando tutti i quattro antecedenti ſtaranno a tutti quattro li conſeguenti, come il quarto antecedente ſta al quarto conſeguente, cioè in Ipoteſi, come il primo antecedente al primo conſeguente, ma li quattro antecedenti non comprendono l'ultimo termine della Progreſsione data, e li quattro conſeguenti non comprendono il primo, dunque nella Progreſsione Geometrica il primo

ter-

termine della ragione sta al secondo, come la somma di tutti, eccettuato l'ultimo, sta alla somma di tutti, eccettuato il primo, che è quello, che per la quarta proprietà della Progressione si voleva provare.

X. La prova dell'ultima proprietà stabilita, che determina, come la somma di una Progressione infinita può essere uguale ad una finita quantità, non trova la minima difficoltà nel concetto di chi si sia, perchè essendo vero, che dato un numero, per esempio il 2. si può dividere per mezzo, e che successivamente sino all'infinito tutte queste nuove metà si possono nuovamente dimezzare, ne segue, che raccogliendo tutte queste metà in una sola somma, non dovrà nascere, se non se un risultato, che sia uguale alla prima data quantità, che si cominciò a dividere, per questa ragione, che, ogni parte insieme è uguale al suo tutto, ma la prima data quantità è un termine finito, cioè è il 2., dunque la somma di una Progressione infinita realmente è uguale ad un numero finito, e non potrà mai produrre un termine, che superi il dato di una qualsisia anche infinitamente piccola particella, come si doveva dimostrare. Ma già de i valori di queste serie infinite si è parlato nell'Aritmetica degl'Infiniti, spiegata nel Capitolo IV. della II. parte del precedente Trattato.

XI. Quello, che ora si pone in vista, comprende alcune proprietà più universali, che compariscono nella Progressione Geometrica delle linee, perchè molto contribuisce la loro cognizione a ritrovare le Aje delle Parabole, e delle Elissi, ed alle misure de' Corpi Solidi. Due considerazioni sopra di esse prendiamo a fare, mentre prima vogliamo esaminare le serie delle linee paragonate scambievolmente, poi in secondo luogo vogliamo riflettere alle Progressioni di esse nelle loro parti, considerandole soltanto come finite, che questo ci serve per riquadrare le superficie Elittiche, Paraboliche, ed altre simili.

Nel paragone, che si può fare delle serie delle Linee proporzionali

1. Scuopriamo primieramente, che se sono date due serie di Linee, le quali arrivino ad avere un comune termine, e che continuino anche dopo di essere giunte a questo termine, ad avere altre nuove grandezze, queste grandezze aggiunte

te alla prima serie, staranno a quelle, che si sono aggiunte alle seconde loro corrispondenti, come stanno fra loro le corrispondenti grandezze, che si trovano prima del termine comune.

Si prendano dunque nella prima serie [a] le due grandezze *B F*, che hanno in mezzo il termine comune *C*, e nello stesso modo si prendano le corrispondenti *E H* della serie seconda, per essere le tre grandezze prese nell'una, e nell'altra serie, continuamente proporzionali, il quadrato di *C* sarà uguale a i rettangoli di *B* in *F*, e di *E* in *H*, dunque questi due rettangoli saranno uguali, e però le grandezze, dalle quali risultano saranno reciprocamente proporzionali, cioè *B* sarà ad *E*, come *H* ad *F*. In oltre, perchè tutte le cinque grandezze della prima serie sono continuamente proporzionali, e mantengono la stessa proporzione, ancora la manterranno le altre 5, della seconda, però levati dalla prima serie i termini *B*, *F*, e dalla seconda le rette *E*, *H*, resteranno *A C G* = *D C I* continuamente proporzionali, dunque il rettangolo di *A* in *G* sarà uguale al rettangolo di *D* in *I*, ed ora pure *A* starà a *D* reciprocamente come *I* a *G*, e così sarà dimostrato quello, che si voleva provare. (a) Fig. 90.

2. Se dalla stessa grandezza si continueranno due serie di ragioni simili, si potrà dimostrare, che la ragione della terza grandezza della prima serie alla terza della seconda sarà duplicata, la ragione della quarta alla quarta sarà triplicata, e che tutte le altre, che nelle due serie succederanno collo stesso ordine, manterranno fra loro una ragione sempre composta di tutte le precedenti.

La prova di questa seconda proprietà si deduce dalla similitudine delle ragioni, colle quali si argumenta.. Per esse re le tre linee rette [b] *A*. *B*, *C*, *A*, *E*, *F* continuamente proporzionali, i rettangoli *A C*, *A F* saranno uguali alli quadrati di *B*, *E*, che sono le grandezze medie proporzionali, dunque staranno fra loro come i quadrati, ma la ragione de i quadrati è duplicata, dunque i rettangoli staranno fra loro in ragione duplicata, ma uno de i lati in tutti due i rettangoli è uguale, cioè il lato *A*, dunque i rettangoli staranno fra loro nella ragione duplicata de i rimanenti lati *C*, *F*, dunque la ragione di *C* ad *F* sarà duplicata. In oltre, perchè *C*, ed *F* so- (b) Fig. 91.

no grandezze medie proporzionali fra *B, D*, ed *E, G*, presi i loro quadrati, la ragione di essi sarà composta della duplicata degli stessi lati *C, F*, e della duplicata de i lati de i parallelogrammi, a' quali sono uguali, cioè sarà la ragione de i quadrati quadruplicata della ragione di *B*, ed *E*, dunque ancora i rettangoli *BD, EG*, uguali ad essi quadrati, staranno fra loro in ragione quadruplicata della grandezza *B* ad *E*; ma la ragione de' rettangoli risulta dalla ragione di *B* ad *E*, e di *D* a *G*, dunque tolta la prima ragione di *B* ad *E*, la ragione, che resta di *D* a *G* sarà triplicata della ragione, che si trova fra *B* ad *E*, cioè la ragione di *D* a *G* sarà triplicata, che è quello, che si voleva conchiudere.

3. In terzo luogo, se si propongono due serie di grandezze talmente disposte, che per ragione d'esempio le cinque grandezze della prima serie sieno cinque termini continuamente proporzionali, e similmente sieno continuamente proporzionali le cinque grandezze della seconda, con questo, che l'ultima grandezza della prima serie stia alla prima grandezza della seconda, come la prima grandezza della prima serie sta alla seconda della medesima serie, dico che la somma di tutti i termini della prima serie starà alla somma di tutti i termini della seconda in ragione quintuplicata [a].

(a) Fig. 92. In Ipotesi il primo termine *A* sta al primo termine *F* in ragione quintuplicata, perchè fra *A*, ed *F* si trovano i termini *B, C, D, E*, che sono continuamente proporzionali, per lo stesso riguardo le ragioni di *B* a *G*, di *C* ad *H*, &c. sono quintuplicate, dunque raccogliendo, la somma di tutti i termini della prima serie alla somma di tutti i termini della seconda starà in ragione quintuplicata, come si voleva dimostrare.

4. Il quarto dato, che si stabilisce per la Progressione Geometrica, prende a mostrare, come si possano ordinare due serie di termini simili proporzionali, dopo fatta la scelta di tre grandezze, che sono fra loro continuamente proporzionali.

(b) Fig. 93. Sieno le tre grandezze proporzionali *AB, AC, AD* [b], si trovi colle vere regole la media proporzionale fra *AB, AC*, cioè *AE*, e fra *AE, AC* si trovi un altra media proporzionale *AF*, sarà trovata la prima serie *AB, AE, AF, AC*, di

di nuovo fra *A C*, ed *A D I*, si ponga media proporzionale *A G*, e fra *A G*, ed *A D* si ponga *A H*, questa sarà la seconda serie *A C*, *A G*, *A H*, e queste due serie saranno simili. Per essere IV. e XVI. medie proporzionali fra *A B*, *A C*, *A D* tutte le grandezze di questa serie saranno continuamente proporzionali, dunque ancora le loro differenze *B E*, *C E*, *C G*, *G D*, saranno una serie di grandezze continuamente proporzionali: nella stessa maniera, perchè *z*, e *y* si pongono medie proporzionali fra IV. 8. XVI. 32. ancora in questa serie tutte le grandezze, e le loro differenze *E F*, *F C*, *G H*, *H D* manterranno la stessa proporzione, dunque nella serie delle prime differenze unendo le prime due, ed unendo le ultime due, starà *B E* † *C E* a *C E*, come *C G* † *G D* sta a *G D*, e parimente nella seconda serie delle differenze starà *E F* † *F C* ad *F C*, come *G H* † *H D* sta ad *H D*, dunque nella grandezza *A D* starà *B C* a *C E*, come *C D* a *D G*, e starà *C E* a *C F*, come *G D* a *D H*, e così, se più altri termini ci fossero, si mostrerebbero sempre nuove serie di simili ragioni.

5. Se sia data una serie di più termini continuamente proporzionali, per esempio di VI. e si levino da essa il II. il IV. e il VI. e con essi si faccia una nuova serie; si dimostra, che tutti i termini della seconda serie staranno al loro primo, come tutti i termini della prima parimente stanno al loro primo.

La prova di questa nuova proprietà della Progressione Geometrica si deduce con facilità dalle precedenti dimostrazioni. Sia data per questo effetto la serie *A B*, *B C*, *C D*, *D E*[a], &c. e tutti i di lei termini si osservino nella sola retta *A G*. (a) Fig. 94.
I termini *A B*, *C D*, *E F* formino la seconda serie nella linea retta *A H*. Per essere continuamente proporzionali i tre termini *A B*, *B C*, *C D*, la ragione di *A B* a *C D* sarà duplicata di *A B* a *B C*, ma la ragione di *A H* a *C H* è la medesima ragione di *A B* a *C D*, perchè dovendosi duplicare la stessa ragione nelle due serie *A H*, *C H*, queste vengono ad essere continuamente proporzionali, dunque come *A B* a *B C* così starà *A H* a *C H*, ma ancora come *A B* a *B C*, così sta la serie *A G* a *B G*[b], dunque *A H* dee stare a *C H* in ragione duplicata della serie *A G* a *G B*, dunque per conversione di ragione starà ancora *A H* ad *A B*, come *A G* ad *A B*, (b) (a) n. 3.

 cioè

cioè tutti i termini della seconda serie staranno al loro primo, come tutti i termini della prima parimente stanno al loro primo. Ed eccoci al termine delle considerazioni di quelle proprietà, che volevamo fare sopra la serie delle linee paragonate scambievolmente, e principalmente di quelle, che nascono dallo stesso principio.

XII. Nell'atto d'intraprendere le seconde riflessioni, che si possono fare sopra le Progressioni nelle parti delle medesime linee, considerate come finite [a], cominciamo dal dimostrare, che se da una data grandezza *A B* si cavi la parte *B C*, la quale stia alla rimanente parte *C A*, come una parte di questo avanzo *C D* sta al suo resto *D A*, si potranno in infinito multiplicare queste parti nella grandezza *A B*.

Dopo le due parti prese *B C*, *C D* si ponga la terza proporzionale *E* già in Ipotesi *B C* sta a *C A* come *C D* a *D A*, dunque permutando i termini, starà *B C* a *C D*, ovvero *C D* ad *E*, come *C A* a *D A*, e di nuovo permutando starà *C D* a *C A*, come *E* a *D A*, ma *C D* è minore di *C A*, dunque ancora *E* sarà minore di *D A*, che però dalla grandezza *D A* si potrà prenderne una porzione uguale ad *E*, cioè *D F*, e saranno le tre rette *B C*, *C D*, *D F* continuamente proporzionali, e la ragione di *C D* a *C A* sarà la medesima, che la ragione di *D F* a *D A*.

Per essere dunque *C D* a *C A*, come *D F* a *D A*, sarà dividendo *C D* a *D A*, come *D F* ad *F A*, e permutando sarà *C D* a *D F*, ovvero presa la retta *G* terza proporzionale dopo *C D*, *D F*, sarà *D F* a *G* come *D A* ad *F A*, e permutando di nuovo sarà *D F* a *D A*, come *G* ad *F A*, ma *D F* è minore di *D A*, dunque anche *G* sarà minore di *F A*, e però sopra *F A* si potrà prendere una parte uguale a *G*, che sia *F H*, perchè si dica, che *D F* sta a *D A*, come *F H* sta ad *F A*.

Si potrebbe ora ripetere la stessa dimostrazione sopra la rimanente parte della linea, e così sempre in infinito: laonde vien provata la prima verità, che ci eravamo prefissi di dimostrare, e di più rilevasi, che continuando in questa data Progressione la similitudine delle ragioni nelle parti fra loro, e ne' residui fra loro, si cambieranno pure li stessi termini scambievolmente, e non si muterà mai la condizione delle ragioni precedenti, e sempre starà la prima parte al primo avan-

(a) Fig. 95.

avanzo, come la parte seconda sta al secondo avanzo, come la terza al terzo, e così sempre in infinito.

2. Se sia data la ragione di *AB* ad *AC*,[a] la quale si continui quanto si vuole, si fa vedere, che la grandezza *AC* diventerà maggiore di *Z*, sia questa grande quanto esser si voglia. [a] Fig. 95.

La grandezza *AB* è minore di *AC* della retta *BC*, ma la retta *BC* si può prendere tante volte quanto è necessario, perchè superi la grandezza data *Z*, dunque *AB* † *BC*, preso questo numero di volte sarà fatta maggiore di *Z*, dunque molto maggiore sarà *AC* † *BC*, aggiunto lo stesso numero di volte con quell' accrescimento, che in tanto numero di volte se gli deve, perchè con i termini antecedenti mantenga sempre la stessa ragione.

3. Si potrà ritrovare in una data linea una parte, la quale sia minore di qualsivoglia data grandezza, se dopo tagliata dalla grandezza *AB* la parte *AC*, e dall' avanzo *CB* la parte *CD*,[b] e fattosi, che come sta *AC* ad *AB* così stia *CD* a *DB*, si continuino a levare nuove parti della linea *AB*, le quali con i loro avanzi mantengano costantemente la stessa ragione, mentre finalmente si vedrà restare una parte sì piccola, che sarà inferiore ad *FG*, che è la data grandezza. [b] Fig. 97.

Si prenda dalla grandezza *FL* la parte *HG*, e si faccia, che *FG* stia a *GH* come *CB* sta ad *AB*, dipoi si taglino da *FL* altre parti *HI*. *IK* con tal proporzione, che *FG*, *FK*, *FI*. *FK* siano continuamente proporzionali, e *FK* resti maggiore di *AB*, divisa già colla stessa proporzione delle parti di *FL* ne i punti *C*. *D*. *E*. Per natura della progressione *FG* sta ad *FH* come *FI* ad *FK*, ma per construzione *FG* sta ad *FH* come *CB* sta ad *AB*, dunque ancora *FI* starà ad *FK* come *CB* sta ad *AB*, e invertendo *FK* starà ad *FI*, come *AB* sta a *CB*, e permutando *FK* starà ad *AB*, come *FI* sta a *CB*, e perchè *FK* in supposizione è maggiore di *AB*, dunque ancora *FI* deve essere maggiore di *CB*. Oltre a ciò, perchè *AC* è a *CB* come *CD* a *DB*, sarà ancora componendo *AC* † *CB* a *CB*, come *CD* † *DB* a *DB*, dunque *AB* starà a *CB* come *CB* a *DB*, ovvero come *FK* a *KI*, ovvero come *KI* a *KH*, dunque essendo *CB* a *DB* come *FI* ad *FH*, sarà ancora permutando *CB* ad *FI* come *DB* ad *FH*, ma *FI* è maggiore di *CB*, dunque ancora *FH*

sarà

farà maggiore di DB, e perchè la stessa cosa si fa vedere di FG relativamente ad EB, perciò FG che è la quantità data sarà maggiore di EB come si voleva provare.

(a) Fig. 98. 4. Se da una grandezza AB (a) si levi una serie infinita di parti, ciascuna delle quali mantenga la medesima proporzione al suo avanzo, si vuol provare, che la data grandezza AB è uguale a tutta la serie.

Sieno le parti levate AC, CD, DE &c. gli avanzi sieno CB, CD, CE &c. dico, che raccogliendo tutte queste parti la loro somma ha da essere uguale alla intera grandezza AB. Perchè se la grandezza AB non è uguale, o è minore, o è maggiore, non è nè maggiore, nè minore, dunque è uguale; che non sia minore è manifesto, essendo che tutta la serie, come si suppone si continuerà in infinito dentro di essa, senza che mai si arrivi al suo termine B; che poi nè meno abbia da essere maggiore si prova così: se fosse maggiore, potrebbe assegnarsi un qualche eccesso per esempio ZB: assegnato dunque un tale eccesso, si prendano le parti proporzionali AB, CD, DE &c. fintanto che per la precedente dimostrazione sia trovata una parte minore di ZB: dunque in supposizione tutta la serie di questi termini detratti non è superata dalla grandezza AB di una quantità maggiore, ma di una quantità minore di ZB, dunque non sarà vero, che ZB sia l'eccesso, che si abbia da assegnare, e perchè questo sempre si verifica seguitandosi a detrarre altre parti proporzionali, per tanto resta provato, che non solo la data grandezza non è minore, ma che nè meno è maggiore della somma di tutte le precedenti parti, ciò che era da dimostrarsi.

XIII. Sul fondamento di questa dimostrazione s' insegna il modo di trovare una grandezza, che sia uguale alla somma di tutti i termini, che compongono una serie infinita di grandezze proporzionali, purchè sia data la prima loro differenza; laonde non ci partiamo dalla stessa figura, che nelle rette AC, CD, DE &c. ci fa vedere questa serie, e nella particella Ax ci mostra la differenza, che passa fra il termine maggiore AC dal termine CD, e in tutta la retta AB propone quella grandezza, che è uguale a tutta la quantità infinita de i termini, perchè si fa, che Ax stia ad AC come AC sta ad AB.

Egli

Egli è dunque certo, che la differenza presa Ax sta ad AC, come AC ad AB, dunque dividendo Ax starà ad xC, come AC a CB, e componendo AC starà ad xC, ovvero CD come AB a CB, e permutando AC starà ad AB come xC, ovvero CD a xB, e di nuovo dividendo starà AC a CB come xC, ovvero CD a CB; dunque per la precedente dimostrazione la grandezza AB, sarà uguale alla serie di tutti i termini dati.

Inoltre, perchè nella stessa dimostrazione abbiamo detto, che AC sta a CB come CD a CB, perciò ogni volta, che supporremo una simil cosa, tutta la grandezza AB sarà uguale ad una serie infinita di termini, la qual cosa pure si verificherà, se si farà, che AC stia a CD, come AB a CB, o come CB a DB, perchè fatta questa supposizione ritorna permutando come prima, che AC sta ad AB come CD a CB, e dividendo AC viene a stare a CB come CD, ovvero xC a CB. Similmente ancora se AB, CB, DB sono continuamente proporzionali, si verificherà sempre, che la grandezza AB sarà uguale all'infinita serie de' termini, perchè dividendo tornerà come prima la ragione di AC a CB ad essere simile alla ragione di CD a DB.

XIV. Quando si volesse, che una grandezza restasse divisa in una data proporzione, e che la Progressione in questa serie continuata terminasse nel dato spazio, basterebbe, che tutto lo spazio dato, per esempio AB, si dividesse in tal guisa, che stesse AC a CB come y sta a z, che è la ragione data, e che poi come AB a CB così si facesse AC a CD, perchè se AB sta a CB, come AC a CD detraendo starà ancora CB a DB come AB a CB, ovvero AC a CD, dunque per l'osservazione quì sopra fatta, tutta la grandezza AB sarà uguale alla somma della serie in essa preparata.

Ma se poi fossero date più Progressioni di ragioni, e si dovesse trovare una quantità, che tutte le uguagliasse, in questo caso gioverebbe assai il preparare per ciascheduna Progressione una quantità, che fosse uguale alla somma de' suoi termini, mentre poi raccogliendo insieme queste tre quantità, nel risultato comparirebbe la grandezza dimandata, la quale se in tal modo si dovesse dividere, che avesse a servire di comun termine a due serie, basterebbe primieramente segarla in tal

tal guisa in *C*, che *AC* stesse a *CB* come *CD* sta a *DB*; e di nuovo bisognerebbe dividerle in *E* in guisa tale, che *AE* stesse ad *EB* come *EF* sta ad *FB*, perchè preparate in tal guisa le due serie per l' ultima delle precedenti dimostrazioni, delle stesse serie, dovrebbe essere *AB* il comun termine.

C A P. VII.

Della Proporzione Armonica.

I. UNA Proporzione è l' Armonica, che come altrove abbiamo osservato, partecipa della Aritmetica, e Geometrica, onde bene appresa la di loro natura, non è molto difficile il capire anche la natura di questa. Il Nome di *Armonica*, che ella ottiene, come un distintivo dalle altre mostra subito quale sia il suo oggetto, o qual fine principalmente a se stessa prescriva. Il Suono non può riuscire concorde, ed aggradevole, se non quando l' undulamento, o tremolío, che si risveglia nell' aria da un corpo capace a produrlo, mantiene le leggi dell' Armonía, quindi è, che la Musica da essa prende i suoi principj, e tutto quel vago, e dilettevole, che appaga l' udito nostro, e che giugne talvolta a ravvivarci lo spirito, che lo assapora è stabilito sull' Armonica proporzione de' numeri, la di cui mancanza produce un effetto totalmente contrario, cioè un Suono affatto aspro, ed ingrato. Non è nostro pensiero distendere ora in questo luogo un trattato di Musica, ma unicamente vogliamo proporre le proprietà, che sono giudicate le più singolari, anche in questa terza specie di proporzione, le quali poi, chi vorrà, potrà riscontrarle per conoscere fino a qual segno esse possono valutarsi, o stimarsi necessario, l' averle in pronto per inoltrarsi con fondamento nello studio di quella nobilissima scienza, che ha contribuito moltissimo alla beata, e tranquilla vita di ogni condizione di persona.

II. Quello dunque, che primieramente merita considerazione, risguarda la natura di quei numeri fra i quali si trova la proporzionalità Armonica, che non sono più di tre, in tal guisa preparati, che gli estremi stieno fra loro, come stanno fra loro le differenze intermedie. In questi numeri 15. 12. 10. ov-

ovvero in questi altri *6. 3. 2.* si vede osservata esattamente la prescritta regola, e perciò possiamo proporli, come un esempio nella proporzione Armonica, che maravigliosamente si accomoda a mostrare le tre principali consonanze della Musica, quali sono l' *Ottava*, la *Quarta*, e la *Quinta*, come più abbasso ragioneremo. Volendosi preparare questi tre termini in congiuntura, che qualcuno di loro mancasse, è cosa facile il farlo, purchè si osservino le Regole, che seguono quì appresso.

Regola I. per trovare il maggior termine.

III. A tre Regole si riducono le Operazioni, che si possono fare per trovare ognuno di questi tre termini.

Ecco dunque quello, che si deve operare, acciocchè risulti il maggiore di essi. Il terzo termine dato si deve levare dal secondo, e questo multiplicato per l' avanzo darà un risultato, che lo partirà la differenza, che si trova fra il detto avanzo, ed il terzo termine, ed aggiunto al quoziente il secondo termine, in questa somma si avrà il primo cercato, che sarà il maggiore nella Proporzione Armonica. Se sono i due termini dati 12. e 10, levato il 10. dal 12. resta 2. per cui multiplicato il 12. risulta il 24. e questo partito per 8. da per quoziente il 3. che unito al 12. fa 15, cioè produce il primo maggior termine cercato, e però 15. 12. 10. saranno i tre termini precedentemente notati nell' esempio della proporzione Armonica, a' quali se ne potranno far precedere quanti se ne vorranno, per esempio due altri, se i due maggiori 12. e 15. si multiplicheranno per l' esponente della ragione sesquialtera $\frac{3}{2}$, che è quella ragione, che si trova fra il 15. primo termine, e il 10, che è il terzo, come in fatti si vede, che il 18, ed il $22\frac{1}{2}$, che sono i risultati dalla multiplicazione, sono quei termini, che uniti agli altri in questa guisa $22\frac{1}{2}$ 18. 15. 12. 10. fanno una serie di cinque termini nella proporzione sesquialtera Armonica. Vi è altresì maniera di preparare col mezzo di una serie di numeri aritmeticamente proporzionali un' altra, che sia continuamente Armonica, e ciò si fa, se si trova un numero, che si divide per tutti i termini posti nella serie aritmetica, cosa, che riesce facilmente, multiplicando li stessi termini uno per l' altro. Sia per tanto

 la

la serie aritmetica 1. 4. 7. 10. 13. 16. il numero, che risulta dalla multiplicazione di tutti questi termini uno per l'altro, si trova 58240. il quale partito per li stessi termini, produce la seguente serie 58240. 14560. 8320. 5824. 4480. 3640. nella quale tutti i termini mantengono la proporzione Armonica, e però 58240. 8320. :: 58240 — 14560. 14560 — 8320. e 14560. 5824 :: 14560. — 8320. 8320 — 5824, e 8320. 4480. :: 8320. — 5824. 5824 — 4480, e 5824. 3640. :: 5824. — 4480. 4480. — 3640.

Regola II. per trovare il termine di mezzo.

IV. Per trovare il termine medio proporzionale nella proporzione Armonica dati due estremi come 12. 4. si ha da sottrarre il minor termine dal maggiore, e l'avanzo si ha da partire per il denominatore della proporzione accresciuto di una unità, poi preso il quoziente, si unirà al partitore, ed in questa unione si vedrà il termine medio proporzionale Armonicamente. Sottraendosi dunque il 4. dal 12. resterà 8. La ragione del 12. al 4. per essere tripla, ha per suo denominatore il 3, che accresciuto di una unità diventa 4, diviso l'avanzo 8. per 4. lascia per quoziente il 2, che unito al 4. divisore produce il 6, il quale è medio proporzionale Armonico fra il 12. e 4. Portando il caso, che il denominatore della proporzione dovesse essere un numero pari, sicchè coll' unità aggiunta riuscisse dispari, per trovare in questo caso il medio proporzionale, prima di ogni altra cosa si dovrebbe multiplicare il denominatore accresciuto per il solo denominatore, e col prodotto si farebbe il maggior termine della proporzione, poi preso il suo minor termine, ad esso si unirebbe il denominatore della proporzione, ed in questo nuovo numero si averebbe il medio proporzionale cercato. L'esempio sia nella ragione sestupla, in cui il denominatore è il 6, a cui aggiunta l'unità fa 7, questo 7. multiplicato per 6. produce 42., ecco che il 42. è il maggior numero di quella proporzione, di cui si cerca il medio termine, il minore poi è il 6. che risulta dal partire il 42. per 7, e questo 7. è il terzo termine nella stessa proporzione. Si aggiunga ora al 6. il denominatore della proporzione, che già l'abbiam detto il 6, ed il 12, che risulta, serve per medio proporzionale nella proporzione Armonica, a tenore del caso proposto. Nelle altre proporzioni triple, quin-

quintuple, settuple, nonuple &c. si trova il medio proporzionale con aggiugnere al denominatore 3. 5. 7. 9, l' unità, e de' prodotti 4. 6. 8. 10, si prendono i loro mezzi, e si multiplicano per il denominatore di quella proporzione, che è data, e col prodotto della multiplicazione restano trovati tutti i tre termini della proporzione Armonica, così se si vogliano questi termini nella proporzione nonupla, si piglia il dieci, e della sua metà ne facciamo l'ultimo termine della proporzione, per il quale multiplicato il 9. ciò che risulta, che è il 45. lo ponghiamo nel luogo del primo proporzionale, e lasciamo il 9. nel posto del medio, e così resta preparato il medio termine proporzionale Armonico nella proporzione nonupla, come ognuno vede, riscontrando la ragione delle differenze de i tre termini $45.^{36}$ $9.^{4}$ 5.

Regola III. per trovare il terzo proporzionale.

V. Per trovare il terzo proporzionale Armonico, quando è il minore degli altri due, si ricorre a questa regola. Trovata la differenza del primo termine dato dal medio, per questo medio si multiplica la stessa differenza, ed il risultato si parte per la somma del maggior termine colla sua differenza, di poi fatta la sottrazione del quoziente del medio termine, quello che resta è il minor termine ricercato nella proporzione Armonica. Così se il 15. ed il 12. sono due termini dati, perchè dopo di essi si trovi il terzo, si vede, che la loro differenza è il 3. la quale multiplicando il 12. fa 36. La differenza unita al 15. fa 18. e per esso diviso il 36. si ha per quoziente 2, che levato dal 12. lascia 10, e questo è il minor termine ricercato, perchè vediamo, che realmente li tre termini 15. 12. 10. mantengono la proporzione Armonica. Similmente se sieno dati questi due termini 18. 10. colla stessa operazione troviamo, che 18.— 10.= 8.×10.= 80 : 26. da per quoziente $3\frac{1}{13}$, il quale levato dal 10. lascia $6.\frac{12}{13}$, cioè il terzo numero proporzionale nel dato esempio; dunque in questi tre numeri 18. 10. $6.\frac{12}{13}$, si vedrà un altro esempio della proporzione Armonica.

Questo terzo termine proporzionale si può trovare ancora in un altra maniera, ed è tale, si somma col maggior numero la sua differenza dal medio, e se ne fa un partitore, si

multiplicano poi fra di loro i due termini dati, e così si prepara il numero da partirsi; e nel quoziente della operazione comparisce il terzo termine proporzionale. La bontà di questa regola si dimostra sul precedente esempio, 8, che è differenza del primo numero dal medio † 18 = 26, ecco il partitore. $10. \times 18 = 180$, ecco il numero da partirsi, $6\frac{12}{13}$, ecco il quoziente, che esattamente ritorna nel luogo del terzo proporzionale Armonico, come già si vedeva nella passata operazione.

VI. Si avverte su questa regola, che non si pensi di trovare con essa il terzo termine proporzionale, quando ha da essere maggiore de' precedenti, ma per trovarlo si ha da ricorrere agli insegnamenti dati nella prima regola; in proposito della quale si nota, che non si potrebbe mai trovare il maggior termine dimandato, quando la differenza de' due, che fossero dati, superasse il minor termine, come lo supererebbe se fossero dati questi due numeri 5. 12. ne i quali la differenza 7. è maggiore del 5. La ragione di questa osservazione è, che se fossero questi tre termini 5. 12. y. Armonicamente proporzionali starebbe $5.\ y. :: 12. - 5. = 7.\ y. - 12.$ dunque bisognerebbe, che $y - 12.$ fosse più grande di y. di altrettanto, che il 7. è maggiore di 5. che è impossibile, perchè la parte non è maggiore del tutto, e ciò sia detto per quello, che appartiene alle regole di trovare i tre termini Armonicamente proporzionali.

VII. Per isfuggire una difficoltà, che potrebbe farla nascere l'insegnamento degli Antichi, i quali dissero, che l'Armonía si conserva in questi numeri 12. 9. 8. 6, si nota, che così essi parlarono per significarci quello, che fino sul principio si osservò, cioè che la proporzione Armonica è un misto delle due proporzioni Aritmetica, e Geometrica, le quali ne i stabiliti numeri si trovano. Se si paragonano fra loro li primi due numeri, e li due ultimi, si vede in essi la Geometrica proporzione. Ne i primi tre comparisce l'Aritmetica, in questi altri 12. 8. 6. si manifesta l'Armonica, dunque in questi quattro numeri si può stabilire, che si contenga l'Armonía, molto più perchè per essi si esprimono col maggior Tuono le tre Consonanze, che principalmente erano in uso presso gli Antichi, cioè la *Diapason*, *Diapente*, e *Diatesseron*, che sono quelle, che di sopra abbiamo chiamate l'Ottava,

la

la Quinta, e la Quarta. Mantiene la prima la proporzione dupla, quale si trova fra il 12, e il 6. La seconda mostra la proporzione sesquialtera, quale è fra il 12. e l' 8. o fra il 9, ed il 6. La terza ha la proporzione sesquiterza, e questa si trova fra il 12, ed il 9. fra l' 8, ed il 6, e finalmente il *Tono maggiore*, o come dicono *Secouda maggiore*, consiste in una proporzione sesquiottava, che si esprime per la ragione del 9. all' 8. Queste cose meglio si intendono nella figura 100. in cui le due rette *AB*, *CD* ci rappresentano due corde preparate perfettamente unisone, a questo fine di mostrare col mezzo loro le principali proporzioni delle Consonanze, delle quali ora venghiamo a parlare.

VIII. La Consonanza altro non è, che una composizione, o unione di due Suoni, uno grave, e l' altro acuto, i quali uniformemente arrivano all'orecchio, e dolcemente lo muovono. Deve dunque da ciò inferirsi, che una qualche proporzione in essi ha da osservarsi, non potendosi credere, che qualunque unione di due Suoni sia capace a produrre una Consonanza, se non per questo, perchè mantengono fra loro la proporzione. Le due predette corde non solo si preparano unisone perfettamente, ma ancora ugualmente lunghe, una di loro deve dividersi, e con questa divisione venghiamo a conoscere sì le proporzioni delle Consonanze, sì la proporzione di quelle parti, dalle quali le Consonanze risultano.

IX. Di due sorti sono le Consonanze, perchè altre si dicono *semplici*, ed altre si chiamano *composte*, le prime consistono in una proporzione, che è doppia, o in altre minori, le seconde poi nelle maggiori della doppia. Sette si numerano le semplici, e sono l' *ottava*, la *sesta maggiore*, la *sesta minore*, la *quinta*, la *quarta*, la *terza maggiore*, la *terza minore*, e ciascuna di queste Consonanze ha un numero particolare di voci, e risulta da diversi intervalli. Per nome di *intervallo* intendiamo piccole porzioni, nelle quali è divisa la corda *CD*, delle quali se ne scelgano cinque al nostro proposito, che così si chiamano *Tono maggiore*, *Tono minore*, *Semitono maggiore*, *Semitono minore*, o *Diesi maggiore*, e *Diesi minore*. Pertanto la prima Consonanza comprende otto voci, e 7. intervalli, cioè i primi tre, poi di nuovo i primi due, e finalmente il primo col terzo.

La

La seconda Consonanza, cioè la sesta maggiore comprende sei voci e 5. intervalli, cioè li tre primi, e il primo col secondo.

La terza Consonanza, che è la sesta minore, essa pure comprende 6. voci, e cinque intervalli, cioè il terzo, il primo col secondo, e il primo col terzo.

La quinta Consonanza denominata la quarta, comprende 4. voci, e tre intervalli, che sono i primi tre, ovvero il secondo col primo col terzo.

La sesta, che è detta terza maggiore comprende tre voci, e li due primi intervalli, ovvero il secondo col primo.

La settima finalmente chiamata terza minore, ancora essa comprende tre voci, e due intervalli, cioè il terzo col primo, o il primo col terzo. Venendo ora alla divisione della corda *CD* primieramente si divide nel mezzo nel punto *E*, e si dice, che se nel tempo medesimo sarà toccata la corda *AB*, e la porzione *CE*, si sentirà la prima Consonanza, in cui si vede la proporzione del 2. all'1.

Per avere la seconda Consonanza, nel tempo medesimo, in cui si tocca la corda intera *AB*, si deve toccare della corda *CD*, la porzione *CF*, e perchè questa porzione sta alla corda intera, come il 5. al 3, questa proporzione servirà di regola alla seconda Consonanza.

Per avere la terza è necessario, che della corda *CD* si tocchi la parte *CG*, ma la ragione di tutta a questa parte si fa, che sia la stessa, che la ragione dell'8. al 5, dunque la proporzione della terza Consonanza si stabilisce sulla stessa ragione.

La quarta poi si sente, quando della corda *CD* si tocca la sola parte *CH*, la quale sta a tutta, come il 2. al 3; dunque la quarta Consonanza manterrà una tale proporzione.

La quinta si sente, se della corda *CD* noi tocchiamo la parte *CI*, ma tutta sta a questa sua parte, come il 4. al 3; dunque su questa ragione si appoggierà la quinta Consonanza.

Se della corda *CD* si toccherà la parte *CK*, si risveglierà la sesta Consonanza, ma la ragione di *CD* a *CK*, corrisponde alla ragione del 5. al 4, dunque questa stessa ragione servirà di norma alla sesta Consonanza.

Si eccita finalmente la settima Consonanza, allorchè della corda *CD* si tocca la parte *CL*, che al suo tutto sta, come

il

il *6.* al *5*, dunque nella ultima delle semplici Consonanze osserveremo questa medesima proporzione.

X. Dalla proporzione delle Consonanze passando a voler conoscere la proporzione delle parti, che le compongono, o delle loro differenze, o intervalli, o gradi, come li chiamano alcuni, si osserva, che se si tocca prima l'intera corda *CD*, e poi subito la sua parte *Cz*, si sente il Tono maggiore, che ha la proporzione del 9. all'8, perchè questa ragione si trova fra tutta la corda, e la parte toccata.

Nel Tono minore la proporzione è del 10. al 9, perchè la parte *Cr*, che si ha da toccare subito dopo toccata l'intera corda *CD*, mantiene alla intera corda questa ragione medesima.

Il Semitono maggiore si regola colla proporzione del 16. al 15, mentre una tal proporzione si trova fra l'intera corda *CD* prima toccata, e la parte *Cs*, che subito dopo si tocca.

La Diesi maggiore si sente quando dopo toccata l'intera corda *CD* si tocca subito la parte *Ct*, ma tutta sta a questa parte, come il 25. al 24, dunque con questa proporzione si eccitera la Diesi maggiore.

Per ultimo si fa sentire la Diesi minore, se prima si tocca l'intera corda *CD*, e successivamente la parte *Cu*, e perchè fra l'una, e l'altra si trova la ragione del 128. al 125. per tal motivo si dice, che con questa proporzione si fa sentire la Diesi minore.

Fra il Tono maggiore, ed il minore vi è della differenza, che vien chiamata *Coma*, e perchè questa risulta, se dopo toccata l'intera Corda *CD*, subito si tocca la parte *Cx*, che sta a tutta, come l'80. all'81. per questo riguardo la proporzione, con cui essa si regola, corrisponde alla sesquiottuagesima.

Da tutte le stabilite proporzioni, rilevasi, che non solamente, secondo l'opinione degli Antichi, tutta l'Armonia si ritrova ne' numeri, che essi stabilirono, cioè 12. 9. 8. 6., ma che in oltre si possono ad essi aggiugnere tre altri numeri, cioè 10. 5. 3., e si può dire, che veramente tutta l'armonia sia contenuta in sette numeri, perchè la proporzione di tutte le sette Consonanze si trova ne' confronti, che si fanno con questi sette numeri, come quì si vede.

I. $\frac{12}{6}$ II. $\frac{5}{3}$ III. $\frac{8}{5}$ IV. $\frac{9}{6}$ V. $\frac{8}{6}$ VI. $\frac{10}{8}$ VII. $\frac{6}{5}$.

XI.

XI. Dopo la confiderazione delle femplici Confonanze, ftabilita per conofcere le loro proporzioni, fi viene a parlare delle Confonanze compofte così chiamate, perchè rifultano dall' addizione di diverfe Confonanze, che mantengono fra di loro una ragione, che è maggiore della Dupla. Dalla *ottava* fino alla *quintadecima*, e da quefta fino alla *ventefimafeconda* fi trovano le Confonanze compofte, onde per prepararle, ecco la regola, che fi tiene. Si prepara la *quintadecima*, fe la metà della corda *C D* fi divide in un altra metà nel punto *a*, cioè fe dalla intera corda *C D* fi prende la quarta parte *C a*, e fi toccano infieme le le due corde *A B*, *C a*. Si trova la *ventefimafeconda*, fe di nuovo la porzione *C a* della corda *C D* fi divide nel punto *e* per mezzo, cioè fe della corda *C D* fi prende l' ottava parte, e nel tempo fteffo fi tocca la corda *A B*, e la porzione *C e*. La *Decima minore* per ritrovarla è neceffario, che dalle 12. parti, le quali compongono la corda *C D* fe ne prendano 5. dividendofi la fteffa corda *C D* nel punto *i*, e che poi fi tocchino nel tempo fteffo le corde *A B*, *C i*, e rifulterà la *decima maggiore*, fe delle cinque parti, che compongono tutta la corda *C D* fe ne prenderanno 2. e fi toccheranno in un tempo le due corde *A B*, *C o*, come fi troveranno tutte le altre, quali fono l' *undecima*, e la *duodecima*, la *decimaterza maggiore*, e *minore*, la *decimafettima maggiore*, e *minore*, la *decimaottava*, la *decimanona*, e la *ventefima maggiore*, e *minore*, fe della intera corda *C D*, nel tempo, in cui tocchiamo l' altra *A B*, ne toccheremo una parte, che equivalga a $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{16}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{5}{24}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{15}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{32}$, $\frac{3}{20}$, ne' quali numeri prefi inverfamente, fi trovano per pratica tutte le proporzioni delle Confonanze compofte. E che tutto quefto fia vero, ferve il moftrarlo nella regola, che fi è tenuta per preparare le prime delle nominate Confonanze. Se tutta la corda *A B* fi tocca infieme colla metà della corda *C D*, rifulta, come abbiamo detto di fopra la prima delle femplici Confonanze; fe in vece di toccare tutta la corda *A B*, fe ne tocca la metà fola, e nel tempo fteffo fi tocca la metà della porzione della corda *C E*, dee farfi fentire una nuova Confonanza fimile alla precedente, ma di lei fuperiore, dunque fe tutta la corda *A B* fi toccherà nel tempo fteffo, in cui fi toccherà la quarta parte della corda *C D*, rifulterà una

Con-

Consonanza, che non sarà più simile alla precedente, e che manterrà una nuova proporzione, cioè la proporzione del 4. all' 1., ma questa Consonanza, che ha una tal proporzione è quella, che si chiama la quintadecima, dunque si sarà stabilita una Consonanza superiore alla prima semplice, e con una ragione maggiore della dupla, cioè si sarà prodotta una Consonanza composta. Con questo modo di argumentare, si può far vedere, che ancora qualunque altra delle nominate Consonanze è diversa da ciascheduna delle semplici, e per il numero delle voci, che essa dee avere, e per la proporzione, sotto la quale si genera.

XII. Per riguardo al metodo, che si può tenere nell' unire insieme le Consonanze composte, si osserva, che si possono bene queste aggiugnere alle ottave, o alle quintedecime, ma non già tutte, e ciascuna si può aggiugnere a se stessa, nè si possono raddoppiare, o prendere tre volte, poichè non vi è alcuna delle Consonanze semplici, che aggiunta a se stessa, o ripetuta, produca una nuova Consonanza, se ne eccettuiamo l' ottava, la quale, come quì sopra abbiamo notato, aggiunta a se stessa, produce la quintadecima, ed in fatti, se la quinta si aggiugne alla quinta, se la quarta si aggiugne a se stessa, risulteranno due proporzioni, cioè per la prima unione risulterà la proporzione del 9. al 4. per la seconda nascerà l'altra del 16. al 9. sotto le quali non si dà Consonanza, ma sibbene una dissonanza.

XIII. Di tutte le Consonanze, quelle sono le più perfette, nelle quali la proporzione è multiplice, o superparticolare, che se è superpaziente, o multiplice dupla superpaziente la loro proporzione, tali Consonanze si hanno nel numero delle meno perfette, che però, dove l' ottava, la quinta, la duodecima, la quintadecima, &c. sono numerate fra le Consonanze perfette, la sesta maggiore, e minore, la decima minore, e l' undecima si trovano fra l' imperfette, come pure la stessa quarta, se non si pone sopra la quinta, è meno perfetta della terza maggiore, della terza minore, e delle due seste. Si aggiunga di più, che le medesime Consonanze diventano più, o meno grate, secondo la varietà del luogo, in cui si fanno, e secondo che più di loro se ne prendono per fare un armonia, quindi si sente l' armonia più grata,

ta, se fra due corde preparate per produrre l'Ottava, se ne ponga una di mezzo sì ben disposta, che ora produca la quinta, ed ora la quarta, e questa maggiore dolcezza generalmente deriva dalla natura del suono, il quale, perchè è creato non solo dalla velocità, ma ancora dalla frequenza delle undulazioni dell'aria, che in un tempo appena impercettibile arrivano all'orecchio, varie di queste undulazioni, che si fanno in due Suoni, quanto sono più concordi, tanto con maggiore delicatezza l'orecchio perquotono, ed allontanano quell'aspro, e pungente, che ne' nervi auditorj produce un armonia non ben concertata, per la qual cosa, siccome le Consonanze rispetto alle corde, colle quali si fanno, mantengono una proporzione sempre costante, le medesime considerate rispetto alle velocità, e undulazioni dell'aria, dalle quali dipendono, hanno da avere costante la loro proporzione, diversa dalla prima in questo solo, che si ha da dire di minore inegualità, e per tal riguardo quella Consonanza, che è l'Ottava, non si dirà mantenere la dupla proporzione, ma la subdupla, e quella, che è la quinta, manterrà non la sesquialtera, ma la subsesquialtera, e così per ordine tutte le altre manterranno la proporzione, che è inversa, a quella delle longitudini delle Corde, non per altra ragione, se non perchè la maggior corda fa un numero di vibrazioni, che è minore di quello, che fa la corda minore, la quale nell' Ottava ne fa due nel tempo in cui la maggiore ne fa una sola, e nella quinta ne fa tre, quando la maggiore ne fa sole due, e così delle altre.

XIV. Quello che in questo luogo resta a proporsi, appartiene al determinare certe regole, che si hanno da osservare per riuscire nella giusta divisione armonica di quella Corda, che toccata insieme colla intera, crea le Consonanze. Si ha da dividere primieramente l' intera Corda in due metà nel punto E, poi in tre parti in H, ed in cinque in K; fatta questa divisione, di nuovo la parte DE si dividerà nel mezzo nel punto I, siccome si dividerà in mezzo la parte DI. Di una di queste metà si dovrà prendere il triplo, e risulterà DG, dell'altra metà si prenderà la nuova metà, e si avrà Ds. Questa parte si ha da dividere in mezzo, e una di queste metà in due altre metà, delle quali una divisa in due parti

ugua-

uguali, una di queste si prenderà tre volte, e si produrrà *D u*. Fatta nella guisa predetta la divisione della parte *D E*, s'intraprenderà la divisione sopra la seconda parte principale *D H*, e se ne prenderà la metà *D L*, e poi se ne prenderà la terza parte *D t*, di cui presa di nuovo la terza parte, e di una di queste un altra terza, risulterà *D x*, e sarà compita la divisione sopra *D H*. Si dividerà ora la rimanente parte *D K* prima per metà, e si avrà *D r*, poi in cinque parti, e risulterà *D t*, finalmente *D K* si raddoppierà. e avremo *D F*, e con questa divisione sarà compita la serie delle proporzioni, sotto le quali si esprimono le semplici Consonanze.

XV. La Divisione, se si ha da intraprendere sulla medesima Corda per manifestare ora le proporzioni delle Consonanze composte, che sono maggiori della dupla, si fa con prendere secondo l'ordine la metà degl' intervalli fissati, cioè le parti *DL*, *D K*, *D I*, *D H*, *D G*, *D F*, *D E*, e con trasportarle dal punto *E* verso *C* sopra la Corda, che resta, mentre le porzioni *E i*, *E o*, *E d*, *E b*, *E k*, *E c*, *E a*, formeranno la prima divisione di questa Corda. Che se ora tutte queste parti si dimezzeranno, e la loro quantità si trasporterà dal punto *a* verso *C*, dove esse anderanno a segare la porzione rimanente della predetta Corda *a C*, in quei luoghi lasceranno la seconda Divisione, e mostreranno le proporzioni dimandate, colle quali si regolano le Consonanze composte.

XVI. Nè già è ideale lo stabilimento di tali proporzioni. Egli è certo, che ogn' intervallo de' Suoni è diviso in Ottave, perchè ogni altra voce, che si trova dopo l'Ottava, è una di quelle, che la precedono. Così la nona è quasi seconda, la decima è quasi terza, l'undecima è la quarta, la duodecima è la quinta, la quintadecima è quella, che i Greci chiamano *Disdiapason*, e quasi la *Diapason*, e così delle altre. E' altresì vero, che ogni Ottava si divide in terza maggiore, ed in quarta, dunque gl' intervalli de' Suoni sono quelli stessi, ne' quali si dividono la terza maggiore, la terza minore, e la quarta, e la ragione dell' Ottava ha da essere una ragione composta dalle ragioni di quelle. Le ragioni, che convengono a queste Consonanze sono del 5. al 4., del 6. al 5. del 4. al 3., le quali multiplicate insieme, producono la ragione del 120. al 60., cioè del 4. al 2., e però la ragione

 dell'

dell'Ottava dee essere una multiplice dupla. Ognuna delle tre predette ragioni multiplicate nasce da altre ragioni, mentre nasce la prima dalla ragione del 9. all'8. e del 10. al 9. nasce la seconda dalla ragione del 9. all'8. e dalla ragione del 16. al 15.; nasce la terza dalla ragione del 9. all'8. del 16. al 15. e del 10. al 9. cioè tutte insieme derivano da tre ragioni del 9. al 18. da due del 10. al 9. e da due altre del 16. al 15. che sono le ragioni del Tono maggiore, del Tono minore, e del Semitono maggiore, dunque gl' intervalli di tutti gli Suoni consisteranno nello spartimento de' nominati Toni, che tutti si troveranno nella Ottava, nella guisa, che al suo luogo più sopra si stabilì, per avere in essi un mezzo opportuno a moderare l'inegualità de' termini delle Consonanze, per il qual fine sono stati principalmente adoprati.

XVII Scoperta in tal guisa quella proporzione, che all' Ottava conviene, ed il numero de' suoi intervalli, con facilità si scuoprono le proporzioni delle altre, ed i loro respettivi gradi, secondo il metodo, che ora quì si propone. La Consonanza, che i Greci chiamano *Ditono*, ovvero *terza maggiore*, non ha meno di due intervalli, quali sono il Tono maggiore, ed il Tono minore, dunque è una Consonanza, la di cui proporzione risulta dalla proporzione di questi due Toni, cioè dalla proporzione, che ha il 9. all'8. ed il 10. al 9., ma la ragione, che da queste due risulta è del 90. al 72. ovvero del 5. al 4. dunque una tal Consonanza dee eccitarsi sotto una tal proporzione. Similmente perchè il *Semiditono* dee avere due gradi, cioè il Semitono maggiore, ed il Tono maggiore, quella ragione, che risulterà dalla multiplicazione delle ragioni di questi due gradi, le quali sono del 16. al 15. del 9. all'8. sarà la ragione, o la proporzione del Semiditono, ma la ragione, che risulta è del 144. al 120. ovvero del 6. al 4. dunque sotto questa proporzione si farà sentire il Semiditono, o la *Terza minore*.

La Consonanza, che da' Greci è denominata *Diatesseron*, e che noi chiamiamo *Quarta*, è una Consonanza composta del Ditono, e del Semiditono maggiore, cioè della ragione del 5. al 4. e del 16. al 15. dunque la sua proporzione dovrà essere dell'80. al 60. cioè del 4. al 3.

La *Diapente* de' Greci, che è la nostra *Quinta*, è composta

po-

posta della Diatesseron, e dal Tono maggiore, cioè della ragione del 4. al 3. e del 9. all' 8., dunque si sentirà sotto la proporzione del 36. al 24. ovvero del 3. al 2.

L'*Exacordon* maggiore de' Greci, ovvero la *Sesta maggiore* comprende una Diapente, ed un Tono minore, dunque la sua proporzione sarà composta della ragione del 3. al 2. e del 10. al 9., cioè sarà la ragione del 30. al 18. ovvero del 5. al 3. che se in vece del Tono minore si porrà il Semitono maggiore, cioè la ragione del 16. al 15. la ragione composta, che risulterà sarà del 48. al 30. cioè dell' 8. al 5. e questa è la proporzione stabilita per l' *Exacordon* minore, ovvero per la *Sesta minore*, e generalmente parlando, con questi fondamenti, restano stabilite le proporzioni, sotto le quali si dice, che si fa sentire qualunque Consonanza.

XVIII. Come si sono trovate le proporzioni delle Consonanze dalle cognizioni degl' intervalli, o di quelle parti, che le compongono, così si possono trovare le altre proporzioni, sotto le quali si prendono queste stesse parti, o intervalli. Per conoscere le proporzioni del Tono, del Semitono, Comma, e Diesi, si pratica questa regola. Si sottra il maggior Tono dalla Diapason, e dall' avanzo si fa nuova sottrazione dello stesso primo Tono, e così sempre, fino a che non risulti una frazione, il di cui numeratore sia maggiore del denominatore, cosa che si trova dopo cinque sottrazioni. Dunque in questa guisa resta scoperto, che il Tono maggiore è contenuto cinque volte dalla Diapason, e di più resta un avanzo, che si trova sottraendo il risultato della quinta operazione dal Tono maggiore, e questo avanzo manifesta la minima proporzione della Comma, o se si leva dal Tono, si vede subito quante Comme compongono il Tono, siccome se si sottra dal Semitono maggiore, o minore, fa vedere quante Comme sia l' uno, e l' altro.

La proporzione del Semitono minore si ha, se si estrae la radice quadrata dal risultato della quinta sottrazione (queste sottrazioni si fanno all' usanza del partire de' rotti) che è $\frac{243}{256}$, e se questa si sottra dal Tono intero, ha da lasciare $\frac{2048}{2187}$ che sarà la proporzione del Semitono maggiore.

Se-

Serie delle Sottrazioni.

I. $\frac{8}{9}$ da $\frac{1}{2}$ avanza $\frac{9}{16}$ II. $\frac{8}{9}$ da $\frac{9}{16}$ avanza $\frac{81}{128}$

III. $\frac{8}{9}$ da $\frac{81}{128}$ avanza $\frac{729}{1024}$ IV. $\frac{8}{9}$ da $\frac{729}{1024}$ avanza $\frac{6561}{8192}$

V. $\frac{8}{9}$ da $\frac{6561}{8192}$ avanza $\frac{59049}{65536}$

Differenza.

$\frac{59049}{65536}$ da $\frac{8}{9}$ avanza $\frac{524288}{531441}$

Estrazione di Radice quadrata.

da $\frac{59049}{65536}$ radice $\frac{243}{256}$

C A P. VIII.

De' Logaritmi, loro origine, loro uso, e loro proprietà.

I. GIA' abbiamo detto, che delle Progressioni continue una è *Aritmetica*, che si avanza per eguali intervalli, l'altra è *Geometrica*, che procede per differenze disuguali, le quali o crescono, o scemano proporzionalmente. L'esempio della prima l'abbiamo posto in questa Progressione 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. &c. ovvero 2. 4. 6. 8. 10. 12. &c. come l'esempio della seconda si pose quest' altro 2. 4. 8. 16. &c. si notarono pure al suo luogo quelle proprietà, che si poterono avvertire, come le più belle, e le più necessarie a sapersi fra tutte quelle, che appartengono alla Progressione Aritmetica, onde solo basta qui osservare la differenza, che passa nell' uso di questa, e della Geometrica, per trovare il quarto termine proporzionale, la quale consiste in sommare quei termini, che nella Geometrica si dovrebbero multiplicare, e nel levare dal loro prodotto quello, che sarebbe il divisore del risultato della multiplicazione nella Geometrica, e da questo operato nasce la facilità grande, che risulta ne' calcoli dall' uso de i Lo-

Logaritmi, per mezzo de i quali si fa il cangiamento della multiplicazione nell' addizione, e della divisione nella sottrazione.

II. Si può in oltre avvertire, che potendo la Progressione Geometrica cominciare dall' unità, e l' Aritmetica dallo zero, in qualunque esempio di Progressione, che sia dato, tanto in quella, che in questa, l' operato con i due termini di mezzo sarà sempre un termine di queste due Progressioni, il quale paragonato ad uno de i due precedenti, si discosterà tanto da uno di loro, quanto quello, che resta si discosta dal primo. Ed in fatti, dati questi tre termini geometricamente proporzionali 1. 6. 36. perchè si trovi il quarto, il 216. che risulta dalla multiplicazione del 36. per il 6. resta il quarto proporzionale, che tanto si discosta dal 36. ovvero dal 6. quanto il 6. ovvero il 36. si discosta dall' 1. e nella stessa maniera dati nella Progressione Aritmetica questi tre numeri 0. 4. 8. perchè si trovi il quarto, la somma del 4. coll' 8. cioè il 12. dovrà essere questo quarto proporzionale ancora esso tanto lontano dall' 8., o dal 4. quanto il 4. ovvero l' 8. è lontano dal zero.

III. Avvertite tali particolarità, passiamo alla definizione de i Logaritmi, ed osserviamo, che la unione di due Progressioni una Geometrica, l' altra Aritmetica è quella, che noi chiamiamo *Logaritmo*, come lo esprime la stessa voce composta di due nomi, de i quali la prima significa *ragione*, e l' altro *numero*, quasi che voglia dire un confronto di numeri geometricamente proporzionali ad altri numeri, che sono proporzionali aritmeticamente, come si manifestano in questo esempio.

2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.
1	2	3	4	5	6	7

In ordine a questo esempio, si osserva, che ognuno de i numeri, che si trova nella Progressione Aritmetica è il Logaritmo di ciascuno di quelli, che contiene la Progressione Geometrica, e ciò si fa manifesto dall' avvertire, che se si voglia multiplicare il 2. per il 32. che sono due termini della Progressione Geometrica, basta prendere i loro Logaritmi 1. e 5. e som-

e sommargli assieme, che nel prodotto 6. comparirà il Logaritmo, che è fatto di quel numero, che ha da risultare dalla richiesta multiplicazione, cioè il 64. Similmente, se questo 64. si abbia a dividere per il 32. si vede subito come questa divisione si abbia da fare, se dal Logaritmo del 64. che è il 6. si levi il Logaritmo del 32. che è il 5. perchè ciò che resta, cioè 1. è il Logaritmo del quoziente, che ha da risultare, cioè del 2. al quale quell' 1. serve di Logaritmo. Ed ecco confermato ciò, che altrove da noi si fece noto, dove si trattò della maniera di formare le Serie delle Potenze, quando si disse, che se le serie delle Potenze crescevano secondo la Progressione Geometrica, gli esponenti loro si avanzavano a tenore dell' Aritmetica, come quì apparisce nell' inalzamento di a alle seguenti Potenze.

$$a^0.\ a^1.\ a^2.\ a^3.\ a^4.\ a^5.\ a^6.\ a^7.\ a^8.\ a^9.\ a^{10}.\ \&c.$$

e che se una Potenza si voleva sublimare ad un altra, serviva, che si sommassero insieme i loro esponenti, o al contrario si sottraessero, quando una Potenza più alta si fosse voluta ridurre ad una più bassa, che torna lo stesso coll' insegnamento, che ora si dà della unione delle due Progressioni Geometrica, ed Aritmetica, per preparare il Logaritmo.

IV. Non abbiamo però sempre la congiuntura di assegnare il Logaritmo alli numeri, che sono posti secondo la formula precedente in una qualsisia data serie Geometrica. Converrà molte volte dare il Logaritmo ad un altro numero, che sia tramezzo a quelli, che sono dati tutti fra loro geometricamente proporzionali, per la qual cosa è utilissimo porre in vista quella regola, che si ha da tenere per riuscire in questa ricerca, e per scegliere il proprio Logaritmo al numero dimandato. Consiste questa regola in preparare tali numeri quali sono necessarj per venire a stabilire una regola di proporzione, per fare la quale, prima si osserva ciò, che si ha da fare per sfuggire l' incontro delle frazioni, che potrebbero doversi aggiugnere al termine medio proporzionale, che risultasse dalla nostra operazione, e questo è di aggiugnere al numero di cui si cerca il Logaritmo molti zeri, cbe secondochè si vede praticato non sono meno di sette, questi me-

medesimi ascrivergli ancora agli altri numeri, che entreranno nell' esempio della regola di proporzione, che si dovrà fare prima con i numeri geometricamente proporzionali, poi con i loro Logaritmi.

V. Accresciuto a tenore di questo insegnamento delle sette nullità il dato numero, e gli altri due, che vengono ad essere rispetto ad esso estremi proporzionali, con questi due si opera per trovare il loro medio proporzionale, il quale o tornerà esattamente il dimandato numero col suo aumento fattogli, ovvero risulterà un numero, che sarà di lui o maggiore, o minore. Se verrà dalla operazione il dimandato numero, si ordinerà con i Logaritmi de i due numeri, che si sono considerati quì sopra come estremi proporzionali, la seconda regola di proporzione per trovare il medio proporzionale, e quello, che si troverà sarà il Logaritmo del dimandato numero, e sarà compita l' operazione; ma perchè quasi sempre succede, che il numero, che risulta dalla prima operazione non è lo stesso, che si dimanda, perciò tante volte si ha da ripetere l' operazione, quanto è necessario, perchè comparisca questo numero, ed il metodo, che si ha da tenere nello stabilire gli estremi proporzionali è il seguente. Quasi che tutti gli Autori, che hanno di questa materia fatti trattati, hanno prefissa la serie de i numeri geometricamente proporzionali nella serie decupla, quale quì apparisce.

1. 10. 100. 1000. 10000. 100000. 1000000. &c.

a ciascuno di detti termini hanno pure assegnati i Logaritmi, che quì si vedono.

00000000. 10000000. 20000000. 30000000. 40000000.
50000000. 60000000. &c.

che per tanto volendosi trovare il Logaritmo di un medio geometricamente proporzionale fra l' 1. ed il 10. si vede subito, che questo Logaritmo sarà maggiore di 0000000. ma sempre minore di 10000000. come se si vorrà trovare fra il 10. ed il 100. sarà magggiore di 10000000. ma minore di 20000000. e così degli altri.

VI. Dopo questa riflessione, è d'uopo subito stabilire il numero, di cui si vuole trovare il Logaritmo per esempio del 5. fra l'1. ed il 10. poi la prima regola di proporzione si prepara in tal modo accresciuta l'unità di sette zeri, si aggiungono questi sette zeri anche al 10. e risultano questi due termini 10000000. 100000000. e si trova fra essi colla sua regola altrove data, il medio proporzionale geometrico 31622777. ed assegnati i Logaritmi proprj dell'uno, e dell'altro de i due primi termini, che sono 0000000. 10000000. anche fra essi si trova, secondo gl'insegnamenti daai, il Logaritmo 05000000. medio proporzionale Aritmetico, fatto questo, si riscontra nella operazione, che il medio proporzionale geometrico trovato non è quello, che si cerca, cioè il 50000000. ma è un numero minore di esso, dunque nemmeno il Logaritmo medio sarà il Logaritmo, che si dimanda; si ripiglierà perciò l'una, e l'altra operazione con cercare il numero medio proporzionale fra il 31622777., ed il 100000000. e fra il Logaritmo 050000000. 10000000. e si proseguiranno le operazioni fino a che non risulterà il numero dimandato, con assegnare per termini estremi proporzionali quei due numeri, che si sono trovati nel più, e nel meno, approssimarsi al numero dimandato. Non si può negare, che l'operazione non riesca lunga, e tediosa, e se ogni volta, che si ha bisogno del Logaritmo di un qualche numero fossimo costretti a porla in uso, sarebbe un volere allontanare qualunque Giovane dallo studio di questa Scienza per timore di non potervi riuscire per mancanza, se non di altro, almeno di pazienza. Buon però per lui, che già è stato fatto un tale studio, e che la diligenza non mai abbastanza lodata del nobilissimo Scozese Giovanni Nepero, e di diversi altri Scrittori, gli ha preparate quelle Tavole, che sono necessarie per avere i Logaritmi, che appartengono a diversi numeri. Dunque, chi avrà in pronto quelle Tavole potrà sodisfarsi, e troverà con prestezza quel Logaritmo, che gli abbisognerà a tenore del problema, che dovrà risolvere. Sebbene a motivo di rendere in qualche modo familiari a tutti quelle operazioni, che dipendono dalla ricerca de i Logaritmi, anche in mancanza di dette Tavole, non è fuori di proposito aggiugnere ora una succinta notizia di ciò, che si

po-

potrà fare in tale occorrenza. Si procurerà di avere in pronto in una breve Tavola quei Logaritmi, che sono stati trovati per i numeri primi, che sono fra l' 1. ed il 1000. e che noi gli riportiamo per maggiore comodità al fine di questo Capitolo (Sono chiamati *Primi* quei numeri, che divisi per qualsivoglia numero, fuori che dalla unità, lasciano sempre delle parti aliquote fra l' 1. ed il 1000. ve ne sono 169.) Si farà poi una diligente ricerca sopra la condizione del dato numero, il quale o sarà minore del 1000. o sarà maggiore, ed essendo maggiore, o risulterà dalla multiplicazione di due *numeri primi dati*, o di due *altri*, *che non sono dati*, ma però minori di 998. o sarà anch' esso un numero primo dentro una serie di altri numeri. Si troverà il Logaritmo del dato numero, quando sarà minore del 1000. con trovare quel numero primo, che lo divide esattamente, o che risulta come quoziente della divisione, perchè è osservazione quasi infallibile, che ogni numero non primo dato per dividersi, o è diviso da un numero primo, o lascia per quoziente della divisione un numero primo. Se tanto il divisore, che il quoziente è un numero primo, si prendono i Logaritmi loro, e si sommano insieme, e ciò, che risulta è il Logaritmo del numero non primo dato. Si trovi per esempio il Logaritmo di 85. numero, che è minore del 1000. Si riscontra, che questo numero lo parte il 17. numero primo, che in esso ci entra cinque volte, cioè si trova, che tanto il divisore, che il quoziente sono numeri primi, però si uniranno i Logaritmi loro 06989700. 12304489. e nel risultato 19294189. comparirà il Logaritmo di 85. se poi il quoziente o il divisore non sono numeri primi, come succede, se si ha da dimandare 678. che resta diviso dal 113. numero primo, con lasciarci per quoziente il 6. che non è numero primo, anche in questo caso si prenderanno i Logaritmi del numero partitore, e del quoziente dalla nominata Tavola, e poi si opererà come nel primo caso, per far risultare il 28312207, che è il Logaritmo del 678. numero dato.

VII. Quando il quoziente è un numero non primo maggiore del 10. come lo è il 24. che è quoziente nella divisione di 696. per 29. in tal caso dal quoziente si dee levare quel numero primo, che in esso si trova capace a non rilevare

un prodotto maggiore di 24. multiplicato per qualunque altro numero minore del 10. e questo numero primo è il 3. poi si hanno da sommare i Logaritmi di questi numeri del 29. del 3. e dell' 8. e quello, che risulta è il Logaritmo di 696. e questa regola si osserverà, se il partitore esso pure sarà un numero non primo, come lo sarebbe, se arrovesciando il precedente caso, diventasse 24. il partitore, e fosse 29. il quoziente.

Esempio della regola.

Log. del 29.	14623980
Log. dell' 8.	09030900
Log. del 3.	04771212
Somma, e Log. del 696.	28426092

VIII. Per gli altri casi, che possono accadere in congiuntura di trovare il Logaritmo per un numero maggiore del 1000. si osserva, che questo numero può avere il quoziente, e il partitore dentro la serie de i preparati numeri Primi, come succederebbe, se il dato numero fosse minore di 988027. che risulta dalla multiplicazione di 991. per 997. che sono li due ultimi numeri primi, che si trovano fra l' 1. ed il 1000. che però quello, che si è avvertito nelle precedenti regole, si può porre in opera per trovare il Logaritmo di uno di questi numeri. Si abbia da trovare il Logaritmo di 3912. ovvero di 102237. l' uno, e l' altro di questi due numeri è maggiore del 1000. ma è minore di 988027. perchè dunque si trova, che il primo risulta dalla multiplicazione del 163. multiplicato per 24. e che il secondo risulta con metodo, che non è niente differente da quel di prima dalla multiplicazione del 643. per 159. dunque bisognerà conchiudere, che non sarà difficoltà, che non si sia quì sopra avvertita per potere trovare questi due Logaritmi. Già nelle Tavole per fare la prima operazione vi abbiamo il 163. e per fare la seconda vi riscontriamo pure il 643. non vi abbiamo però il 24. ed il 159. o sia l'uno, e l'altro quoziente, ovvero sieno tutti due partitori. Ma che importa questo, se nella Tavola vi abbiamo l 3. e l' 8. che multiplicati fra loro fanno il 24. e similmente vi

vi abbiamo il 3. ed il 53. che ugualmente multiplicati fra loro fanno il 159. dunque di queſti numeri ſi prenderanno i Logaritmi, i quali uſati come prima, avremo il modo di trovare i Logaritmi cercati.

163. *Log.* 22121876		643. *Log.* 28082110
8. *Log.* 09030900		3. *Log.* 04771212
3. *Log.* 04771212		53. *Log.* 17242759
3912. *Log.* 35923988		102237. *Log.* 50096181

IX. Nel caſo poi, in cui il dato numero foſſe minore di 989127. ma però non derivaſſe da neſſuno de i numeri Primi preparati nella Tavola, ed eſſo pure foſſe un numero Primo, non ſi potrebbe ricorrere immediatamente alla data regola; ma non per queſto ci dovrebbamo perder d'animo di riuſcire nel ritrovamento del ſuo Logaritmo, ſenza le predette Tavole. Io pongo il caſo nel numero 753953. il quale ha le condizioni ſiſſate. Affine dunque di fare queſta operazione, e trovare il Logaritmo di queſto numero, ſi ha da ridurre ad un numero, che ſi trovi nella noſtra Tavola, o che almeno poſſa riſultare dalle multiplicazioni di due numeri, che ſi trovino nella medeſima, ſicchè in queſto caſo, prendendo noi le tre prime figure 753. queſte le ritroviamo eſattamente nella noſtra Tavola, e torna lo ſteſſo, come ſe aveſſimo diviſo il dato numero per il 1000.

Compita queſta operazione, ſi prende il Logaritmo di 753. che è 28767950. e ſi aggiugne al Logaritmo di mille 30000000. ed il Logaritmo, che riſulta 58767950. è il Logaritmo di 753000. cioè di 753. multiplicato per 1000. Fatto queſto, ſi creſce il 753. di una unità, e ſi fa 754. cioè ſi prepara un numero, che riſulta dal 13. multiplicato per 58. Si prende il Logaritmo del 13. che è 11139434. col Logaritmo del 58. cioè co i Logaritmi del 2. e del 29. che ſono 03010200, 14623980., e queſti Logaritmi di nuovo ſi ſommano col Logaritmo del 1000., e ſi ha 58773714. per Logaritmo di 754000. che riſulta dalla multiplicazione di queſti quattro numeri fra di loro 13. 2. 29. 1000. Trovati con un tal metodo queſti due Logaritmi, ſi ordina la ſeguente regola di Proporzione.

Se

Se quando 753000. cresce di 1000. il Logaritmo 58767950. cresce di 5763. Quando il 753000. crescerà di 953. il Logaritmo 58767950. di quanto crescerà? e si trova, che crescerà di 5492. parti con poco più, sicchè si può dire, che 58773442. sia il Logaritmo del dato numero 753953. Già è noto, che per trovare il numero, che si cerca in questa regola di Proporzione, si hanno da disporre i termini in tal modo: 753000. 1000. 58767950. 5763. 753000. 953. 58767950. e poi si hanno da multiplicare fra loro i primi tre per avere il partitore, e gli ultimi quattro per avere il numero da partirsi, onde fatta così l'operazione, questa ci lascia il numero dimandato.

X. Vogliamo adesso aggiugnere un nuovo caso tutto opposto a quello, che quì sopra abbiamo dato, ed è di ciò, che si abbia a fare per trovare il numero, che conviene al Logaritmo dato, volendoci noi servire della nostra Tavola. Io dico dunque, che appartenendo il Logaritmo dato ad un numero prodotto dalla multiplicazione di due di quelli, che sono nella Tavola, si deve dal Logaritmo dato levare il Logaritmo prossimamente minore, che in detta Tavola si trova, e notare a qual numero questo appartenga, ciò che rimane sarà un Logaritmo, che pure si trova nella Tavola appartenere ad un altro numero, sicchè multiplicati fra loro questi due numeri nel risultato si avrà quel numero, a cui conviene il Logaritmo dato. Eccone un esempio. Si dimanda a qual numero appartenga il Logaritmo 59777881. Questo Logaritmo se si riscontra con quelli, che sono nella Tavola si trova maggiore di 29986952, che è il Logaritmo di 997, sicchè fatta la sottrazione di quello da questo resta 29790929, che si riscontra nella Tavola appresso al numero 953; dunque il numero, a cui apparterrà il Logaritmo dato sarà 950141, che risulta dalla multiplicazione di 997. per 953, come si potrebbe riscontrare ripetendo l' operazione sopra stabilita nel precedente caso.

XI. Quando l' avanzo non fosse un Logaritmo di quelli notati nella nostra Tavola: per trovare in questa Ipotesi il numero, a cui appartenesse il dato Logaritmo bisognerebbe fare l' operazione, che quì segue. Si sottrarrebbe come nella precedente il dato Logaritmo dal 29986952, che è il Logaritmo di 997. poi nella nostra Tavola si dovrebbe prendere il

Lo-

Logaritmo proſſimamente maggiore, e minore all'avanzo preparato, per notare i numeri corriſpondenti da multiplicarſi col numero del Logaritmo primo ſottratto, da queſte multiplicazioni riſulteranno due numeri, e neſſuno di loro ſarà quello, che converrà al dato Logaritmo, ma ſibbene un altro, che ſi dovrà trovare in mezzo ad eſſi. Sia il Logaritmo dato 58773442. Da queſto levato il 29986952. Logaritmo di 997. ſi ha d'avanzo 28786490, che non ſi trova nella noſtra Tavola. Si trova però in eſſa il minor Logaritmo 28767950. che è il Logaritmo di 753, ed il Logaritmo maggiore 28790950, che è Logaritmo di 757. Cioè ſi trova, il Logaritmo di 750741. numero che riſulta da 997. multiplicato per 753, che è 58754902, e di 754729, che riſulta da 997. multiplicato per 757, che è 58777912. l'uno e l'altro però non è il Logaritmo dato, dunque nè meno l'uno, e l'altro corriſpondente numero ſarà il numero ricercato, che però ſiccome il Logaritmo dato è in mezzo alli due Logaritmi trovati, così dovrà eſſere nel mezzo a due riſultati numeri, quel numero che ſi ha da trovare. Perciò dovendoſi trovare ſi farà così. Si prenderà 23010, che è la differenza de' due Logaritmi trovati, e ſarà il primo termine proporzionale in una regola di proporzione, il ſecondo termine ſarà 18540, che è la differenza che vi è fra il Logaritmo dato, ed il Logaritmo del minor numero trovato 750741. Si prenda 1000. per terzo proporzionale, che poi ſarà il denominatore della frazione che riſulterà, e con queſti termini così diſpoſti ſi troverà $\frac{805}{1000}$ da aggiugnerſi al minor numero trovato, perchè riſulti il numero, che conviene al dato Logaritmo, il quale però non ſarà il giuſto nella noſtra operazione, perchè il Logaritmo che ſi prende proſſimamente maggiore, e proſſimamente minore alla differenza preparata, non è veramente tale, perchè ſi diſcoſta da eſſa, quanto fra loro ſi diſcoſtano ſcambievolmente i numeri Primi, che ſono nella noſtra deſcritta Tavola, dunque per fare, che riſultaſſe colla maggiore eſattezza l'operazione; prima biſognerebbe preparare il Logaritmo, che foſſe in fatti proſſimamente maggiore, e proſſimamente minore, ſecondo la regola ſtabilita nel numero VI. ed allora verrebbe tal quale doveva venire il numero ricercato.

XII. Se il numero dato per trovare il ſuo Logaritmo foſ-

fosse maggiore di 989127, cioè avesse più di sei cifre, o ne avesse sette, otto, ovvero nove &c. l' operazione non sarebbe diversa dalla passata, e unicamente si dovrebbero alla parte destra del numero dato levare quelle figure, che sono sopra le sei, ed operatosi sopra queste nel modo che si è insegnato, si dovrebbe al Logaritmo trovato per le 6. figure aggiugnere il Logaritmo del 10. Se fosse rimasta fuori una sola figura ovvero il Logaritmo del 100. del 1000. del 10000. &c. Se si fossero tagliate due, tre, o quattro figure &c. e con questa aggiunta resterebbe preparato il Logaritmo di un numero, che comprendesse nove figure. Questo caso succederebbe quando di un qualche Seno dato, o Tangente, o Secante si volesse sapere il Logaritmo corrispondente, atteso che l' operazione da intraprendersi per una tal congiuntura presupporrebbe, che qualunque Seno dato, o Tangente, o Secante, fosse accresciuto di tre cifre, giacchè per avere le misure loro più esattamente, si fa che il Seno tutto comprenda un unità con dieci nullità, cioè undici cifre aritmetiche. Figuriamoci dunque che sia dato 4067366, che è il seno di 24. gradi, perchè si trovi il Logaritmo corrispondente. Si aggiungono a questo numero tre zeri, e si scrive 4067366000, poi prese le prime sei cifre 406736. si trova il Logaritmo che ad esse compete nel modo, e forma quì sopra fissata, trovando prima il Logaritmo di 406000, che è 56085260, successivamente il Logaritmo di 407000, che è 56095944. maggiore del precedente di 10684, finalmente quello di 406736. ordinando la regola di proporzione con questi termini 260. 406000. 1000. 56085260000. 10684. 406000. 736. 56085. de' quali multiplicati li primi tre fra loro, e tutti i rimanenti fra loro lasciano ne i prodotti loro 227706155600000000. 11463274367677440000. due numeri da partirsi uno per l'altro, acciocchè il quoziente 7863. unito al Logaritmo primo trovato 56085260. lasci il Logaritmo di 406736. il quale accresciuto di 40000000. che è il Logaritmo di 1000. rilevi 96093123. per il Logaritmo del dato seno di gradi 24. come chi avesse le Tavole, potrebbe in esse riscontrarlo.

XIII. Da tutta la serie delle precedenti regole si rileva con quale facile maniera si possano risolvere le principali operazioni della Aritmetica sopra li numeri per multiplicarli, per dividerli, e per estrarre da essi qualunque radice, mentre

per

per la multiplicazione uniamo insieme i Logaritmi de' due dati numeri da multiplicarsi, e osservando a qual numero aspetti il nuovo Logaritmo prodotto, dichiamo, che questo è il numero cercato; e per la divisione si opera tutto il contrario: e per l' estrazione della radice quadrata si prende il Logaritmo del numero dato, si parte per due, come si partirebbe per 3, per 4. per 5. &c. se si dimandasse la terza, la quarta, la quinta radice &c. che comparirebbe in quel numero, a cui il quoziente preparato servirebbe di Logaritmo se il dato numero fosse una perfetta potenza, perchè se non fosse tale, il quoziente preparato apparterrebbe ad un numero intero, che avesse unita una frazione. Quando poi si volesse inalzare un numero a qual si fosse dimandata potenza servirebbe, che il Logaritmo del dato numero si multiplicasse per l' esponente della potenza richiesta, perchè questo risultato sarebbe il Logaritmo della potenza cercata.

XIV. Se fosse dimandato, che col mezzo de' Logaritmi si trovasse un quarto termine proporzionale, questo si troverebbe sommando insieme i Logaritmi de' due ultimi numeri, e levando dal loro prodotto il Logaritmo del primo, attesochè nell' avanzo si avrebbe il Logaritmo del quarto numero proporzionale dimandato.

XV. Ancora li numeri medj proporzionali fra due dati si trovano coll' uso de' Logaritmi, operandosi in caso che se ne vogliano trovare due, secondo questa regola: il Logaritmo del minor termine dato si leva dal Logaritmo del maggiore, dell' avanzo se ne prende un terzo (se ne prenderebbe $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$ &c. Se si volessero trovare 3. 4. 5. &c.) che si aggiugne al Logaritmo del minor termine, ed in questa somma si ha il Logaritmo del secondo proporzionale, al Logaritmo di questo si aggiugne parimente il Logaritmo di $\frac{1}{4}$ preso, e si fa il Logaritmo per il terzo termine proporzionale, e seguitandosi ad operare in questa guisa si troverebbero tutti quei termini medj proporzionali, che fossero dimandati in mezzo a due numeri. Si aggiungono gli esempj di tutte le precedenti operazioni.

Esempio del multiplicare. Si multiplichi 2. per 4.

Logaritmo del 2. 03010300 † 06020600. Logaritmo del 4. = 09030900. Logaritmo dell' 8. che è il risultato che si cerca.

 Esem-

Esempio della divisione. Si divida 9. per 3.

Logaritmo del 9. 09542426. — 04771213. Logaritmo del 3. = 04771213. Logaritmo del 3. che in questa operazione è il quoziente.

Esempio per l' estrazione della radice quadrata. Si levi da 100. la radice quadrata.

Logaritmo del 100. 20000000 : 2 = 10000000. Logaritmo del 10. che è la radice quadrata.

Esempio per l' estrazioue della radice Cuba. Si levi da 1000. la radice Cuba.

Logaritmo del 1000. 30000000 : 3 = 10000000. Logaritmo del 10. che è la radice Cuba cercata, e così sarebbe delle altre se si proponessero altri esempj per quelle.

Esempio per inalzare un numero ad una potenza. Si trovi il quadrato, ed il cubo del 10.

Logaritmo del 10. 10000000. X 2 = 20000000. Logaritmo del 100. che è il quadrato.

Logaritmo del 10. 10000000 X 3 = 30000000. Logaritmo del 1000. che è il cubo del 10.

Esempio per trovare il cerzo proporzionale dopo il 9. ed il 6.

Logaritmo del 6. 07781512. † 07781512. Logaritmo del 6. = 15563024 — 09542424. Logaritmo del 9. = 06020600. Logaritmo del 4. che è il terzo numero proporzionale.

Esempio per trovare due medj proporzionali fra 2, e 16.

Logaritmo del 16. ovvero del 2 X 8. 12041200. — 03010300. = 09030900.

09030900 : $\frac{1}{3}$ q. 03010300 † 03010300 = 06020600. Logaritmo di 4. cioè del primo termine medio proporzionale trovato.

Logaritmo del 4. 06020600 † 3010300 = 0930900. Logaritmo dell' 8. che è secondo termine medio proporzionale trovato, è compimento della operazione.

Tavola in cui si riscontrano i Logaritmi de' seguenti numeri.

Num. primi	Logaritmi	Num. primi	Logaritmi.	Num. primi	Logaritmi.
1	00000000	131	21172713	359	25550944
2	03010300	137	21367206	367	25646661
3	04771213	149	21731863	373	25717088
4	06020600	151	21789769	379	25786392
5	06989700	157	21958997	381	25809250
6	07781513	163	22121876	383	25831988
7	08450980	167	22227165	389	25899496
8	09030900	173	22380461	397	25987905
9	09542426	179	22528530	401	26031444
10	10000000	181	22576786	409	26117233
11	10413927	191	22810334	419	26222140
13	11139434	193	22855573	439	26424645
17	12304489	197	22944662	443	26464037
19	12787536	211	23242825	449	26522463
23	13617278	223	23483049	457	26599162
29	14623980	227	23560259	461	26637009
31	14913617	229	23598355	463	26655810
37	15682017	233	23673559	467	26693169
41	16127839	239	23783979	479	26803355
43	16334685	241	23820170	487	26875290
47	16720979	251	23996737	491	26910815
53	17242759	257	24099331	499	26981005
59	17708520	263	24199557	501	26998377
61	17853298	269	24297523	503	27015680
67	18260748	271	24329693	509	27067178
71	18512583	277	24424798	521	27168377
73	18633229	281	24487063	523	27185017
79	189762[illegible]1	283	24517864	541	27331973
83	19190781	293	24668676	547	27379873
89	19493900	307	24871384	557	27458552
97	19867717	311	24927604	563	27505084
100	20000000	313	24955443	569	27551123
101	20043214	317	25010593	571	27566361
103	20128372	331	25198280	577	27611758
107	20293838	337	25276299	587	27686381
109	20374265	347	25403295	593	27730547
113	20530784	349	25428254	599	27774268
127	21038037	353	25477747	601	27788745

Num. primi	*Logaritmi.*	*Num. primi*	*Logaritmi.*	*Num. primi*	*Logaritmi.*
607	27831887	753	28767950	877	29429996
617	27902852	757	28790959	881	29449759
619	27916906	761	28813847	883	29459607
631	28000294	771	28870544	887	29479236
641	28608580	773	28881795	889	29489018
643	28082110	787	28959747	917	29623693
647	28109043	791	28981765	929	29680157
653	28149132	797	29014583	937	29717396
659	28188854	809	29079485	941	29735896
661	28202015	811	29090209	947	29763500
673	28280151	813	29100905	953	29790929
677	28305887	821	29143432	959	29818186
683	28344207	823	29153998	967	29854265
691	28394780	827	29175055	971	29872192
701	28457180	829	29185545	973	29881128
709	28506462	831	29196010	977	29898946
719	28567289	839	29237620	983	29925535
723	28591383	843	29258276	991	29960737
733	28651040	853	29309490	997	29986952
739	28686444	857	29329808	1000	30000000
743	28709888	859	29339932	10000	40000000
751	28756399	863	29360108	100000	50000000

IL FINE.

IN-

INDICE
De' Capitoli, e de' Numeri che sono compresi in questo Tomo.



TRATTATO I. PARTE I.

PRefazione Pag. 1.
Cap. I. *Della quantità discreta che cosa ella sia, con quali segni si manifesti, e quali sieno le sue combinazioni p.* 3.
Num. 1. *Che cosa sia il numero*. 2. *Che cosa sia unità*. 3. *De' paragoni, e differenze de' numeri*. 4. *Del modo di esprimere la quantità discreta*. 5. *Del modo di rilevare i numeri*. 6. *Delle operazioni, che sopra la quantità s'intraprendono*.
Cap. II. *Del modo d'ingrandire una quantità numerica col mezzo delle Cifre*. 9.
Num. 1. *Che cosa sia ingrandire una quantità*. 2. *Regola per l'addizione di somme della medesima specie*. 3. *Regola per l'addizione de' numeri di diversa specie*. 4. *Distinzione di varie misure*. 5. *Della multiplicazione di un numero per un altro*. 6. *Multiplicare senza ripiego*. 7. *Miutiplicazione del numero in se stesso*. 8. *Ingrandimento de' numeri composti*. 9. *Esempio del multiplicare per le parti aliquote*. 10. *Regola di operare quando il numero della specie più bassa non si può ridurre ad una denominazione di parti aliquote del numero della prossima antecedente specie*.
Cap. III. *Del modo d'ingrandire la quantità col mezzo delle lettere*. 25.
Num. 1. *L'utile di questo metodo, e del modo di distinguere la quantità per operar con esso*. 2. *Come s'inalzano le semplici grandezze*. 3. *Dell' ingrandimento delle quantità complesse*. 4. *Paragone di questo ingrandimento con quello, che si fa per mezzo dell' Aritmetica, e regole da osservarsi*. 5. *Applicazione di queste regole a qualunque altro caso*. 6. *Sublimare una quantità a que' gradi, che li possono convenire*. 7. *Del modo di unire le grandezze incommensurabili*. 8. *Ridurre la quantità incommensurabile ad una più semplice espressione*. 9. *Dell' addizione, e multiplicazione delle potenze*. 10. *Della multiplicazione delle radici sorde*. 11. *De' Binomi, e Multinomi*. 12. *Della multiplicazione delle quantità irrazionali quando sono molte insieme, e quando sono composte di razionali, e di irrazionali*. 13. *Multiplicazione per avere il cubo di una quantità composta irrazionale*.
Cap. IV. *Del modo d'impiccolire la quantità numerica colle Cifre*. 43.
§. I. Num. 1. *Della sottrazione, e divisione de' numeri*. 2. *Che cosa sia impiccolire un numero*. 3. *Impiccolimento de' numeri composti*. 4. *Regola per la sottrazione de' composti*. 5. *Regola per conoscere se la quantità sia stata bene ingrandita*. 6. *Del secondo mezzo di impiccolire le grandezze, cioè della divisione*. 7. *Modo di operare quando le figure crescono nel partitore*. 8. *Impiccolire i numeri di specie differente*. 9. *Regola da osservarsi quando il partitore, e il numero da partirsi fusse composto di numero della medesima spe-*

specie. 10. *Come si operi quando sono di differente specie*. 11. *Regola da osservarsi quando il numero da partirsi porta una qualche misura riquadrata, e i numeri della specie seguente non sono quadrati*. 12. *Regola quando si il divisore, che il numero da dividersi terminano in zeri*.

§. II. Num. 13. *Della estrazione delle radici, e delle differenti sue specie*. 14. *Modo di trovare le prime due figure della radice quadrata*. 15. *Modo per trovare le altre, se occorresse fare l' operazione*. 16. *Utilità di questa regola*. 17. *Regola per levare la radice quadrata da' numeri composti*. 18. *Della estrazione della radice cuba*. 19. *Esempio di estrazione di radice cuba*. 20. *Uso di questa regola*. 21. *Osservazione per il caso, in cui si abbia da operare co' piedi cubi, con pollici cubi, e con linee cube*. 22. *Riscontro dell' operazione se sia ben fatta*. 23. *Estrazione delle radici da una quinta potenza*. 24. *Estrazione della radice dalla settima potenza*.

Cap. V. *Dell' impiccolire le quantità colle lettere dell' Alfabeto* 79.

§. I. *Della sottrazione, e divisione* Num. 1. *Osservazione da premettersi all' impiccolimento delle grandezze incomplesse*. 2. *Osservazioni quando le quantità sono complesse*. 3. *Della divisione delle quantità incomplesse, e delle varie regole, che si hanno da osservare*. 4. *Della divisione della quantità composta, quando il divisore ha sempre il segno del più*. 5. *Regola da osservarsi quando il segno è del meno*. 6. *Osservazione sull' operazione precedente*. 7. *Regola da osservarsi per dividere le quantità quando sono posti indifferentemente i segni del più, e del meno*. 8. *Divisione delle parti non precedute da Cifre*. 9. *Difficoltà, che può nascere in questa operazione*.

§. II. *Delle estrazioni delle radici* Num. 10. *Dell' impiccolimento delle potenze per la divisione*. 11. *Della estrazione della radice*. 12. 13. 14. *Della estrazione di radice prodotta da potenze composte dimostrata con diversi esempj*. 15. 16. 17. *Esempj di estrazione di radice cuba dalle potenze*. 18. *Metodo più stretto per fare le predette estrazioni di radici*. 19. *Da potenze più alte regole per estrarre le stesse radici*. 20. *Osservazioni per meglio preparare i termini delle potenze per estrarre da esse le radici*. 21. *Ordine per segnare le lettere, che dovranno formare i numeri delle potenze*. 22. *Applicazione del precedente insegnamento a qualunque numero di termini, da cui si abbia da estrarre la radice*.

§. III. *Operazioni sopra le quantità irrazionali* Num. 23. *Del modo di impiccolire le quantità irrazionali per via della sottrazione*. 24. *Dell' impiccolimento delle medesime per mezzo la divisione*. 25. *Osservazione sopra il segno radicale, che deve dividere*. 26. *Regola della divisione delle grandezze razionali per mezzo dell' irrazionali, o al contrario*. 27. *Divisione delle quantità composte radicali*. 28. *Estrazioni di radice dalle quantità irrazionali*. 29. *Metodo insegnato dal Nevvton per estrarre la radice quadrata dal Binome*. 30. *Come si possa estrarre la radice cuba dalle grandezze irrazionali*. 31. *Estrazione di radice cuba dal binome, quando ha tutte le parti incommensurabili, oppure ha le frazioni congiunte a' suoi termini*. 32. *Applicazione del multinome espresso con lettere al multinome espresso con Cifre*. 33. *Uso della precedente regola quando il binome è dato, perchè da esso si levi la radice cuba. Metodo per trovare le parti, che ha da avere la radice, che si ha da levare dal multinome, quali sono le radici universali, e quali le imaginarie*.

TRAT-

TRATTATO I. PARTE II.

Cap. I. D*Elle Frazioni, loro origine, e maniere di prepararle per operare con esse pag.* 127.

Num. 1. *Della necessità di conoscere le frazioni*. 2. *Che cosa sia frazione, quali sono le sue parti*. 3. *Maniera di esprimerle*. 4. *Differenza che passa fra esse*. 5. *Modo di conoscere se sono uguali o disuguali le frazioni*. 6. *Delle frazioni di frazioni, come queste si generano, e della origine delle frazioni, che nascono dal dividere la quantità, che si manifesta colle lettere dell' Alfabeto*. 7. 8. *Uso diverso nello scrivere le frazioni, e loro significati*. 9. *Regole che si presuppongono alle operazioni, che si fanno con esse*. 10. *Dell' ingrandimento delle frazioni*. 11. *Del modo di impiccolirle*. 12. *Riduzione di frazioni ad una semplice frazione*. 13. *Modo di conoscere il valore di ciascuna frazione*. 14. *Del calcolo delle quantità intere congiunte colle frazioni*.

Cap. II. *Dell'ingrandimento della quantità discreta fatto colle frazioni* 142.

Num. 1. *Distinzione delle materie da trattarsi in questo II. Capitolo*. 2. *Del modo di ingrandire le frazioni quando sono sole frazioni quelle sopra le quali si ha da operare, ed hanno i denominatori medesimi*. 3. *Come si fa quando i denominatori sono differenti*. 4 *Operazione quando con alcune frazioni i denominatori sono i medesimi, e con altre sono diversi*. 5. *Operazione per il caso, in cui alle frazioni sono congiunte le quantità intere*. 6. *Del modo di multiplicare le frazioni*. 7. *Osservazione su questa regola*. 8 9. *Del sommare, e multiplicare le frazioni espresse per lettere*. 10. *Osservazione sopra i prodotti di queste operazioni*. 11. 12. *Come la multiplicazione ordinaria delle frazioni scuopre il valore delle frazioni di frazione, e promuove il suo ingrandimento*.

Cap. III. *Del modo di impiccolire le frazioni* 150.

§. I. *Della sottrazione, e divisione delle frazioni* Num. 1. *Della sottrazione, e divisione in generale*. 2. *Della sottrazione in particolare*. 3. *Come si operi quando le frazioni sono unite agli interi*. 4. *Della divisione in particolare*. 5. 6. *Ripetizione delle precedenti operazioni sopra frazioni espresse colle lettere dell' Alfabeto*. 7. 8. 9. *Casi particolari per la divisione di queste frazioni* 8.

Num. 10. §. II *Della estrazione delle radici dalle frazioni, e come queste si possono impiccolire fino allo infinito*. 11. *Estrazione di radici da frazioni comprese da perfette potenze*. 12. *Estrazione di radici da potenze, che non sono perfette, esposte in frazioni*. 13. *Estrazione di radice cuba dalle frazioni*. 14. *Estrazione delle stesse radici da frazioni, che sono congiunte agli interi*. 15. *Estensione della regola sopra qualunque specie di frazioni*. 16. *Estrazione di radice cuba da quantità composte di termini razionali, ed irrazionali espresse colle frazioni*. 17. *Del modo di impiccolire o una quantità intera, o una minuzia fino all' infinito*. 18. *Impiccolire una quantità fino all' infinito col mezzo della divisione, e della estrazione della radice*. 19. *Altro modo per riuscire nella operazione medesima*. 20. *Estrazione della radice cuba*. 21. *Modo di inalzare una quantità ad una determinata potenza*. 22. *Regola per conoscere se tutte le precedenti operazioni sono ben fatte*.

Cap. IV. *Della Aritmetica degli Infiniti* 169.

§. I.

§. I. Del modo di preparare le serie, e delle operazioni, che sopra di esse si fanno.

Num. 1. *Che cosa sia l' Aritmetica degli infiniti, ed a che serva*. 2. *Esempj di diverse serie, e loro valori*. 3. *Serie prodotte per mezzo della estrazione delle radici seconde*. 4. *Della serie naturale, suo valore, e varie maniere per preparare gli esponenti delle serie*. 5. *Metodo da praticarsi indicare i risultaii di tutte le operazioni, che convengono alle serie*. 6. *Del valore di ciascheduna serie*. 7. *Osservazione intorno all' equivalente degli avanzi dopo mostrato il valore delle serie*. 8. 9. *Maniera di esprimere gli equivalenti delle serie infinite di tutte le radici delle potenze*. 10. *Della somma delle serie*. 11. *Osservazione su la precedente regola*. 12. *Della multiplicazione delle serie*. 13. *Osservazione sopra questa regola*. 14. *Multiplicazione di due serie di prime potenze*. 15. *Formule diverse per fare le multiplicazioni di serie di diverse potenze*. 16. *Osservazioni su queste operazioni*. 17. *Della divisione delle serie*. 18. *Osservazione su questa regola*. 19. *Della sottrazione ne delle serie, e regola per determinare il valore degli avanzi dopo fatta la sottrazione*. 20. *Delle sottrazioni di una potenza imperfetta dalla serie degli uguali*. 21. *Della sottrazione della serie de' quadrati, delle terze potenze, delle quarte &c. dalla serie delle prime potenze*. 22. *Modo per determinare gli equivalenti degli avanzi dopo le sottrazioni*. 23. *Della sottrazione di potenze perfette dalla serie di potenze imperfette*. 24. 25. *Regola per esprimere gli equivalenti degli avanzi dopo fatta la sottrazione*. 26. 27. *Altre regole per determinare gli avanzi delle altre sottrazioni, che si sono fatte*. 28. *Osservazione generale su questi avanzi*. 29. *Osservazione in ordine al determinare il valore de i resti dopo fatta la sottrazione di serie di radici fra loro*. 30. *Osservazione intorno al modo di notare l' equivalente di qualunque serie prodotta dalle precedenti operazioni*.

§. II. Del modo di trovare la somma delle serie infinite delle frazioni.

Num. 31. *Dichiarazione di quello, che si vol trattare in questo paragrafo*. 32. *Quando la progressione Aritmetica si trovi in una serie*. 33. *Che differenza abbia dalla Geometrica*. 34. *Della progressione armonica che si trova nelle serie*. 35. *Numeri figurati*. 36. *Del modo di preparare l' ultimo termine delle serie infinite delle frazioni*. 37. *Sommare le serie infinite delle frazioni*. 38. *Esempio, ed osservazione per la regola precedente*. 39. *Caso, che può nascere in occasione di dovere operare colla stessa regola*. 40. *Estrazione di una serie da se medesima diminuita del primo termine*. 41. *Del valore delle serie dette* Leibniziane. 42. *Esempj sullo stesso soggetto*. 43. *Estensione della regola, ad altri esempj*. 44. *Osservazioni sopra la stessa materia*. 45. *Modo di scoprire l' ultimo termine delle somme delle predette serie, ed origine di una nuova serie*. 46. *Metodo per trovare il valore di queste nuove serie*. 47. 48. *Delle serie* Miste, *ed osservazioni sopra di esse*.

§. III. Del calcolo differenziale. Num. 49. *Che cosa è il calcolo differenziale*. 50. *Regola da osservarsi in questo calcolo*. 51. *Operazioni principali, che sopra di esso si possono fare*. 52. *Applicazione del calcolo alle frazioni*. 53. *Applicazione del calcolo alle potenze*. 54. *Prova delle precedenti operazioni*. 55. 56. *Seguitano i riscontri della bontà delle regole, e delle operazioni fatte*. 57. *Origine del calcolo differenzio differenziale*. 58. *In che consista, e come si operi con esso*. 59. *Origine del calcolo integrale, ovvero metodo, che riscontra se le re-*

le regole date per oprare col predetto calcolo sieno giuste, e sicure. 60. Differenti maniere di oprare con questo calcolo. 61. Applicazione delle prescritte regole. 62. Sette casi, a' quali pare che le date regole si possano applicare. 63. Anche la sottrazione ci può somministrare l'integrale di una qualche quantità. 64. Osservazione sopra la quantità, che si aggiugne, o si leva per avere l'integrale. 65. Osservazione più particolare sulla stessa materia. 66. Regole per trovare gli integrali de' multinomi. 67. Nasce una nuova origine di serie miste dalla serie degli integrali. 68. Calcolo esponenziale. 69. Gradi diversi delle quantità esponenziali, ed operazioni, che sopra di esse si fanno. 70. Metodo per integrare queste quantità differenziate.

Cap. V. Delle frazioni decimali 237.

Num. 1. L'uso delle frazioni decimali è utilissimo nel maneggio di tutte le operazioni. 2. Regole da osservarsi per bene oprare colle frazioni decimali. 3. Operazione del sommare. 4. Operazione del sottrarre. 5. Operazione del multiplicare. 6. Operazioni del dividere. 7. Modo di estrarre le radici dalle frazioni decimali. 8. Metodo per sapere qual parte d'intera quantità esprima la frazione decimale data. 9. Estensione della precedente regola, e casi d'altre frazioni fuori le decimali. 10. Compimento della II. Parte, e di tutto il I. Primo Trattato.

TRATTATO II.

Cap. I. Della ragione in generale, e delle sue specie in particolare 245.

Num. 1. Della ragione in generale della sua origine, e delle sue parti. 2. Della divisione della frazione. 3. Ogni ragione o è razionale, o è irrazionale. 4. 5. Si danno le specie della ragione razionale. 6. Uso de' medesimi nel manifestare la natura delle ragioni. 7. Delle ragioni simili. 8. Spiegazione della voce stare. 9. Spiegazione della voce reciprocamente. 10. Che cosa voglia dire ridurre due ragioni, che hanno diverso conseguente ad averlo il medesimo. 11. Serie di diverse ragioni simili derivate dal confronto di simili ragioni. 12. Fondamento per cui si dice, che due ragioni sono simili fra di loro. 13. 14. Altra origine delle ragioni simili. Esempj di esse, e perchè si sono dati ne' numeri. 15. Delle quantità incommensurabili. 16. e come si possa determinare la ragione, che si trova fra esse. 17. Varie osservazioni su questo stesso soggetto. 18. Applicazione di quello, che si è detto delle ragioni simili a i confronti delle quantità, che si esprimono colle lettere. 19. 20. Diverse regole per trovare la comune misura da due quantità le maggiori, o le minori di tutte quelle, che si possono preparare.

Cap. II. Della Proporzione, sua natura, e sue differenti maniere 268.

Num. 1. Introduzione nella materie. 2. Che cosa sia la Proporzione. 3. Delle varie specie delle proporzioni. 4. Regola sicura per conoscere se i termini dati sono proporzionali. 5. Regola per trovare il proporzionale, che manca. 6. Modo facile per ridurre tutte le varie proporzioni alla proporzione diretta. 7. Si dimostra, perchè i risultati della multiplicazione de' termini proporzionali abbiano da essere uguali fra loro. 7. Spiegazione della dimostrazione. 9. Conseguenze che derivano da principj stabiliti. 10. Regola per trovare più medij proporzionali fra due date potenze. 11. Uso delle stabilite denominazioni per altri casi. 12. Applicazione delle re-

gole di proporzione alle ferie. 13. *Estensione di questa dottrina*. 14. *Regola per trovare la ragione, che conserva la ferie delle radici al suo ultimo termine*. 15. *Modo di oprare con essa*. 16. 17. 18. *si propone l'uso della stessa regola per altre ferie*. 19. *Osservazione su questa regola*. 20. 21. *Regola per trovare la ragione dell' avanzo dopo fatta la sottrazione di una ferie di qual si sia potenza, dalla ferie degli eguali all' ultimo termine ingrandito quel numero de' precedenti*. 22. 23. *Osservazioni per alcuni casi particolari*. 24. *Regola per mostrare la ragione, che hanno al loro ultimo termine, o la ferie degli avanzi dopo che si sono sottratte dalle ferie degli uguali, quelle delle radici seconde, terze &c. o la ferie degli avanzi, che nascano dalla sottrazione de' quadrati, de' cubi &c. dalla ferie delle prime al loro ultimo termine*. 25. *Qual proporzione si trova in una ferie, che risulta dalla multiplicazione di una ferie di prime potenze fatta per se medesima, o per un altra con una maniera inversa, e qual proporzione sia quella di un altra ferie, che risulta dalla multiplicazione di altre due ferie, nelle quali una sia il risultato di due ferie aggiunte insieme, e l'altra l'avanzo di una di quelle sottratta dall' altra*.

Cap. III. *Delle regole di Proporzione ridotte alla pratica* 289.

Num. 1. *Introduzione*. 2. §. I. Della regola del tre, e del modo di praticarla. 3. *Della regola del tre composta*. 4. *Di un altra regola del tre più composta*.

§. II. Della regola d'interesse, num. 5. 6. *Della regola de' meriti, e sconti*. 7. *Del Cambio*. 8. *Del modo di ragguagliare i prezzi de' Cambj*. 9. *Della regola delle tare e baratti*. 10. *Modo di barattare parte a contanti, e parte a roba*. 11. *Della regola di compagnia*.

§. III. Della regola d'allegazione. 12. *Che cosa sia la lega, e in quanti modi si prepara*. 13. *Prima regola per prepararla*. 14. *Seconda regola*. 15. *Terza regola*.

§. IV. Della regola di falsa posizione. 16. *Che cosa è questa regola, e come si pratica*. 17. *Regola di una falsa posizione*. 18. *Regola di due false posizioni*. 19. *Osservazioni su questa regola*. 20. *Estrazione di radice usa nella regola della semplice falsa posizione*.

Cap. IV. *Della ragione composta, e dell' uso della proporzione nella soluzione de' Problemi Geometrici* 329.

Num. 1. *Che cosa sia ragione composta, ed a chi convenga*. 2. *De' varj nomi, con i quali si esprime questa ragione*. 3. *Della ragione sesquiplicata*. 4. *Delle ragioni composte simili, e dissimili*. 5. *Applicazione di queste ragioni*. 6. *Della ragione delle figure*. 7. *Con quali nomi si chiami la ragione delle figure*. 8. *Delle figure simili*. 9. *Differenze di altre ragioni composte*.

§. I. Misura delle curve linee. 10. *Problema misura della circonferenza del circolo*. Prob. II. *Misura della curva Cicloidale, o Tautocrona*. Prob. III. *Misura della Spirale Logaritmica*. Prob. IV. *Misura della Curva Loxodromica*. Prob. V. *Misura della Curva Caustica*. Prob. VI. *Misura della Curva Diocaustica*. Prob. VII. *Misura della Curva Parabolica*. Prob. VIII. *Misura della Iperbole*.

§. II. Delle Misure degli Spazj, o Aje delle figure.

Num. 11. Problema IX. *In cui si danno le misure di tutte le superficie, che appartengono al circolo*. Prob. X. *Della misura degli spazj, che si comprendono dall' altre curve*. Prob. XI. *Misura dello spazio spirale Logaritmico*. Prob. XII. *Misura dello spazio compreso dalla curva Logistica*. Prob. XIII. *Misura dello spazio* for-

mato della curva Loxodromica. Prob. XIV. *Misura dello spazio compreso dalla Curva Caustica*. Prob. XV. *Misura dello spazio Parabolico*. Prob. XVI. *Misura dello spazio Iperbolico*. Prob. XVII. *Misura dello spazio della Curva Catenaria, o Funicularia*. Prob. XVIII. *Misura della Elisse, o Sferoide allungata a' Poli*. Prob. XIX. *Misura dell' Aja de Triangoli sferici*. Prob. XX. *Misura della spirale d' Archimede*.

§. III. Misura de' Corpi Solidi.

Num. 12. *Varie specie di corpi solidi*. Prob. XXI. *Misura de' Prismi, e Cilindri*. Prob. XXII. *Misura del Cono, e Piramide*. Prob. XXIII. *Misura della solidità della sfera*. Prob. XXIV. *Misura della solidità della lunga, e compressa Sferoide*. Prob. XXV. *Misura de' Conoidi Parabolici, ed Iperbolici*. Prob. XXVI. *Misura del Solido Logistico*. Prob. XXVII. *Misura del Solido Cicloidale, e Cissoidale*. Prob. XXVIII. *Misura del Solido, che volgarmente è chiamato Coclea*.

Cap. V. *Delle Progressioni*. 387.

Num. 1. *Delle Progressioni in generale, e de' proprj caratteri, che convengono alla Aritmetica*. 2. *Si dimostrano le proprietà di questa Progressione*. 3. *Come si possono individuare i nomi della Progressione*. 4. *Osservazioni sopra la precedente regola*. 5. *Modo d' individuare un termine solo della Progressione*. 6. *Altre proprietà, che convengono a questa Progressione*. 7. *Fondamenti su i quali si stabiliscono queste proprietà*. 8. *Soluzione di alcuni quesiti ne i quali comparisçono le proprietà della Progressione Aritmetica*. 9. *Ilazioni nate dalle proprietà addotte per la Progressione Aritmetica*. 10. *Proprietà de i due numeri presi secondo l' ordine naturale, e di diversi altri presi in una serie di numeri dispari*. 11. *De' numeri figurati*. 12. *Metodo per trovare il Poligono quando è dato il lato*. 13. *Misurare il dato Poligono*. 14. *Regola ancora più universale per riuscire in questa misura*. 15. *Dato il Poligono, trovare il suo lato*. 16. *Della Origine de i numeri Piramidali*. 17. *Delle permutazioni, o variazioni de' numeri, come in essi si operi, quando sono molti i numeri dati*. 18. *Osservazione per quel caso in cui fra i numeri, o termini dati, si ripetono i medesimi*. 19. *Delle Combinazioni, che cosa sono, e come si fanno*. 20. *Modo d' intraprendere le Combinazioni di quei termini, che tutti sono diversi fra loro*. 21. *Come si possa conoscere la somma di tutte le Combinazioni*. 22. *Osservazioni su questa regola*. 23. *Come si operi quando l' esponente della Combinazione è maggiore del numero delle cose date da Combinarsi*. 24. *Qual numero debba risultare dalle Combinazioni, quando sono date, quante si vogliono quantità, con questa determinazione, che ognuna di esse si trovi nella Combinazione tante volte, quante è ripetuta in tutto il numero delle cose date*.

Cap. VI. *Della Progressione Geometrica*. 418.

Num 1. *Che cosa sia l' esponente della Progressione*. 2. *Differenza, che corre fra la Progressione Geometrica, e l' Aritmetica*. 3. *Proprietà della Progressione Geometrica*. 4. *Prova della prima proprietà*. 5. *Prova per la seconda proprietà*. 6. 7. *Osservazione sopra ciò, che si è detto nel numero precedente sopra questa dimostrazione*. 8. *Dimostrazione della terza proprietà*. 9. *Dimostrazione della quarta proprietà*. 10. *Dimostrazione della quinta proprietà*. 11. *Scoperta di alcune proprietà più verisimili, che competono alla Progressione Geometrica*. 12. *Nuove riflessioni sopra le Progressioni nelle parti delle medesime linee considerate come finite*. 13. *Modo di trovare una grandezza*,

za, che sia uguale alla somma di tutti i termini, che compongono una serie infinita di grandezze proporzionali. 14. *Dividere una grandezza in una data proporzione, e che la Progressione in questa serie continuata termini nel dato spazio.*

Cap. VII. *Della proporzione Armonica.* 432.

Num. 1. *Che cosa è la proporzione Armonica.* 2. *Quali sono quei numeri fra i quali vi si trova la proporzione Armonica.* 3. *Regola per trovare il maggior termine in una proporzione Armonica.* 4. *Regola per trovare il termine di mezzo.* 5. *Regola per trovare il terzo proporzionale.* 6. *Osservazione sulla regola precedente.* 7. *Si spiega l' opinione degli Antichi, che stabilisce l' Armonia in questi numeri* 12. 9. 8. 6. 8. *Che cosa sia Consonanza, ed in che si fondi.* 9. *Divisione delle Consonanze nelle sue specie, e regole per prepararle.* 10. *Proporzione delle parti, che compongono le Consonanze.* 11. *Delle Consonanze composte, e loro differenti specie.* 12. *Osservazioni sopra le Consonanze composte.* 13. *Si propongono le più perfette fra le Consonanze.* 14. *Metodo da osservarsi nella divisione Armonica di quella corda, che toccata insieme colla intera produce le Consonanze.* 15. *Come si abbia da dividere la predetta corda per manifestare le proporzioni delle Consonanze composte, che sono maggiori della dupla.* 16. *Fondamento di tali proporzioni.* 17. *Seguita la stessa dottrina delle proporzioni delle Consonanze.* 18. *Della proporzione degli intervalli.*

Cap. VIII. *De i Logaritmi loro origine, loro uso, e loro proprietà.* 446.

Num. 1. *Della natura de' Logaritmi.* 2. *In qualunque esempio di progressione Aritmetica, o Geometria, l' operato con due termini di mezzo è sempre un termine della Progressione.* 3. *Come si formano i Logaritmi.* 4. *Maniera di trovare il Logaritmo del numero, che non è dentro la serie data.* 5. *Operazione per la precedente regola.* 6 *Seguita la stessa operazione.* 7. *Operazione per il caso in cui il quoziente è un numero non primo maggiore del dieci.* 8. *Come si opera quando il numero di cui si cerca il Logaritmo è maggiore del mille.* 9. *Caso in cui si vede l' eccettuazione della regola precedente.* 10. *Caso opposto al precedente.* 11. *Continuazione della stessa materia.* 12. *Modo di trovare un Logaritmo di un numero maggiore di* 989127. *ovvero di un numero, che ha più di sei cifre.* 13. *Metodo per rilevare le principali operazioni dell' Aritmetica, coll' ajuto de i Logaritmi.* 14. *Metodo per trovare quel proporzionale, che si dimanda.* 15. *Seguita la stessa materia, e si propongono diversi esempj per la pratica.*

IL FINE DELL' INDICE.

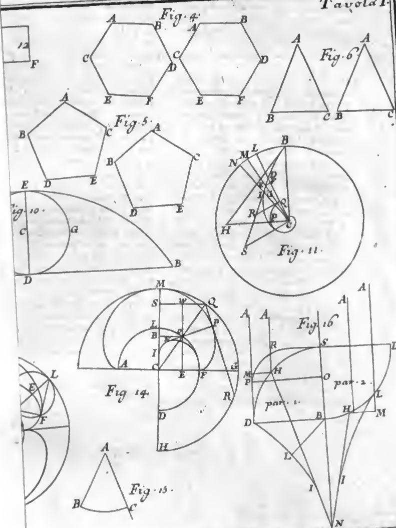


Tavola I.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16
par. 1.
par. 2.

Tav: II.

Fig. 19.

Fig. 20.

Fig. 21.

Fig. 22.

Fig. 24.

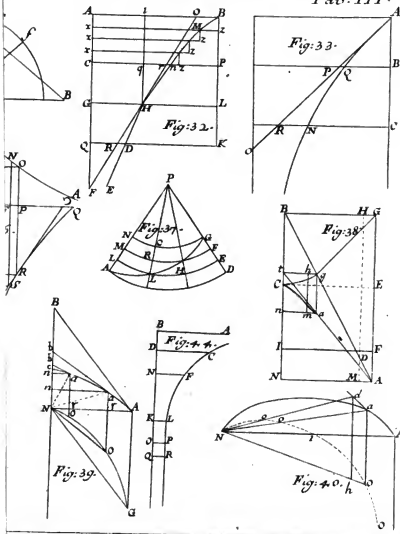
Fig. 25.

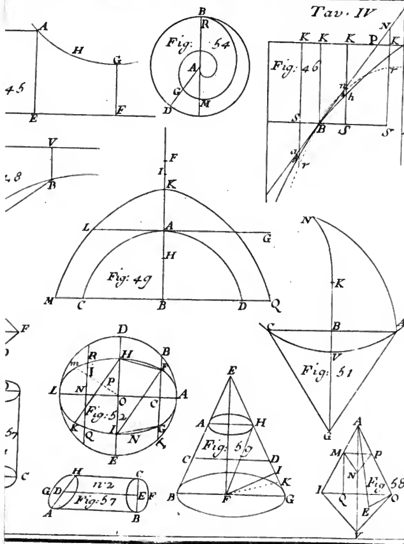
Fig. 26.

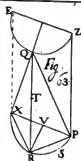
Fig. 28.

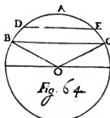
Fig. 29.

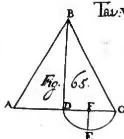
Fig 30.

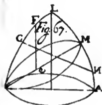

Tav: III.
Fig: 32.
Fig: 33.
Fig: 37.
Fig: 38.
Fig: 39.
Fig: 44.
Fig: 40.

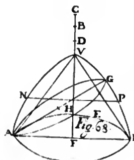

Tav. IV
Fig: 46
Fig: 54
Fig: 49
Fig: 51
Fig: 52
Fig: 55
Fig: 57
Fig: 58

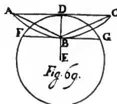

E
Z
Q
Fig. 63
T
X
V
P
R
S

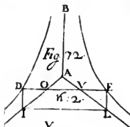

A
D
E
B
C
O
Fig. 64

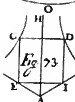

B
Fig. 65
A
D
F
C
E

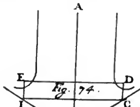

L
F
Fig. 67
G
M
N
A

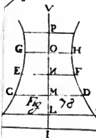

C
B
D
V
G
N
P
H
F
Fig. 68
A
F
I


A
D
C
F
B
G
E
Fig. 69

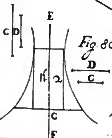

B
Fig. 72
A
D
O
V
E
n. 2
I
L

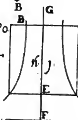

O
H
C
D
Fig. 73
E
A
I

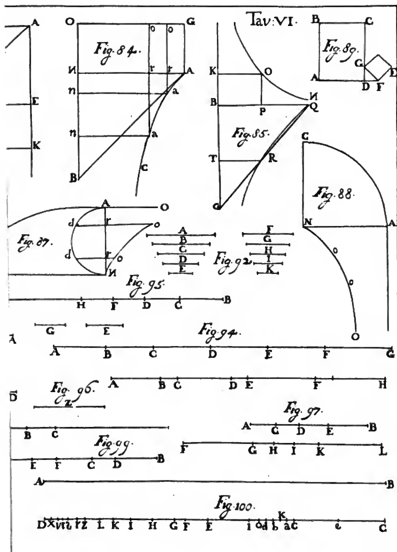

A
E
D
Fig. 74
I
C
B


V
P
G
O
H
E
N
F
C
M
D
Fig. 78
L
B
I


D
C
n
2
Fig. 79
A
B


E
C D
Fig. 80
D
C
n 2
G
F


G
B
n. 1
E
F


Tav: VI.
Fig. 84.
Fig. 85.
Fig. 89.
Fig. 88.
Fig. 87.
Fig. 92.
Fig. 95.
Fig. 94.
Fig. 96.
Fig. 97.
Fig. 99.
Fig. 100.

